

---

ΤΑΞΗ Γ  
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΤΘΥΝΣΗ  
1ο Τρίωρο Διαγώνισμα  
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2005-2006  
Καθηγητές: Σπυρίδων Αμούργης, Γεώργιος Θεοχάρης,  
Γεράσιμος Κουτσανδρέας, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

**ΖΗΤΗΜΑ 1**

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + 3\beta x - 5}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases} \quad \text{με } \alpha < 0$$

1. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής.

(α') Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

**ΖΗΤΗΜΑ 2**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = x + yi$  και  $w = \frac{z-2i}{z+1}$ ,  $z \neq -1$ .

1. (α') Να λύσετε ως προς  $z$  την εξίσωση  $w = 1 + 2i$ .

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β') Έστω  $A, B$  και  $M$  οι εικόνες των μιγαδικών  $-1, 2i$  και  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι

$$|w| = \frac{(MB)}{(MA)}$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z = x + yi$  στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στον κύκλο με κέντρο  $A(-1, 0)$  και ακτίνα  $\rho = \frac{\sqrt{5}}{2}$  να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $w$ .

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 3

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1) - 7}{x-1} = 10$$

1. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha') f(3) = 7$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

$$(\beta') f'(3) = 5$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω  $\varepsilon$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $M(3, f(3))$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η  $\varepsilon$  έχει εξίσωση  $y = 5x - 8$ .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β) Ένα σημείο  $\Sigma$ , που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία  $\varepsilon$ . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

### ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνεχής περιττή συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  η εξίσωση

$$f(x) = \alpha$$

έχει λύση.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της  $f$ ;

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Υποθέτουμε ότι για μία συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η συνάρτηση  $g \circ f$  είναι 1-1.

(α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β) Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι 1-1.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ