

3ο ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΑΣ ΣΜΥΡΝΗΣ	Τάξη Γ'	Τεχνολογική Κατεύθυνση
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5	17 Δεκ. 2002	Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	ΒΑΘΜΟΣ:	

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 5x^3 - 2x + 1$.

1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. (α') Έστω $y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y)$.
(β') Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R} .

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{f(x)} = +\infty$$

1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
2. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Καλή Επιτυχία

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186, Α1, ii)
2. (α') Είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Επομένως και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - y) = \pm\infty$
(β') Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε $y \in \mathbb{R}$ είναι τιμή της f . Θεωρούμε $y \in \mathbb{R}$ και την συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$. Από το προηγούμενο ερώτημα το όριο της g στο $-\infty$ είναι $-\infty$ και το όριο της g στο $+\infty$ είναι $+\infty$. Επομένως θα υπάρχουν x_1, x_2 τέτοιοι ώστε $g(x_1) > 0, g(x_2) < 0$. Είναι $x_1 \neq x_2$ και αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano στο διάστημα με άκρα x_1, x_2 συνάγουμε ότι η g θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 . Θα είναι $g(x_0) = y$ και επομένως ο y είναι τιμή της f .

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 182, Β4, i).
2. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot 1 = 0$