
ΤΑΞΗ Γ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΤΘΥΝΣΗ
1ο Τρίωρο Διαγώνισμα
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2003-2004
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 1$$

1. Αν $\operatorname{Re}(z) = 1$ βρείτε τον z .

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z .

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο του $\frac{1}{z}$;

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Τα σημεία A, B κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy και η θέση τους κατά την χρονική στιγμή t είναι $A(x(t), 0), B(0, y(t))$, όπου $x(t), y(t)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Έστω ότι η απόσταση τους κατά την χρονική στιγμή t είναι $d(t) = (AB)$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει

$$d(t) d'(t) = x(t) x'(t) + y(t) y'(t)$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Στην ειδική περίπτωση όπου $x(t) = 2t, y(t) = t^2$:

(α) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή είναι $d(t) = 4\sqrt{2}$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

- (β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του $d(t)$ κατά την χρονική στιγμή του παραπάνω ερωτήματος.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και ισχύει

$$f(x) - g(x) = 2x^3 + 3$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ στα σημεία $A(0, f(0)), B(0, g(0))$ δεν έχουν κοινό σημείο.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να λύσετε την εξίσωση $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & , \quad x = -\frac{\pi}{2} \\ f(\varepsilon\varphi x) & , \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \beta & , \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

είναι συνεχής.

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε το σύνολο τιμών της f περιέχεται σε κάποιο κλειστό διάστημα.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

Καλή Επιτυχία