



Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση  
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά  
8 Απριλίου 2014

---

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

---

## ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$  και να εξετάσετε αν είναι ολικά.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $x = 0$ ,  $y = x$  είναι ασύμπτωτες της  $f$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_2^3 f(x) dx$ .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

## ΘΕΜΑ 2

Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $\varphi, \psi$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  είναι γνωστό ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = \varphi(x) + 1$$

$$\varphi'(x) - x\psi'(x) = \varphi(x) - x$$

και

$$\varphi(0) = 1, \quad \psi(0) = 0$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$(x+1)\varphi'(x) = (x+1)\varphi(x).$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι  $\varphi(x) = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι  $\psi(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $\varphi, \psi$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x + y = e + 1$ .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

### ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = x - \ln x$$

1. Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι κυρτή.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία  $y = ax + b$  ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - ax - b) = 0.$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να λύσετε την εξίσωση  $g(x) = 1$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε σημείο της γραφικής παράστασης της  $g$  που απέχει από το σημείο  $A(1, 0)$  ελάχιστη απόσταση.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει  $f(x) > 1$  και  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g \circ f$  είναι κυρτή.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

## ΘΕΜΑ 4

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

- $e^{-f(x)} f'(x) = 2 - f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $f(x) \neq 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

1. Ναδειχθεί ότι η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Ναδειχθεί ότι η  $f(x) < 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Ναμελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Ναμελετηθεί η  $f$  ως προς τα κοίλα-κυρτά και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία της  $\mathcal{C}_f$  με αρνητικές τετμημένες.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Δίνεται επιπλέον ότι η  $f$  έχει σύνολο τιμών το  $(-\infty, 2)$ .  
Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη και ότι ισχύει:

$$f^{-1}(x) = \int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u} du, \quad x \in (-\infty, 2)$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

---

Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.  
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.  
Καλή Επιτυχία