
ΤΑΞΗ Γ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
Διαγώνισμα στις Παραγώγους
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2005-2006
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

1. Να βρείτε τις τιμές των α, β και να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.
2. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε στο ερώτημα 1. και για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ισχύει

- $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$
- $f(-1) = -1$
- $f(1) = 1$

1. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$, $[0, 1]$, ή με άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
2. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α5 σελ. 268
2. Από τον πίνακα μεταβολής βρίσκουμε ότι $f((-\infty, -1]) = (-\infty, 3]$, $f([-1, 1]) = [-1, 3]$ και $f([1, +\infty)) = [-1, +\infty)$. Επομένως:
 - Για $\lambda < -1$ η εξίσωση έχει 1 λύση
 - Για $\lambda = -1$ η εξίσωση έχει 2 λύσεις
 - Για $-1 < \lambda < 3$ η εξίσωση έχει 3 λύσεις
 - Για $\lambda = 3$ η εξίσωση έχει 2 λύσεις
 - Για $\lambda > 3$ η εξίσωση έχει 1 λύση

ZΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β6 σελ. 250
2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0$. Αποδεικνύεται ότι αφού $g'(x) \leq 0$ η g είναι φθίνουσα. Η απόδειξη γίνεται με το θεώρημα μέσης τιμής όπως ακριβώς γίνεται και για την περίπτωση όπου η παράγωγος είναι αρνητική. Άρα για κάθε x με $-1 \leq x \leq 1$ θα είναι $g(-1) \leq g(x) \leq g(1)$ δηλαδή $0 \leq g(x) \leq 0$. Άρα $g(x) = 0$ για κάθε x και επομένως είναι

$$f(x) = x, \quad \text{για κάθε } x$$