



Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση  
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά  
10 Απριλίου 2013

---

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

---

## ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

1. Να βρεθούν οι  $f'$ ,  $f''$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τα κοίλα-κυρτά και τα σημεία καμπής.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$  και τις ευθείες  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

## ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της  $g$  για  $x \rightarrow +\infty$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της  $g$  τέμνει την ασύμπτωτη της  $y = x$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x+3) - g(x+2) + g(x+1) - g(x))$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε σημείο της  $C_g$  που απέχει από το σημείο  $A(1, 0)$  ελάχιστη απόσταση.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 3

Για την συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνωστό ότι

- Είναι παραγωγίσιμη.
- Ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = 2x$$

για κάθε  $x$ .

1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το πρόσημο της  $f$

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την  $f^{-1}$ .

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $\mathcal{C}_f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 1$ .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να αποδείξετε ότι αν  $0 < \alpha < \beta$  τότε ισχύει:

$$\beta f(\alpha) > \alpha f(\beta)$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

## ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω

$$\varphi(x) = xe^{x^2}$$
$$F(x) = \int_{x-1}^x e^{t^2} dt$$

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις  $\varphi$ ,  $F$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η  $F$  είναι κυρτή.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 1$  ισχύει

$$(e - 1)(x - 1) + \int_0^1 e^{t^2} dt < F(x) < e^{x^2}$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-1}^x e^{t^2 - x^3} dt$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

---

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.  
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.  
Καλή Επιτυχία*