

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ



ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

<http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr>

Τάξη Γ', Θετική-Τεχνολογική Κατεύθυνση
Τρίωρο Επαναληπτικό Διαγώνισμα στα Μαθηματικά
27 Ιανουαρίου 2010

Διδάσκοντες:

Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

*Εκφωνήσεις - Απαντήσεις - Παρατηρήσεις*¹

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ισχύει η ισοδυναμία

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$$

2. Έστω $z = 3 - 4i$. Να βρείτε:

(α') Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει

$$|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$$

(β') Τους μιγαδικούς w που έχουν μέτρο 10 και ισχύει $|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 0$
 $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$

2. (α') Από το προηγούμενο ερώτημα θα είναι $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0$ οπότε αν ονομάσουμε $w = x + yi$ είναι $z\bar{w} = (3 - 4i)(x - yi) = 3x - 4y - (3y + 4x)i$ και αφού το πραγματικό μέρος του $z\bar{w}$ είναι μηδέν θα ισχύει

$$3x - 4y = 0 \quad (1)$$

και ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w είναι η ευθεία με εξίσωση (1).

(β') Οι ζητούμενοι μιγαδικοί $w = x + yi$ ικανοποιούν την (1) αλλά και την

$$x^2 + y^2 = 100 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $x = \pm 8, y = \pm 6$ και επομένως οι μιγαδικοί είναι οι $w = \pm 8 \pm 6i$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για μία συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

- $(f(x))^3 + x^2 f(x) = 2x(f(x))^2 + x^2 \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και είναι πραγματικός αριθμός

1. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$

2. Υπάρχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ το οποίο έχει τεμημένη που ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$.

3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + x \ln(\eta\mu x) - 2x \ln x}{x}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Για $x \neq 0$ από την δοθείσα σχέση αν διαιρέσουμε με x^3 προκύπτει:

$$\frac{(f(x))^3 + x^2 f(x)}{x^3} = \frac{2x(f(x))^2 + x^2 \eta\mu 2x}{x^3}$$

οπότε έχουμε

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \frac{f(x)}{x} = 2\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \frac{\eta\mu 2x}{x}$$

Ας ονομάσουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = t$. Τότε παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 2$ βρίσκουμε $t^3 + t = 2t^2 + 2$ από τη οποία έχουμε $t^3 + t - 2t^2 - 2 = 0$ και $(t - 2)(t^2 + 1) = 0$ οπότε τελικά $t = 2$.

2. Η δοθείσα σχέση γράφεται $(f(x))^3 - 2x(f(x))^2 + x^2 f(x) = x^2 \eta\mu 2x$ ή αλλιώς $f(x)(f(x) - x)^2 = x^2 \eta\mu 2x$. Θέτοντας $x = 1$ και $x = 2$ βρίσκουμε

$$f(1)(1 - f(1))^2 = \eta\mu 2$$

$f(2)(2 - f(2))^2 = 4\eta\mu 4$ Είναι $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ και επομένως $\eta\mu 2 > 0$ και $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$ οπότε $\eta\mu 4 < 0$. Τα $f(1), f(2)$ είναι ομόσημα με τα $\eta\mu 2, \eta\mu 4$ άρα ετερόσημα. Από το θεώρημα του Bolzano συμπεραίνουμε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

¹ Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης (Ευχαριστώ τον συνάδελφο Νικόλαο Ζήση για την βοήθεια).

$$\begin{aligned}
3. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + x \ln(\eta \mu x) - 2x \ln x}{x} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} + \ln(\eta \mu x) - 2 \ln x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} + \ln \left(\frac{\eta \mu x}{x^2} \right) \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} + \ln \left(\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) \right) = \color{red}{+\infty}
\end{aligned}$$

ZHTHMA 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
2. Να βρείτε τα x_0 στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.
3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{4}{5}, f\left(\frac{4}{5}\right)\right)$.
4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{3}\right)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2-\sqrt{1-x^2}^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{2} = f(0)$
Επομένως η f είναι συνεχής.
2. Στα διαστήματα $(-1, 0)$, $(0, 1)$ η f είναι παραγωγίσιμη από τους κανόνες παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Τα σημεία $-1, 0, 1$ πρέπει να τα εξετάσουμε χωριστά.

$x_0 = -1$ Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}-1}{x+1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1-x^2)-\sqrt{1-x^2}}{x^2(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1-x^2)^2-\sqrt{1-x^2}^2}{x^2(x+1)((1-x^2)+\sqrt{1-x^2})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(x-1)(x+1)}{x^2(x+1)((1-x^2)+\sqrt{1-x^2})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{(1-x^2)+\sqrt{1-x^2}} = -\infty
\end{aligned}$$

Άρα δεν παραγωγίζεται στο -1 .

$$\begin{aligned}
\boxed{x_0 = 1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}-1}{x-1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2(x-1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x^2)-\sqrt{1-x^2}}{x^2(x-1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x^2)^2-\sqrt{1-x^2}^2}{x^2(x-1)((1-x^2)+\sqrt{1-x^2})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)((1-x^2)+\sqrt{1-x^2})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{(1-x^2)+\sqrt{1-x^2}} = +\infty
\end{aligned}$$

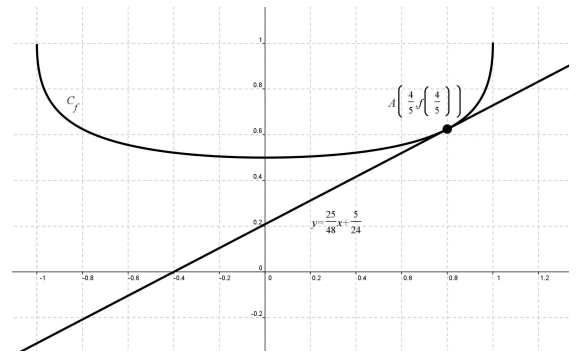
άρα δεν παραγωγίζεται στο 1 .

$$\boxed{x_0 = 0} \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}-\frac{1}{2}}{x} = \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-x^2-2\sqrt{1-x^2}}{2x^3} \stackrel{(x^2=u)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2-u-2\sqrt{1-u}}{2\sqrt{u}^3} = \\
\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{2\sqrt{u}^3(2-u+2\sqrt{1-u})} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{u}}{2(2-u+2\sqrt{1-u})} = 0$$

επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με παράγωγο 0 .

3. Εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγωγίσιμων και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \right)' = \frac{(1-\sqrt{1-x^2})'x^2 - (x^2)'(1-\sqrt{1-x^2})}{x^4} = \\
&\dots = \frac{2-x^2-2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}x^3} \text{ οπότε } f'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{48}. \text{ Επομένως} \\
&\text{αφού } f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{5}{8} \text{ η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι} \\
&y - f\left(\frac{4}{5}\right) = f'\left(\frac{4}{5}\right) \left(x - \frac{4}{5}\right) \\
&\text{δηλαδή } y - \frac{5}{8} = \frac{25}{48} \left(x - \frac{4}{5}\right) \\
&\text{που μπορεί να πάρει και τη μορφή:} \\
&y = \frac{25}{48}x + \frac{5}{24}
\end{aligned}$$



4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{3}\right)$. Αφού $x \in [-1, 1]$ για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει

- $-1 \leq x \leq 1$
- $-1 \leq x + \frac{1}{3} \leq 1$

οι ανισώσεις αυτές συναληθεύουν για $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$ επομένως η συνάρτηση g ορίζεται στο διάστημα $[-1, \frac{2}{3}]$. Η g είναι συνεχής και $g(-1)g\left(\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{5}\right)\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{5}\right) = \frac{-35+15\sqrt{5}}{8} = \frac{5(-7+3\sqrt{5})}{8} < 0$. Επομένως από το θεώρημα του Bolzano η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1, \frac{2}{3}]$ άρα και στο \mathbb{R} .

ZHTHMA 4

Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f(1) = 0$

1. Να αποδείξετε ότι:

- (α') Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
- (β') Για κάθε $x \neq 1$ ισχύει $f(x) \neq 0$

- (γ') Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x' στο διάστημα $(1, +\infty)$
 (δ') Η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f(5 - 10x^3) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x) \right]$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[1-f(2)] \cdot x^4 + 5x^3 + 2}{x^3 + x - 2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. (α') Για να αποδείξουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι 1-1. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε θα είναι και $e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$. Άρα $f(x_1) + e^{f(x_1)} = f(x_2) + e^{f(x_2)}$. Αλλά είναι $f(x_1) + e^{f(x_1)} = 5 - 4x_1$ και $f(x_2) + e^{f(x_2)} = 5 - 4x_2$ επομένως $5 - 4x_1 = 5 - 4x_2$ από την οποία προκύπτει ότι $-4x_1 = -4x_2$ και τελικά $x_1 = x_2$.
- (β') Αφού η f είναι 1-1 τότε για $x \neq 1$ θα είναι $f(x) \neq f(1)$ δηλαδή $f(x) \neq 0$ αφού δίνεται πως $f(1) = 0$.
- (γ') Έστω ότι $x \in (1, +\infty)$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x) < 0$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει και ότι είναι $f(x) \geq 0$. Τότε θα είναι $f(x) + e^{f(x)} \geq 0 + e^0$ δηλαδή $f(x) + e^{f(x)} \geq 1$. Αυτό σημαίνει ότι $5 - 4x \geq 1$ και επομένως $x \leq 1$ πράγμα αδύνατο αφού έχουμε υποθέσει ότι $x > 1$. Άρα τελικά ισχύει $f(x) < 0$.
- (δ') Η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f(5 - 10x^3) = 0$ γράφεται $(f \circ f)(x) = f(5 - 10x^3)$ η οποία, επειδή η f είναι 1-1, ισοδυναμεί με την $f(f(x)) = f(5 - 10x^3)$. Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f(f(x)) =$

$f(5 - 10x^3)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα. Έχουμε $g(0) = f(0) - 5 + 0 = -5$ και $g(1) = f(1) - 5 + 10 = f(1) + 5$. Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $f(1) + 5 > 0$ δηλαδή ότι $f(1) > -5$. Πράγματι αν ήταν $f(1) \leq -5$ θα είχαμε $f(1) + e^{f(1)} \leq -5 + e^{-5} < -4$ πράγμα αδύνατο αφού είναι $f(1) + e^{f(1)} = 1$

Μία άλλη προσέγγιση για τα ερωτήματα (β),(γ): Ονομάζουμε $h(x) = x + e^x$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα επομένως 1-1 άρα αντιστρέψιμη. Η αντίστροφη της είναι επίσης γνησίως αύξουσα: Πράγματι αν υποτεθεί ότι y_1, y_2 είναι από το σύνολο τιμών της h με $y_1 < y_2$ τότε αποκλείονται οι περιπτώσεις $h^{-1}(y_1) = h^{-1}(y_2)$ και $h^{-1}(y_1) > h^{-1}(y_2)$ αφού δίνουν $h(h^{-1}(y_1)) = h(h^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2$ και $h(h^{-1}(y_1)) > h(h^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1 > y_2$ άρα απομένει αναγκαστικά η $h^{-1}(y_1) < h^{-1}(y_2)$. Η δοθείσα σχέση $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$ γράφεται $h^{-1}(f(x)) = h^{-1}(5 - 4x)$ και εύκολα διαπιστώνεται, κατά τα γνωστά, ότι η σύνθεση $h^{-1}(5 - 4x)$ είναι γνησίως φθίνουσα αφού η h^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και η $5 - 4x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα και η f είναι γνησίως αύξουσα

- Όπως πριν αφού $f(0) = 0$ για $x \neq 0$ θα είναι $f(x) \neq 0$ (ερώτημα (β))
- Με $x > 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$ άρα η $f(x)$ είναι αρνητική για $x > 0$ (ερώτημα (γ))

2. (α') Αφού η f είναι συνεχής το όριο της στο 0 θα είναι ίσο με την τιμή της στο 0 δηλαδή 0. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x) \right] =_{(f(x)=u)} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[1-f(2)] \cdot x^4 + 5x^3 + 2}{x^3 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[1-f(2)] \cdot x^4}{x^3} =_{f(2) < 0} -\infty$$