
ΤΑΞΗ Γ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
2ο Τρίωρο Διαγώνισμα
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2006-2007
Καθηγητές: Σπυρίδων Αμούργης, Γεώργιος Θεοχάρης,
Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 8x + 12}{9}$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία:

(α) Η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β) Η f είναι κυρτή ή κοίλη.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν $x > 4$ τότε είναι $f(x) > -4$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να μελετήσετε ως προς το πρόσημο την f .

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό x ισχύει:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Για τις συναρτήσεις u, g, f που είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} είναι $u(0) = 2$, $f(0) = \frac{1}{2}$ και για κάθε x ισχύει

- $u'(x) + u(x) = 1$
- $g(x) = u(x)e^x - e^x$
- $-f'(x) + f(x) = f^2(x)$
- $f(x) \neq 0$

1. Να αποδείξετε ότι g είναι σταθερή.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει

$$u(x) = \frac{1 + e^x}{e^x}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' + \left(\frac{1}{f(x)}\right) = 1$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(0) = 1$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Θεωρούμε τα σημεία $A(0, f(0))$, $B(1, f(1))$ και ονομάζουμε:

- (ε) την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A .
- (ζ) την ευθεία που διέρχεται από τα A, B .

Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της C_f του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$ βρίσκεται κάτω από την (ε) και πάνω από την (ζ) .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\ln 2}{2} < E < \frac{1}{2}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ