



ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + x$$

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

- $g(0) = 0$
- $g'(x) = \frac{f'(x)}{f'(g(x))}$ για κάθε x .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

1. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω $t \in [\alpha, \beta]$ και $E(t)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη t και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$. Να βρείτε για ποια τιμή του t το $E(t)$ γίνεται ελάχιστο.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Υποθέτουμε ότι για τον $\rho \in (\alpha, \beta)$ ισχύει

- $f'(\rho) = 0$ και
- $f(\rho) > 0$

Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 3

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- Η f είναι παραγωγίσιμη.
- $f(x + y) \leq f(x) f(y)$ για όλα τα x, y .
- $f(0) = 1$

1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε x ισχύει $f(x) f(-x) \geq 1$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε x ισχύει $f(x) > 0$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ Να αποδειχθεί ότι:

(α') Για κάθε $h > 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq f(x_0) \frac{f(h) - 1}{h}$$

(β') Για κάθε $h < 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq f(x_0) \frac{f(h) - 1}{h}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σταθερός αριθμός a ώστε:

$$f'(x) = a f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να βρεθεί η f αν είναι γνωστό ότι $\int_0^1 f(x) f'(x) dx = 2$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με

- $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
- Έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$.

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 1$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. $f'(x) < 0$ για κάθε $x \geq 0$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία*