

---

ΤΑΞΗ Γ  
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ  
Διαγώνισμα στους Μιγαδικούς Αριθμούς  
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2011-2012  
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Για δύο μιγαδικούς  $z_1, z_2$  να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

2. Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  είναι γνωστό ότι  $|z| = |w| = 1$  και  $|z + w| = \sqrt{3}$ .

(α') Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $0, z, w$  είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

(β') Να αποδείξετε ότι  $z^2 + w^2 = zw$ .

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω  $\mathcal{L}$  ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$\operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = -3\operatorname{Im}(z) \quad (1)$$

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο  $\mathcal{L}$ .
2. Σε κάθε  $z$  που ικανοποιεί την (1) και είναι διάφορος του  $\frac{1}{2}$  αντιστοιχούμε τον μιγαδικό

$$w = \frac{2}{2z - 1}$$

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του  $w$ .

---

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

ΖΗΤΗΜΑ 1,1: Σχολικό βιβλίο Α9, σελ. 101  
ΖΗΤΗΜΑ 2,1: Σχολικό βιβλίο Β9 β) σελ. 97