

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ



ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

<http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr>

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
11 Απριλίου 2011

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Γεράσιμος Κουτσανδρέας, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα-κυρτά και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε για ποιά x ισχύει $f(f(x)) = x$.

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τον $a > 0$ αν είναι γνωστό ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ο αριθμός

$$a^t - t$$

ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{e}x + e(1-x) - e^{1-2x}$$

1. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς 0 και 1.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το πρόσημο της f .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον $x'x$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(0) = 1$
- $f'(-x) \cdot f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να αποδείξετε ότι

(α') $f'(0) = 0$

(β') Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R}

4+4 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(-x)}{f(x)}$

(α') Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

(β') Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

4+4 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Έστω $h(x) = \int_1^x f(t) dt$

(α') Να βρείτε το $\int_0^1 h(x) dx$

(β') Να λύσετε την εξίσωση $h(x) = h(2011)$

6+3 ΜΟΝΑΔΕΣ

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία*