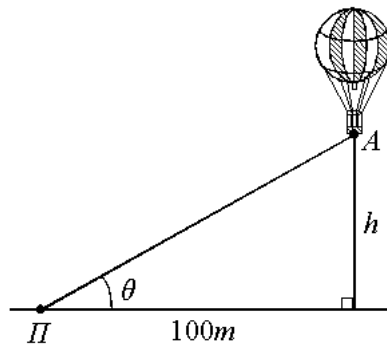

ΤΑΞΗ Γ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
Διαγώνισμα στις Παραγώγους
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2000-2001
Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση $100m$ από ένα παρατηρητή Π με ταχύτητα $50m/min$.



1. Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος $100m$.
2. Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η απόσταση ΑΠ την ίδια χρονική στιγμή με εκείνη του ερωτήματος 1.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Η παράγωγος μίας συνάρτησης f είναι

$$f'(x) = 3(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$$

1. Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;
2. Να αποδείξετε ότι η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α4 σελ. 244

2. Αν ονομάσουμε $d(t)$ την απόσταση ΑΠ κατά την χρονική στιγμή t και $h(t)$ τούψος του αερόστατου πάλι κατά την χρονική στιγμή t έχουμε ότι:

$$d'(t) = \frac{h(t) h'(t)}{\sqrt{100^2 + h^2(t)}}$$

Κατά την χρονική στιγμή t_0 οπότε $h(t_0) = 100$ είναι $d'(t_0) = \frac{100 \cdot 50}{\sqrt{100^2 + 100^2}} = 25\sqrt{2} \frac{m}{sec}$

ZΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α1 σελ. 267
2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση μας έχει δύο ή περισσότερες ρίζες στο διάστημα $[1, 2]$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θεωρούμε $\rho_1 < \rho_2$ δύο από αυτές τις ρίζες. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} άρα και στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Επομένως είναι και συνεχής σε αυτό. Ακόμη αφού τα ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες θα ισχύει $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Άρα η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Θα πρέπει λοιπόν να ικανοποιεί και το συμπέρασμα δηλαδή η f' να έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ στο (ρ_1, ρ_2) . Αλλά αφού οι ρ_1, ρ_2 περιέχονται στο διάστημα $[1, 2]$ θα πρέπει και η ρίζα ξ να περιέχεται στο $[1, 2]$. Αλλά η f' έχει μοναδικές ρίζες τις 1, 2, 3 και καμμία μεταξύ των 1 και 2 (άτοπο).