

ΖΗΤΗΜΑ 1

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = f(x)^{f(x)}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την g' .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $M(a, b)$ της \mathcal{C}_f στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της f στο a είναι ίσος με b .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ZHTHMA 2

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{3x - 2}}{x - 2} = k \in \mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το $f(2)$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Δίνεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της \mathcal{C}_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

(α') Να βρείτε το k .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(f(x)) - \sqrt{3f(x) - 2}}{x - 2}$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w τέτοιοι ώστε

- $zw = 1$
- Οι εικόνες των z, w και η αρχή O των αξόνων να σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφή ορθής γωνίας την O .

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z, w .

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι ο z^2 είναι φανταστικός.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $|z - w| = \sqrt{2}$ βρείτε το $|z|$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και αριθμοί γ, δ τέτοιοι ώστε $\alpha < \gamma < \delta < \beta$ και $f(\gamma) < f(\delta)$. Υποθέτουμε η f έχει την ιδιότητα:

$$(f(x) - f(\gamma))(f(x) - f(\delta)) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta]$$

1. Να αποδείξετε ότι τα $f(\gamma), f(\delta)$ είναι, αντιστοίχως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f .

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = \frac{\beta f(\gamma) + x f(\delta) - \alpha f(\delta) - x f(\gamma)}{\beta - \alpha}$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[\alpha, \beta]$.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g : [0, \delta - \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x + \gamma)$ έχει το ίδιο σύνολο τιμών με της f .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία*