Περιοδικό "Το φ", 6, 2009, σ. 270-278

ΤΟ ΒΗΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΑΣ

Σταθακοπούλου Χρύσα
Μαθήτρια της Γ΄ τάξης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Ένα Θεώρημα του Fermat για όλους

Προλογικό Σημείωμα

Το σχολικό έτος 1996-1997 στο Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης λειτούργησε Λέσχη Ανάγνωσης του δικτύου "Θαλής και Φίλοι" όπου μετείχαν μαθητές της Α΄ Λυκείου. Η λέσχη ασχολήθηκε με το βιβλίο του Γκετζ "Το Θεώρημα του Παπαγάλου". Υπεύθυνοι καθηγητές ήσαν ο φιλόλογος Μάρκος Ρενιέρης και ο μαθηματικός Ν.Σ. Μαυρογιάννης. Μεταξύ άλλων οι μαθητές εκπόνησαν και διάφορες εργασίες με θέματα που προέρχονταν από το βιβλίο. Μέρος της δουλειάς τους παρουσιάσθηκε το 2007 στο Μαθηματικό Πανηγύρι. Μία από τις εργασίες που δόθηκε είχε το εξής θέμα:

"(Ο Φερμά) Απέδειξε ότι κανένα ορθογώνιο τρίγωνο δεν έχει ως εμβαδό τετράγωνο αριθμό"

(Το Θεώρημα του Παπαγάλου σ. 460)

Να βρείτε μία απόδειξη που να την καταλαβαίνει ένας μαθητής της Α΄Λυκείου

Για την αντιμετώπιση του θέματος δόθηκαν μερικές επεξηγήσεις (ίσως προσέξατε ότι η διατύπωση του βιβλίου δεν είναι η καλύτερη δυνατή κάτι που επισημαίνεται και σε υποσημείωση του μεταφραστή) ορισμοί και πληροφορίες και μία σειρά προτάσεων υπό μορφή ασκήσεων. Το άρθρο αυτό προήλθε από την ενασχόληση με το παραπάνω ερώτημα.

Ο Fermat και το πρόβλημα

Ο Fermat (Φερμά) ήταν Γάλλος νομικός και μαθηματικός και διετέλεσε νομοθέτης και δικαστής στην Τουλούζη, όπου έζησε πολλά χρόνια. Με τα Μαθηματικά ασχολήθηκε μη επαγγελματικά και αποκλήθηκε ο "πρίγκιπας των ερασιτεχνών". Φίλος του Καρτέσιου (Descartes), με τον οποίο αλληλογραφούσε, κατέληξε ανεξάρτητα και ίσως και πριν από αυτόν στην μέθοδο των συντεταγμένων, που είναι η βάση της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Επίσης υπήρξε ένας από τους πρωτεργάτες του Απειροστικού Λογισμού και της Θεωρίας των Πιθανοτήτων και της Οπτικής.

Pierre Fermat
1601-1665

Ο Fermat ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την Θεωρία Αριθμών. Μεταξύ άλλων τον απασχόλησαν και προβλήματα (το πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι ένα από αυτά) με ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ακέραιες πλευρές. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο με ακέραιες πλευρές $x < y < z$ ικανοποιεί την σχέση

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Πρόκειται για μία εξίσωση που οι άγνωστοί της x, y, z είναι ακέραιοι αριθμοί. Οι εξισώσεις αυτού του είδους λέγονται Διοφαντικές εξισώσεις (προς τιμήν του αρχαίου Έλληνα μαθηματικού Διόφαντου). Οι λύσεις x, y, z της συγκεκριμένης εξίσωσης ήσαν γνωστές από αρχαιότητα. Ο Fermat φαίνεται να ασχολήθηκε και με την επίλυση της εξίσωσης όταν αντί του 2 έχουμε εκθέτη 2, 3, 4,... δηλαδή της $x^ν + y^ν = z^ν$, αναζητώντας τις θετικές τριάδες x, y, z που την ικανοποιούν. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση που να απαρτίζεται από θετικούς ακεραίους x, y, z. Δεν βρέθηκε καμία απόδειξη του Fermat για αυτή την πρόταση. Εξ' άλλου ο Fermat μας άφησε ελάχιστες αποδείξεις. Ωστόσο η πρόταση αυτή που αρχικά ονομάστηκε "μέγα θεώρημα του Fermat" , "τελευταίο θεώρημα του Fermat" και αργότερα "εικασία του Fermat" έμεινε αναπόδεικτη πάνω από 300 χρόνια αν και ασχολήθηκαν μαζί της πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί. Αποδείχθηκε οριστικά το 1994 από τον Βρετανό μαθηματικό Andrew Wiles.

Η απόδειξη της πρότασης που θα μας απασχολήσει είναι βέβαια απείρως πιο απλή από εκείνης του τελευταίου θεωρήματος του Fermat. Θα χρησιμοποιήσουμε μία τεχνική του Fermat, **την τεχνική της άπειρης καθόδου,** συμπληρωματικά με την απαγωγή στο άτοπο. Η βασική ιδέα αυτής της τεχνικής είναι η ακόλουθη:

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

Θεώρημα του Fermat: Δεν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο που τα μήκη των πλευρών του να είναι ακέραιοι αριθμοί και το εμβαδόν του να είναι τετράγωνο ακεραίου.

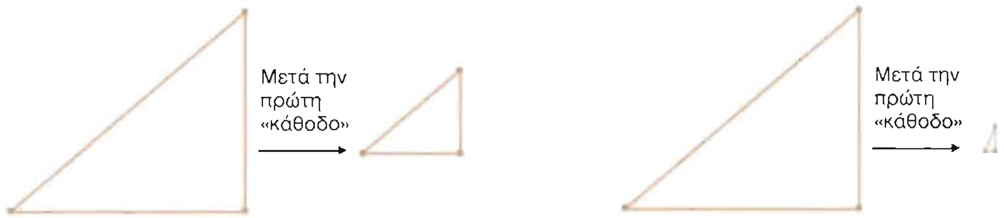
Υποθέτουμε ότι τέτοιο τρίγωνο υπάρχει. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν αριθμοί x, y, z, t ώστε

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad και \quad \frac{1}{2}xy = t^2 \qquad (\#)$$

Αποδεικνύουμε ότι οποτεδήποτε οι εξισώσεις (#) επαληθεύονται από μία τετράδα αριθμών x, y, z, t, υπάρχει μία άλλη "μικρότερη" τετράδα που επίσης τις επαληθεύει, δηλαδή:

$$x'^2 + y'^2 = z'^2 \quad και \quad \frac{1}{2}x'y' = t'^2 \qquad (\#)$$

Όπως θα δούμε η λύση x', y', z', t' είναι "μικρότερη" της x, y, z, t κατά την εξής έννοια: Είναι $z > z'$. Δηλαδή το τρίγωνο που αντιστοιχεί στην νέα λύση έχει μικρότερη υποτείνουσα από την αρχική.



Οι διαστάσεις αρχικού τελικού τριγώνου μετά από μία κάθοδο.
Το πρώτο σχήμα αντιστοιχεί στην ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 (βλ. Μέρος 3)
και το δεύτερο (όπου και η μείωση των διαστάσεων είναι μεγάλη) στην ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

Επαναλαμβάνουμε το συλλογισμό όχι με την λύση x, y, z, t αλλά με την λύση x΄, y΄, z΄, t΄. Θα υπάρχει τετράδα αριθμών x΄΄, y΄΄, z΄΄, t΄΄ που πάλι ικανοποιεί τις (#). ΄Ετσι σχηματίζεται μία σειρά αριθμών (οι υποτείνουσες) με z > z΄ > z΄΄ > ... . "Κατεβαίνοντας" με αυτό τον τρόπο έχουμε μία σειρά που μπορεί να επεκτείνεται επ΄ άπειρον. Από την άλλη μεριά πρέπει να τερματιστεί, αφού υπάρχουν πεπερασμένοι θετικοί ακέραιοι που είναι μικρότεροι του z. Καταλήγουμε έτσι σε άτοπο. Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να δεχθούμε ότι τέτοιο τρίγωνο δεν υπάρχει και επομένως το θεώρημα αληθεύει.

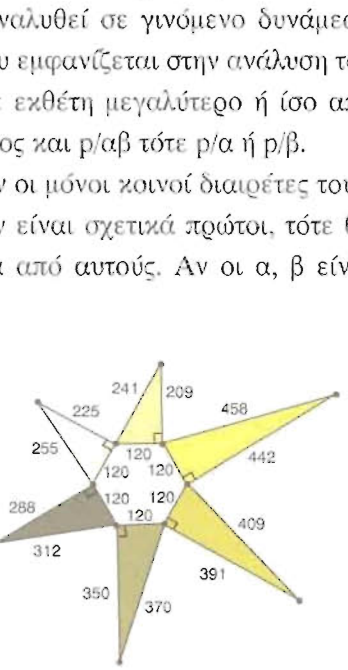
Η απόδειξη γίνεται στο μέρος 3, το μέρος 1 περιέχει λίγα στοιχεία για την διαιρετότητα ενώ το μέρος 2 περιλαμβάνει μερικές απαραίτητες πληροφορίες για τις Πυθαγόρειες τριάδες.

1. Λίγα περί διαιρετότητας

ΛΕΓΟΝΤΑΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΘΑ ΕΝΝΟΟΥΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ. ΌΛΟΙ ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΑ ΕΠΟΜΕΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ.

- Ο μη μηδενικός αριθμός α θα διαιρεί τον αριθμό β αν ο α είναι παράγοντας του β, δηλαδή αν ο β είναι πολλαπλάσιο του α, που σημαίνει ότι θα υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε β = λα. Γράφουμε συμβολικά α/β (Διαβάζεται "α διαιρεί β")
- Αν ο α διαιρεί τον β, διαιρεί κάθε πολλαπλάσιο του β και επομένως και κάθε δύναμη του β. Αν ο α διαιρεί τους β, γ, τότε θα διαιρεί και το άθροισμα καθώς και τη διαφορά των β, γ αλλά και το κβ + λγ. Αν ένας αριθμός δ διαιρεί δύο από τους α, β, α + β τότε θα διαιρεί και τον τρίτο. Το ίδιο ισχύει και για τους α, β, α – β.
- Άρτιοι αριθμοί είναι εκείνοι που διαιρούνται από τον 2. Είναι της μορφής 2k. Οι υπόλοιποι αριθμοί λέγονται περιττοί και είναι της μορφής 2k + 1. Το άθροισμα και η διαφορά δύο αρτίων ή δύο περιττών αριθμών είναι αριθμός άρτιος ενώ το άθροισμα ή η διαφορά ενός αρτίου και ενός περιττού είναι αριθμός περιττός. Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός οποιουδήποτε αριθμού είναι άρτιος ενώ το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι αριθμός περιττός.

- Πρώτος αριθμός είναι κάθε αριθμός διαφορετικός του ± 1 που διαιρείται μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Κάθε αριθμός μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων. Θα είναι α/β αν κάθε πρώτος παράγοντας p που εμφανίζεται στην ανάλυση του α εμφανίζεται και στην ανάλυση του β και μάλιστα με εκθέτη μεγαλύτερο ή ίσο από εκείνον που έχει στην ανάλυση του α. Αν ο p είναι πρώτος και p/αβ τότε p/α ή p/β.
- Δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται σχετικά πρώτοι αν οι μόνοι κοινοί διαιρέτες τους, δηλαδή αριθμοί που τους διαιρούν είναι οι ± 1. Αν δεν είναι σχετικά πρώτοι, τότε θα υπάρχει κάποιος πρώτος που θα διαιρεί τον κάθε ένα από αυτούς. Αν οι α, β είναι σχετικά πρώτοι και α/βγ τότε α/γ
- Ένας αριθμός α λέγεται τέλειο τετράγωνο αν υπάρχει αριθμός β τέτοιος ώστε: $\alpha = \beta^2$. Αυτό θα συμβαίνει αν κάθε πρώτο παράγοντας στην ανάλυση του α εμφανίζεται με άρτιο εκθέτη. Αν $\alpha = \beta\gamma^2$ τότε ο α θα είναι τέλειο τετράγωνο αν και μόνο αν ο β είναι τέλειο τετράγωνο. Αν $\alpha^2 = \beta\gamma$ και οι β, γ είναι σχετικά πρώτοι τότε οι β, γ είναι τέλεια τετράγωνα.



2. Γνωριμία με τις Πυθαγόρειες τριάδες

Κάθε τριάδα θετικών αριθμών x, y, z με $x^2 + y^2 = z^2$ λέγεται Πυθαγόρεια τριάδα. Η ονομασία προέρχεται από το γεγονός ότι οι x, y, z λόγω του Πυθαγορείου Θεωρήματος θα είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

Υποθέτουμε ότι έχουμε την Πυθαγόρεια τριάδα x, y, z με

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (*)$$

όπου οι x, y, z είναι σχετικά πρώτοι.

1. Να αποδειχθεί ότι ένας μόνο από τους x, y είναι περιττός, ο άλλος είναι άρτιος και ότι ο z είναι περιττός

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κατ' αρχήν δε μπορεί οι x, y να είναι και οι δύο άρτιοι. Πράγματι αν αυτό συνέβαινε το α΄ μέλος της (*) θα ήταν άρτιος αριθμός. Άρα και το β΄ μέλος θα ήταν επίσης άρτιος που σημαίνει ότι ο z θα είναι άρτιος, πράγμα αδύνατον διότι τότε οι x, y, z θα είχαν κοινό διαιρέτη το 2 και επομένως δεν θα ήσαν σχετικά πρώτοι.

Επίσης δε μπορεί οι x, y να είναι και οι δύο περιττοί. Διότι αν $x = 2\kappa + 1$, $y = 2\lambda + 1$ τότε:

$$x^2 + y^2 = (2\kappa+1)^2 + (2\lambda+1)^2 = 4\left(\kappa^2+\lambda^2\right) + 4(\kappa+\lambda) + 2 = 2\left(2\left(\kappa^2+\lambda^2+\kappa+\lambda\right)+1\right) = 2(2\mu+1)$$

Οπότε ο είναι άρτιος, $z = 2r$. Τότε $z^2 = 4r^2$ άρα $2(2\mu + 1) = 4r^2$ και $2\mu + 1 = 2r^2$ δηλαδή ένας άρτιος είναι ίσος με έναν περιττό. Άτοπο. Επομένως από τους x, y σίγουρα ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. Τότε το τετράγωνο του ενός θα είναι άρτιος και του άλλου περιττός. Επομένως το άθροισμα των τετραγώνων τους z^2 θα είναι περιττός. Αυτό σημαίνει ότι και ο z είναι περιττός.

ΣΤΑ ΕΠΟΜΕΝΑ ΥΠΟΘΕΤΟΥΜΕ ΟΤΙ Ο x ΕΙΝΑΙ ΑΡΤΙΟΣ ΚΑΙ ΟΙ y, z ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΤΤΟΙ.

2. Να αποδειχθεί ότι αν $x = 2\kappa$, τότε $z - y = 2\upsilon$, $z + y = 2\omega$ και $\kappa^2 = \upsilon\omega$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού οι x, y είναι περιττοί, επομένως το άθροισμα τους $z + y$ και η διαφορά τους $z - y$ είναι άρτιοι. Άρα $z - y = 2\upsilon$, $z + y = 2\omega$ και αφού $x^2 = z^2 - y^2$ είναι $x^2 = (z - y)(z + y)$ και επομένως $(4\kappa)^2 = (2\upsilon)(2\omega)$ από την οποία έχουμε $\kappa^2 = \upsilon\omega$.

3. Να αποδειχθεί ότι οι υ, ω του προηγουμένου είναι σχετικά πρώτοι.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν δεν ήταν σχετικά πρώτοι θα υπήρχε κάποιος πρώτος αριθμός σ που θα ήταν κοινός διαιρέτης τους. Αφού $\sigma|\upsilon, \sigma|\omega$ θα είναι $\sigma\left|\frac{z+y}{2}\right., \sigma\left|\frac{z-y}{2}\right.$. Άρα ο σ θα διαιρεί το άθροισμα και τη διαφορά των $\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}$ που δεν είναι άλλοι από τους αριθμούς z και y, άτοπο, γιατί οι x, z είναι από υπόθεση σχετικά πρώτοι.

4. Να αποδειχθεί ότι οι υ,ω του προηγουμένου είναι τέλεια τετράγωνα και επομένως $\omega = p^2$ και $\upsilon = q^2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού $\kappa^2 = \upsilon\omega$ και οι υ, ω είναι σχετικά πρώτοι, θα είναι και τέλεια τετράγωνα.

5. Να αποδειχθεί ότι οι p, q είναι σχετικά πρώτοι

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Οι p, q είναι σχετικά πρώτοι γιατί αν δεν ήταν θα είχαν πρώτο κοινό διαιρέτη δ που σημαίνει πως και τα τετράγωνα τους θα είχαν κοινό διαιρέτη τον δ. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί, όπως δείχθηκε παραπάνω, τα τετράγωνά τους υ, ω είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί.

6. Να αποδειχθεί ότι $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι αφού $z - y = 2\upsilon = 2q^2$ και $z + y = 2\omega = 2p^2$, προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε: $2z = 2(p^2 + q^2)$ και $2y = 2(p^2 - q^2)$ οπότε $z = p^2 + q^2$, $y = p^2 - q^2$
Επίσης $x^2 = 2\kappa^2 = 4\upsilon\omega = 4q^2p^2$ και επομένως $x = 2pq$

3. Η απόδειξη του θεωρήματος του Fermat

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι x, y, z, t επαληθεύουν τις (#).

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. Οι x, y, z δεν είναι σχετικά πρώτοι. Τότε θεωρούμε ένα πρώτο κοινό διαιρέτη τους δ. Θα είναι $x = \delta x'$, $y = y'\delta$, $z = z'\delta$. Η $x^2 + y^2 = z^2$ γίνεται $(x'\delta)^2 + (y'\delta)^2 = (z'\delta)^2$ ή $x'^2\delta^2 + y'^2\delta^2 = z'^2\delta^2$ από την οποία προκύπτει $x'^2 + y'^2 = z'^2$.

Επίσης η $\frac{1}{2}xy = t^2$ γίνεται $\frac{1}{2}(x'\delta)(y'\delta) = t^2$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον δ

- $\delta = 2$. Τότε έχουμε $\frac{1}{2}(x'\delta)(y'\delta) = t^2$ δηλαδή $2x'y' = t^2$ οπότε ο t^2 επομένως και ο t

  είναι άρτιος. Θα είναι $t = 2t'$ και $2x'y' = 4t'^2$ από την οποία έχουμε $\frac{1}{2}x'y' = t'^2$.

- Ο δ είναι ένας περιττός πρώτος. Τότε από την $\frac{1}{2}(x'\delta)(y'\delta) = t^2$ έχουμε $x'y'\delta^2 = 2t^2$

  και θα πρέπει ο δ να είναι παράγοντας του t^2 άρα και του t.

  Επομένως $t = t'\delta$ και $x'y'\delta^2 = 2t'^2\delta^2$ από την οποία καταλήγουμε πάλι στην $\frac{1}{2}x'y' = t'^2$

Και στις δύο περιπτώσεις οι x΄, y΄, z΄, t΄ επαληθεύουν τις (#) και φυσικά $z' < z$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. Οι x, y, z είναι σχετικά πρώτοι.

Από το πρώτο μέρος κάποιος από τους x, y είναι άρτιος. Ας υποθέσουμε ότι είναι ο x. Είδαμε ότι οι y, z θα είναι περιττοί. Τότε θα υπάρχουν σχετικά πρώτοι αριθμοί p, q τέτοιοι ώστε $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$

7. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $pq(p - q)(p + q)$ είναι τέλειο τετράγωνο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού $\frac{1}{2}xy = t^2$ θα είναι $2pq(p^2 - q^2) = 2t^2$ οπότε $pq(p^2 - q^2)$ και άρα $pq(p - q)(p + q) = t^2$ που σημαίνει ότι ο αριθμός $pq(p - q)(p + q)$ είναι τέλειο τετράγωνο.

8. Να αποδειχθεί ότι οι p, q, p – q, p + q είναι ανά δύο σχετικά πρώτοι

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Όπως δείχθηκε στο πρώτο μέρος οι αριθμοί p, q είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους.

Όμως και οι αριθμοί p, p + q είναι πρώτοι μεταξύ τους γιατί αν δεν ήταν θα υπήρχε πρώτος αριθμός δ τέτοιος ώστε να διαιρεί τον p και τον p + q. Τότε όμως θα διαιρούσε και τον q. Αυτό σημαίνει ότι οι p, q θα είχαν κοινό διαιρέτη τον δ, που είναι άτοπο, καθώς είναι σχετικά πρώτοι.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και οι αριθμοί p, p – q είναι σχετικά πρώτοι καθώς και οι p, p + q και οι q, p – q. Τέλος και οι αριθμοί p + q, p – q είναι σχετικά πρώτοι γιατί αν δεν ήταν τότε θα είχαν κάποιον κοινό πρώτο διαιρέτη $\xi > 1$. Θα είναι $\xi|p+q, \xi|p-q$, και τότε $\xi|2p$ και $\xi|2q$. Από την $\xi|2p$ έχουμε ότι $\xi|2$ ή $\xi|p$ και παρόμοια από την $\xi|2p$ ότι $\xi|2$ ή $\xi|q$.

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι α) $\xi|p, \xi|p$ β) $\xi = 2$.

Αν ισχύει η α) τότε έχουμε άτοπο αφού οι p, q είναι σχετικά πρώτοι.

Αν ισχύει η β) δηλαδή αν $\xi = 2$ τότε ο p + q θα πρέπει να είναι άρτιος και αυτό συμβαίνει μόνο αν οι p, q είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δυο περιττοί. Στην περίπτωση αυτή όμως τα τετράγωνά τους p^2, q^2 θα ήσαν και οι δύο άρτιοι ή και οι δυο περιττοί, κάτι που έχει σαν συνέπεια το ότι ο $z = p^2 + q^2$ θα είναι άρτιος οπότε πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.

9. Να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί p, q, p – q, p + q είναι τέλεια τετράγωνα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εφόσον οι p, q, p – q, p + q είναι σχετικά πρώτοι και το γινόμενο τους είναι τέλειο τετράγωνο, θα είναι και αυτοί τέλεια τετράγωνα.

10. Έστω ότι $p + q = r^2$ και $p - q = s^2$ να δειχθεί ότι οι r, s είναι περιττοί και σχετικά πρώτοι. Να δειχθεί ακόμη ότι οι r – s, r + s είναι άρτιοι

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για τον περιττό αριθμό y είναι $y = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$. Αν κάποιος από τους p – q, p + q ήταν άρτιος, θα ήταν και το γινόμενο τους άρτιος (αδύνατο). Άρα είναι και οι δύο περιττοί. Επομένως και οι r, s που τα τετράγωνα τους είναι περιττοί θα είναι και αυτοί περιττοί και φυσικά το άθροισμα και η διαφορά τους θα είναι περιττοί.

Οι r, s είναι σχετικά πρώτοι γιατί, αν δεν ήταν, θα είχαν κάποιο κοινό παράγοντα $n > 1$. Τότε $r = \eta\theta$ και $s = \eta\xi$ οπότε $r^2 = \eta^2\theta^2$, $s^2 = \eta^2\zeta^2$ από τις οποίες προκύπτει ότι $p + q = r^2 = \eta^2\theta^2$ και $p + q = s^2 = \eta^2\zeta^2$ και επομένως οι p + q, p – q έχουν κοινό παράγοντα τον $n^2 > 1$ (άτοπο διότι είναι σχετικά πρώτοι). Οι r – s, r + s είναι άρτιοι γιατί ο πρώτος είναι διαφορά και ο δεύτερος άθροισμα περιττών.

11. Έστω και $r-s=2U$, $r+s=2V$. Να δειχθεί ότι οι U, V είναι σχετικά πρώτοι

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Οι $r-s$, $r+s$ είναι ανά δύο σχετικά πρώτοι αφού οι r, s είναι σχετικά πρώτοι και περιττοί (διαπιστώνεται όπως είδαμε και παραπάνω για τους $p-q$, $p+q$).

Οι U, V είναι σχετικά πρώτοι γιατί αν δεν ήταν τότε θα υπήρχε πρώτος δ τέτοιος ώστε $U=\delta\alpha$, $V=\delta\beta$ και επομένως $2U=2\delta\alpha$, $2V=2\delta\beta$ άρα $r-s=\delta(2\alpha)$, $r+s=\delta(2\beta)$

Επομένως οι $r-s$, $r+s$ έχουν κοινό παράγοντα τον δ άτοπο αφού είναι σχετικά πρώτοι.

Άρα οι U, V είναι σχετικά πρώτοι.

12. Να αποδειχθεί ότι $UV=\dfrac{q}{2}$ και αν $q={q_1}^2$ τότε $2\,|\,q_1^2$ και ·

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε $UV=\dfrac{(r-s)(r+s)}{2}=\dfrac{r^2-s^2}{2}=\dfrac{p+q-p+q}{4}=\dfrac{2p}{4}=\dfrac{q}{2}$ και

Επίσης ${q_1}^2=q$ άρα $\dfrac{q_1^2}{2}=\dfrac{q}{2}$ και επομένως $\dfrac{q_1^2}{2}=UV$.

Επομένως ο $\dfrac{q_1^2}{2}$ είναι γινόμενο δύο ακεραίων άρα και ο ίδιος ακέραιος. Άρα $2\,|\,q_1^2$.

Τώρα αφού $2\,|\,q_1^2$ ο q_1^2 είναι άρτιος που σημαίνει ότι και ο q_1 είναι άρτιος. Θα είναι λοιπόν $q_1=2w$ και αφού $q=q_1^2$ έχουμε $4w^2=q$ άρα $4\,|\,q$.

13. Να αποδειχθεί ότι ο $\dfrac{UV}{2}$ είναι τέλειο τετράγωνο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι $\dfrac{UV}{2}=\dfrac{q}{4}=\dfrac{q_1^2}{4}=\left(\dfrac{q_1}{2}\right)^2$ και αφού ο $\dfrac{q_1}{2}$ είναι ακέραιος ο $\dfrac{UV}{2}$ είναι τέλειο τετράγωνο

14. Να αποδειχθεί ότι $U^2+V^2=p$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι: $U^2+V^2=\left(\dfrac{r-2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{r+s}{2}\right)^2=\dfrac{r^2-2rs+s^2+r^2+2rs+s^2}{4}=\dfrac{2(r^2+s^2)}{4}=$

$=\dfrac{r^2+s^2}{2}=\dfrac{p-q+p+q}{2}=\dfrac{2p}{2}=p$

15. Να αποδειχθεί ότι η U, V, p_1 όπου $p = p_1^2$ είναι πυθαγόρεια τριάδα με τον $\frac{UV}{2}$ τέλειο τετράγωνο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι $U^2 + V^2 = p$ και αφού $p = p_1^2$ έχουμε $U^2 + V^2 = p_1^2$ δηλαδή η τριάδα U, V, p είναι Πυθαγόρεια. Ο $\frac{UV}{2}$ είναι τέλειο τετράγωνο, όπως είδαμε πριν.

16. Να αποδειχθεί ότι οι $x' = U$, $y' = V$, $z' = p_1$, t' με $\frac{UV}{2} = t'^2$ είναι λύση των εξισώσεων (#) με $z' < z$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $p_1^2 = p$ και $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$ είναι $2p_1^2 = x + y$

άρα $z' = p_1 = \sqrt{\frac{x+y}{2}} < \sqrt{\frac{z+z}{2}} = \sqrt{z} \leq z$.

Επομένως οι x', y', z', t' επαληθεύουν τις (*) και $z' < z$.

4. Βοηθήματα

1. ALBERT H. BEILER Recreations in the Theory of Numbers, Dover, 1964, κεφάλαιο XIV
2. DAVID M. BURTON Elementary Number Theory, UNIVERSAL BOOK STALL, New Delhi, 1990, σελίδες 291-297
3. ROBERT D. CARMICHAEL, On the Impossibility of Certain Diophantine Equations and Systems o Equations, American Mathematical Monthly, vol. 27, No 7, Sep. 1913, σελίδες 213-321
4. HAROLD M. EDWARDS Fermat's Last Theorem, Springer, 1977, σελίδες 5-14
5. DENIS GUEDJ Le thιorθme du Perroquet, ΄Editions du Seuil, 1998
6. DENIS GUEDJ Το θεώρημα του Παπαγάλου, Μετ. Τεύκρος Μιχαηλίδης, Πόλις, 2000
7. OYSTEIN ORE Number Theory and Its History, DOVER, 1988 (1948) σελίδες 199-203
8. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΠΟΥΛΑΚΗΣ Θεωρία Αριθμών, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1997, σελίδες 192-196