
ΤΑΞΗ Γ'
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
Διαγώνισμα στους Μιγαδικούς Αριθμούς
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2005-2006
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η εξίσωση

$$x + \frac{1}{x} = 1 \quad (1)$$

1. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση (1).
2. Έστω z μία οποιαδήποτε ρίζα της εξίσωσης (1).
 - (α') Να αποδείξετε ότι ισχύει $z^3 = -1$.
 - (β') Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$z^0 + z^9 + z^{18}$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει:

$$\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \quad (2)$$

2. Έστω \mathcal{S} το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους η σχέση (2) ισχύει σαν ισότητα.
 - (α') Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών $z \in \mathcal{S}$.
 - (β') Έστω $z \in \mathcal{S}$ διάφορος του 0. Να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί \bar{z} και $\frac{1}{z}$ επίσης ανήκουν στο \mathcal{S} .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

ΖΗΤΗΜΑ 1,1: Σχολικό βιβλίο A13 γ) σελ. 96
ΖΗΤΗΜΑ 2,1: Σχολικό βιβλίο B1 σελ. 101