

## ΖΗΤΗΜΑ 1

Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2, w$  ισχύει:

•  $z_1^2 = 3 + i$       •  $z_2^2 = 1 + 3i$       •  $w = \frac{z_1}{z_2}$

1. Να αποδείξετε ότι ο  $w$  δεν είναι πραγματικός

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Βρείτε το μέτρο του  $w$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{w-1}{w+1}$  είναι φανταστικός.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $v$  για τους οποίους ισχύει  $|v - z_1^2| = |v + z_2^2|$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό  $u$  ισχύει:

$$|u + w| + |u - w| \geq 2$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

## ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω  $f$  μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

1. Αν  $f(1) = f'(1) = 1$  να βρείτε την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης  $g(x) = f^2(x)$  όταν  $x = 1$ .

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{f(x)} - e^{f(a)}}{x - a} = f'(a) e^{f(a)}$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2) - f(0)}{h}$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $t > 1$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0$  ώστε

$$f(x_0) = \frac{(t+1)f(t+1) + (t-1)f(t-1)}{2t}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω συνεχής συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x$  ισχύει:

- $f(x) \geq 0$
- $(f \circ f)(x) = (x^2 + x + 1) f(x)$
- Η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα.

1. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x$  είναι  $4f(f(x)) \geq 3f(x)$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Υποθέτουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$ . Βρείτε το  $\ell$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

#### ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$h(x) = x \eta \mu \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad f(x) = \begin{cases} 3 - x - x h(x) & , x \neq 0 \\ 3 & , x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \qquad (\beta') \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \qquad (\beta') \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την παράγωγο της  $f$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Έστω  $(\varepsilon)$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $\mathcal{C}_f$  της  $f$  στο σημείο της  $A(0, 3)$  και  $M(\alpha, f(\alpha))$  ένα οποιοδήποτε κοινό σημείο της  $\mathcal{C}_f$  και της  $(\varepsilon)$ . Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha| \leq \frac{1}{\pi}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

---

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.  
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.  
Καλή Επιτυχία*