

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
27 Ιανουαρίου 2010

Διδάσκοντες:

Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ισχύει η ισοδυναμία

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$$

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω $z = 3 - 4i$. Να βρείτε:

(α') Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει $|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Τους μιγαδικούς w που έχουν μέτρο 10 και ισχύει $|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για μία συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

- $(f(x))^3 + x^2 f(x) = 2x(f(x))^2 + x^2 \eta \mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και είναι πραγματικός αριθμός

1. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Υπάρχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ το οποίο έχει τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + x \ln(\eta\mu x) - 2x \ln x}{x}$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την παράγωγο της f .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{4}{5}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{3}\right)$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ZΗΤΗΜΑ 4

Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f(1) = 0$

1. Να αποδείξετε ότι:

(α') Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Για κάθε $x \neq 1$ ισχύει $f(x) \neq 0$

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

(γ') Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(1, +\infty)$

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

(δ') Η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f(5 - 10x^3) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x) \right]$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[1-f(2)] \cdot x^4 + 5x^3 + 2}{x^3 + x - 2}$$

4 ΜΟΝΑΔΕΣ

*Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
Η εξέταση θα διαρκέσει τις 3 πρώτες διδακτικές ώρες.
Καλή Επιτυχία*