
ΤΑΞΗ Γ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
2ο Τρίωρο Διαγώνισμα
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2005-2006
Καθηγητές: Σπυρίδων Αμούργης, Γεώργιος Θεοχάρης,
Γεράσιμος Κουτσανδρέας, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \ln x$$

1. Να βρείτε το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής για τη συνάρτηση $g'(x)$ στο διάστημα $[1, 2]$.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2.
 - Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να μελετήσετε την g ως προς τα κοίλα-κυρτά και τα σημεία καμπής.και να συνοψίσετε τα συμπεράσματά σας σε ένα κατάλληλο πίνακα.

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 3^x, \quad g(x) = x$$

και έστω φ η διαφορά τους

$$\varphi(x) = 3^x - x$$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να υπολογίσετε το το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}$$

έχει ασύμπτωτη για $x \rightarrow +\infty$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = 1 + \int_{x+1}^{2x} \frac{f(t-x)}{x} dt$$

για κάθε $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

1. Η f είναι παραγωγίσιμη.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Ο τύπος της f είναι

$$f(x) = \ln x + 1$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Για κάθε τριάδα αριθμών α, β, γ με $0 < \alpha < \beta < \gamma$ ισχύει:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- Για κάθε $x > 0, y > 0$ ισχύει

$$f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $f'(1) = 1$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(xh) - f(x)}{xh - x} = \frac{2f(x)}{x} + x$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) = x^2 \ln x$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ