



Τμήματα Γ Θετική, Γ2 Τεχνολογική
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8
26 Μαρτίου 2009

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι:

$$\int_1^4 f(x)dx = 9$$

$$\int_3^4 f(x)dx = 11 \text{ και}$$

$$\int_1^8 f(x)dx = 13$$

1. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

$$(\alpha') \int_4^3 f(x)dx$$

$$(\beta') \int_4^8 f(x)dx$$

2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 f(3x + 1) dx$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου S του διπλανού σχήματος:

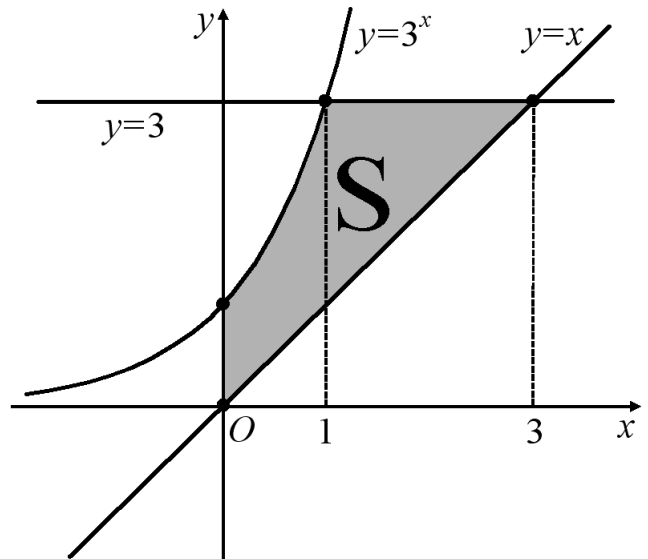
2. Για την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 16}, \quad x \in [0, 2]$$

δίνεται ότι:

- Η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(2, 3)$
- Η C_f περιέχεται στο χωρίο S του ερωτήματος 1.

Να βρείτε τα εμβαδά των χωρίων στα οποία η C_f χωρίζει το S .



Καλή Επιτυχία

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 333, Α1.

2. Στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(3x + 1) dx$ θετούμε $3x + 1 = u$ οπότε $\frac{1}{3}du = dx$ και για τα άκρα έχουμε:

x	u
0	1
1	4

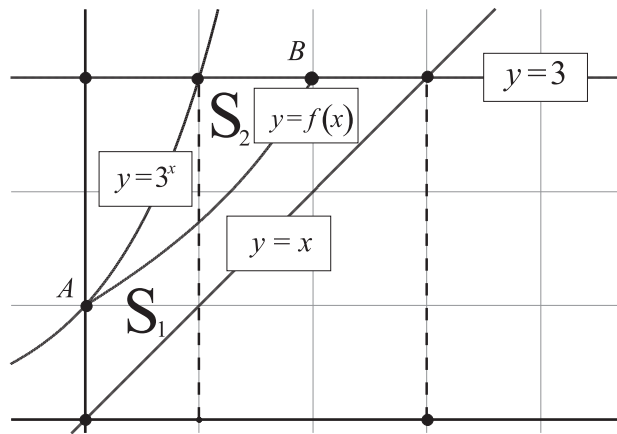
επομένως:

$$\int_0^1 f(3x+1) dx = \int_1^4 \frac{1}{3} f(u) du = \frac{1}{3} \int_1^4 f(u) du = \frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx = \frac{9}{3} = 3$$

ZΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 350, B6.
2. Βρίσκουμε πρώτα τα a, b . Έχουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(2) = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{a \cdot 0 + b}{0^2 - 16} = 1 \\ \frac{a \cdot 2 + b}{2^2 - 16} = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a = -16 \\ b = -10 \end{array} \right\}$$



Επομένως $f(x) = \frac{-10x-16}{x^2-16}$. Επειδή θα χρειασθεί να ολοκληρώσουμε την f την αναλύουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων δηλαδή βρίσκουμε A, B ώστε

$$\frac{-10x-16}{x^2-16} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4}$$

δηλαδή

$$-10x-16 = A(x+4) + B(x-4)$$

Δίνοντας στο x τις τιμές 0 και 1 έχουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} 4A - 4B = -16 \\ 5A - 3B = -26 \end{array} \right\}$$

από το οποίο βρίσκουμε $A = -7$ και $B = -3$. Επομένως $f(x) = -\frac{7}{x-4} - \frac{3}{x+4}$ και τα ζητούμενα εμβαδά είναι

$$S_1 = \int_0^2 \left(-\frac{7}{x-4} - \frac{3}{x+4} - x \right) dx + \int_2^3 (3-x) dx = 10 \ln 2 - 3 \ln 3 - \frac{3}{2}$$

$$S_2 = \int_0^1 \left(3^x + \frac{7}{x-4} + \frac{3}{x+4} \right) dx + \int_1^2 \left(3 + \frac{7}{x-4} + \frac{3}{x+4} \right) dx = \frac{2}{\ln 3} + 3 \ln 3 - 10 \ln 2 + 3$$

$$\Delta\text{ΟΚΙΜΗ } (10 \ln 2 - 3 \ln 3 - \frac{3}{2}) + (\frac{2}{\ln 3} + 3 \ln 3 - 10 \ln 2 + 3) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\ln 3}$$