



Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
28 Απριλίου 2015

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέτης, Σ. Χασάπης

ΘΕΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \leq 1$ ισχύει

$$f(x) \leq 6$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- $f(0) = f'(0) = 2$
- $f(x + y) = \frac{1}{2}f(x)f(y)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 xf(x) dx$.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 3

Για τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι:

1. $f(x) = (\ln(e^x + 1) - x)'$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. $g(x) - (e^x + 1)g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. $g(0) = \frac{1}{2}$

1. Να βρείτε την f .

3 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 g(x) dx < 1$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 4

Έστω f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$\int_1^{f(x)} \frac{1}{e^t - t - 1} dt = \frac{x - 1}{e - 2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

3 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε την εφαπτομένη της \mathcal{C}_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Αν $a > 1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, a)$ έτσι ώστε

$$\int_a^{x_0} f(t) dt = x_0 - f(x_0)$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία*