

---

## ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΤΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

---

ΤΑΞΗ Γ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

---

Οι σημειώσεις αυτές είναι για σχολική χρήση. Μπορούν να αναπαραχθούν και να διανεμηθούν ελεύθερα αρκεί να μην αλλάξει η μορφή τους. Για τον περιορισμό, των αναπόφευκτων, λαθών υπόκεινται σε συνεχείς διορθώσεις. Διανέμονται ως έχουν και ο συντάκτης τους δε φέρει καμία ευθύνη για τυχόν προβλήματα που ανακύψουν από τη χρήση τους.

---

18 Σεπτεμβρίου 2010

Στοιχειοθετήθηκαν με το L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

## 1 Συναρτήσεις

### 1.1 Συναρτήσεις: Γενικά

1. Στην ισότητα  $2x + 3y = 4$  να εκφράσετε το  $y$  συναρτήσει του  $x$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

2. Στην ισότητα  $x(y + 2) = 2xy - 1$  να εκφράσετε το  $y$  συναρτήσει του  $x$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = \frac{2x+1}{x}$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α')  $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

(β')  $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α')  $\mathcal{D}_f = (-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$

(β')  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

4. Για την συνάρτηση  $f$  είναι γνωστό ότι

- Έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$
- Είναι γνησίως αύξουσα.

Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο από τα  $<, >$  τις παρακάτω σχέσεις:

(α')  $f(1) \dots f(4)$

(β')  $f(2) \dots f(\sqrt{2})$

(γ')  $f(\frac{1}{2}) \dots f(0)$

(δ')  $f(x+1) \dots f(x+2)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $<$  (β')  $>$  (γ')  $>$  (δ')  $<$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α')  $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 3 \ln x + 2}$

(β')  $g(x) = \ln \frac{2e^x - 1}{x+2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α')  $(0, e] \cup [e^2, +\infty)$

(β')  $(-\infty, -2) \cup (-\ln 2, +\infty)$

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + x - 1$ . Να βρείτε για ποια  $x$  ισχύει  $f(x) = 11$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $x = -4, x = 3$

7. Ένα διαγώνισμα του 2001. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 3x^2 + 2}$$

- (α') Να καθορίσετε το πεδίο ορισμού της  $\mathcal{D}_f$ .



(β') Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $K(2, f(2))$ ,  $\Lambda(3, f(3))$ .

8. Ένα διαγώνισμα του 2001. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 1}$$

(α') Να καθορίσετε το πεδίο ορισμού της  $\mathcal{D}_f$ .

(β') Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x, x+1 \in \mathcal{D}_f$  με ισχύει

$$f^2(x+1) - f^2(x) = 2x + 5$$

9. Έστω η συνάρτηση  $g(x) = x - \frac{2}{x}$ . Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

(α')  $xg(x) - x^2 = -2$

(β')  $g\left(\frac{1}{x}\right) + g(x) = -\frac{1}{x} - x$

10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $y = ax + b$  στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α') Διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(-3, 1)$

(β') Διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  και είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = 2x + 5$

(γ') Διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  και είναι κάθετη προς την ευθεία  $y = 2x + 5$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α')  $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

(β')  $y = 2x$

(γ')  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \sqrt{x}$ .

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

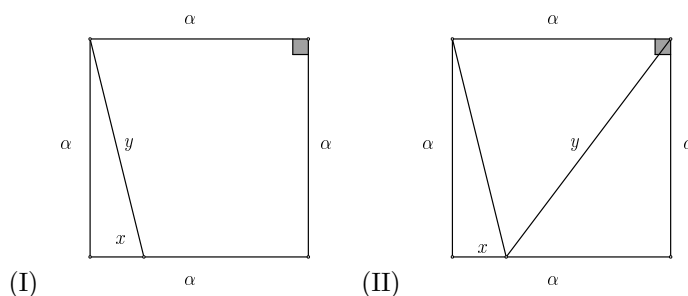
(β') Να επαληθεύσετε την ισότητα  $\frac{f(x^2)}{|x|} = |x| + 1$ .

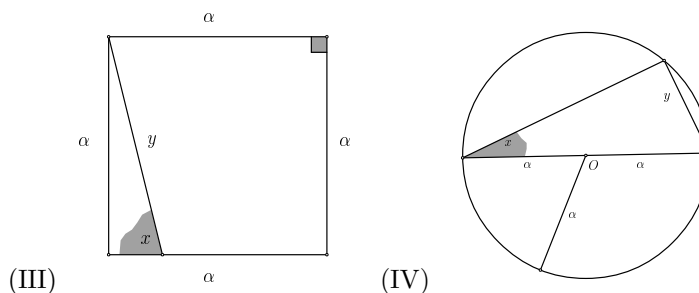
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $[0, +\infty)$

12. Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^2 + x - 1$ . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A(1, f(1))$ ,  $B(-3, f(-3))$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = -x + 2$

13. Στα επόμενα σχήματα να εκφράσετε το  $y$  συναρτήσει του  $x$ .





ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (I)  $y = \sqrt{\alpha^2 + x^2}$ , (II)  $y = \sqrt{x^2 - 2\alpha x + 2\alpha^2}$  (III)  $y = \frac{\alpha}{\eta\mu x}$  (IV)  $y = 2\alpha\eta\mu x$

14. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\mathcal{D}_f = \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right] \cup [1, +\infty)$

15. Έστω  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . Να αποδείξετε ότι αν  $\ln a + \ln b = 0$  τότε ισχύει  $f(a) = f(b)$ .

16. Για την συνάρτηση  $f$  είναι γνωστό ότι:

- Είναι γνησίως αύξουσα.
- Έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

(α') Έστω ότι  $f(x_1) < f(x_2)$ . Τότε θα είναι και  $x_1 < x_2$ . Γιατί;

(β') Να βρείτε όλα τα  $x$  για τα οποία ισχύει  $f\left(\frac{x+1}{x+2}\right) < f\left(\frac{x-4}{x+7}\right)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (β')  $x < -7$  ή  $-2 < x < -\frac{3}{2}$ .

17. Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$ . Έστω ακόμη  $s, d$  το άθροισμα και η διαφορά τους. Αν  $s(5) = 3$  και  $d(5) = 2$  βρείτε τα  $f(5), g(5)$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $s(5) = \frac{5}{2}, d(5) = \frac{1}{2}$

18. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$g(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $A(0, 1), B\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4}\right)$

19. Για ποιές τιμές των  $\alpha, \beta$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$  διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, 9)$  και  $B(2, 6)$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\alpha = 3, \beta = -4$

20. Μία λίμνη μολύνεται από διαρροή τοξικού υγρού. Η ποσότητα, σε λίτρα,  $\varphi(t)$  εισρεύσει στη λίμνη μετά πάροδο χρόνου  $t$  ωρών είναι:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{2t}{5-t} & \alpha\nu \quad t \leq 4 \\ 10t - 32 & \alpha\nu \quad t > 4 \end{cases}$$

Η διαρροή διήρκεσε 10 ώρες.



- (α') Να υπολογίσετε πόσα λίτρα τοξικού υγρού διοχετεύθηκαν στη λίμνη.  
 (β') Να βρείτε ποια χρονική στιγμή  $t_0$  υπήρχαν στη λίμνη 8 λίτρα τοξικού υγρού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

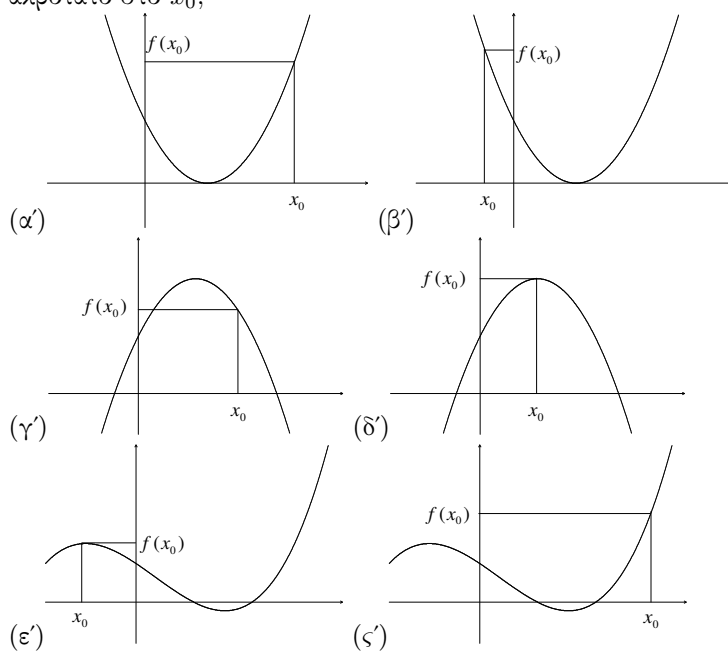
(α') 68 λίτρα

(β')  $t_0 = 4$

21. Είναι  $g(x) = x + \alpha \ln x$  και  $g(e) = 7$ . Να βρείτε το  $g(e^2)$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $e^2 - 2e + 14$

22. Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$ . Σε ποιές περιπτώσεις μπορούμε να πούμε ότι η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ ;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στις (δ') και (ε')

23. Έστω μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

- (α') Να αποδείξετε ότι αν  $x_1 < x_2$  και ο αριθμός  $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$  είναι θετικός τότε θα είναι και  $f(x_1) < f(x_2)$ .  
 (β') Να αποδείξετε ότι αν για κάθε ζεύγος  $x_1 \neq x_2$  ισχύει  $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  τότε η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

24. Να απλοποιήσετε τους τύπους των παρακάτω συναρτήσεων

$$(\alpha') f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} \quad (\beta') g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3} \quad (\gamma') h(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{-4x^2 - 4x + 8}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:



$$(\alpha') f(x) = x^2 + 4$$

$$(\beta') g(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

$$(\gamma') h(x) = -\frac{x-3}{2(x-1)}$$

25. Έστω η συνάρτηση  $\varphi(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 2x$ .

( $\alpha'$ ) Να υπολογίσετε το  $\varphi(0)$

( $\beta'$ ) Να υπολογίσετε το  $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$

( $\gamma'$ ) Να υπολογίσετε το  $\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') 1$$

$$(\beta') \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\gamma') 0$$

26. Έστω η συνάρτηση  $\varphi(x) = \sqrt{1 - \ln(x-2)}$ .

( $\alpha'$ ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

( $\beta'$ ) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  το σημείο  $M(\lambda, 3)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

( $\gamma'$ ) Να αποδείξετε ότι  $\varphi\left(2 + e^{1-x^2}\right) = x$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') (2, e+2]$$

$$(\beta') \lambda = e^{-8} + 2$$

## 1.2 Όρια Συναρτήσεων

27. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+2}$$

$$(\gamma') \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+2}$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+1}{x+2}$$

$$(\delta') \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x+1}{x+2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') \frac{3}{4}$$

$$(\beta') \frac{6}{7}$$

$$(\gamma') 0$$

$$(\delta') \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

28. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

$$(\gamma') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \frac{1}{x}}{3x - x^2 - 2}$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{-5x^2 + 9x - 4}$$

$$(\delta') \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}}{x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') -\frac{1}{2}$$

$$(\beta') -3$$

$$(\gamma') 2$$

$$(\delta') -\frac{11}{3}$$

29. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:



$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3+x-2}$$

$$(\gamma') \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^5+3x^4+x+3}{x^3-x^2+2x-8}$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-x^2+2x-8}$$

$$(\delta') \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^3-8}{x^2-1}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') \frac{1}{4}$$

$$(\beta') \frac{7}{10}$$

$$(\gamma') 0$$

$$(\delta') 6$$

30. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2+7} - x + 1)$$

$$(\gamma') \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9-x}$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3}$$

$$(\delta') \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x-5}-2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') 2$$

$$(\beta') 0$$

$$(\gamma') -\frac{1}{6}$$

$$(\delta') \frac{2}{3}$$

31. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$(\alpha') \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)$$

$$(\beta') \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') 1$$

$$(\beta') \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

32. Για ποιά τιμή του  $\alpha$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^3+x-\alpha x^2-\alpha}{x^2-\alpha^2} = 5$ ;ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\alpha = 5 \pm 2\sqrt{6}$ 33. Για την συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο 2 και ότι  $f(2) =$ 

$$5. \text{ Να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f^2(x)-25)(x^2-4)}{(f(x)-5)(x-2)}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 40

34. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -3/2} \frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}$ ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $-\frac{25}{7}$ 35. Για τις συνεχείς συναρτήσεις  $f, g$  είναι γνωστό ότι

$$f^2(3) + g^2(3) = 2f(3) + 4g(3) - 5$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f^2(x) - 1)(g^2(x) - 4)}{(f(x) - 1)(g(x) - 2)}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 8

36. Υποθέτουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+4x^2+\alpha x+\beta}{x-3} = 5$ .

( $\alpha'$ ) Να θέσετε  $f(x) = \frac{x^3+4x^2+\alpha x+\beta}{x-3}$ ,  $x \neq 3$  και να εκφράσετε το  $x^3+4x^2+\alpha x+\beta$  ως παράσταση των  $f(x)$  και  $x-3$ .

( $\beta'$ ) Να αποδείξετε ότι  $\beta = -63 - 3\alpha$

( $\gamma'$ ) Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\alpha = -46, \beta = 75$ 

## 1.3 Υπολογισμοί Παραγώγων

37. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

(α') $f(x) = x^3$	(ιβ') $f(x) = \sqrt[5]{x}$
(β') $f(x) = 3x^3$	(ιγ') $f(x) = \sqrt[k]{x}$
(γ') $f(x) = x^5$	(ιδ') $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
(δ') $f(x) = x^{0,1}$	(ιε') $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, x > 0$
(ε') $f(x) = x^{-4}$	(ις') $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt[5]{x}}$
(ς') $f(x) = x^{-11}$	(ιζ') $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}$
(ζ') $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$	(ιη') $f(x) = \sqrt[13]{x^{18}}$
(η') $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$	(ιθ') $f(x) = x^e$
(θ') $f(x) = x^{\sqrt{2}}$	(ιχ') $f(x) = x^{4^5}$
(ι') $f(x) = 2\sqrt{x}$	
(ια') $f(x) = \sqrt[3]{x}$	

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α') $f'(x) = 3x^2$	(ιβ') $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$
(β') $f'(x) = 9x^2$	(ιγ') $f'(x) = \frac{x^{-\frac{-1+k}{k}}}{k} = \frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}}$
(γ') $f'(x) = 5x^4$	(ιδ') $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
(δ') $f'(x) = 0,1x^{-0,9} = \frac{1}{10\sqrt[10]{x^9}}$	(ιε') $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
(ε') $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$	(ις') $f'(x) = \frac{1}{15\sqrt[15]{x^{14}}}$
(ς') $f'(x) = -\frac{11}{x^{12}}$	(ιζ') $f'(x) = \frac{1}{16\sqrt[16]{x^{15}}}$
(ζ') $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$	(ιη') $f'(x) = \frac{18}{13}\sqrt[13]{x^5}$
(η') $f'(x) = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$	(ιθ') $f'(x) = ex^{e-1}$
(θ') $f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$	(ιχ') $f'(x) = 1024x^{1023}$
(ι') $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	
(ια') $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	

38. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

(α') $f(x) = 2\eta\mu x$	(δ') $f(x) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$
(β') $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x$	(ε') $f(x) = 11\sigma\varphi x$
(γ') $f(x) = -\varepsilon\varphi x$	(ς') $f(x) = \frac{1}{4}x^{44}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α') $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$	(δ') $f'(x) = -\sqrt{2}\eta\mu x$
(β') $f'(x) = -3\eta\mu x$	(ε') $f'(x) = -11 - 11\sigma\varphi^2 x$
(γ') $f'(x) = -1 - \varepsilon\varphi^2 x$	(ς') $f'(x) = 11x^{43}$

39. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:





$$(\alpha') g(x) = x + 3$$

$$(\beta') g(x) = x - 3$$

$$(\gamma') g(x) = 3x$$

$$(\delta') g(x) = \frac{x}{3}$$

$$(\epsilon') g(x) = -3x$$

$$(\varphi') g(x) = \sqrt{3} + x$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') g'(x) = 1$$

$$(\beta') g'(x) = 1$$

$$(\gamma') g'(x) = 3$$

$$(\delta') g'(x) = \frac{1}{3}$$

$$(\epsilon') g'(x) = -3$$

$$(\varphi') g'(x) = 1$$

40. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$(\alpha') \varphi(x) = 5e^x$$

$$(\beta') \varphi(x) = e5^x$$

$$(\gamma') \varphi(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$$

$$(\delta') \varphi(x) = 4^x$$

$$(\epsilon') \varphi(x) = (e + 1)^x$$

$$(\varphi') \varphi(x) = \sqrt{2^x}$$

$$(\zeta') \varphi(x) = \sqrt[3]{2^x}$$

$$(\eta') \varphi(x) = \sqrt[5]{4^x}$$

$$(\theta') \varphi(x) = 11 \cdot 12^x$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') \varphi'(x) = 5e^x$$

$$(\beta') \varphi'(x) = e5^x \ln 5$$

$$(\gamma') \varphi'(x) = -e^{-x}$$

$$(\delta') \varphi'(x) = (2 \ln 2) 4^x$$

$$(\epsilon') \varphi'(x) = (e + 1)^x \ln(e + 1)$$

$$(\varphi') \varphi'(x) = \frac{\ln 2}{2} \sqrt{2^x}$$

$$(\zeta') \varphi'(x) = \frac{\ln 2}{3} \sqrt[3]{2^x}$$

$$(\eta') \varphi'(x) = \frac{2 \ln 2}{5} \sqrt[5]{2^{x^2}}$$

$$(\theta') \varphi'(x) = (11 \cdot \ln 12) 12^x$$

41. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$(\alpha') h(x) = x + x^2$$

$$(\beta') h(x) = -3x + 6x^2$$

$$(\gamma') h(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$(\delta') h(x) = \alpha x^2 - \beta x + \gamma$$

$$(\epsilon') h(x) = \sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{5}$$

$$(\varphi') h(x) = 6x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

$$(\zeta') h(x) = x^{11} + x^8 + 11$$

$$(\eta') h(x) = 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1$$

$$(\theta') h(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x - 9$$

$$(\iota') h(x) = \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x + \delta$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') h'(x) = 1 + 2x$$

$$(\beta') h'(x) = -3 + 12x$$

$$(\gamma') h'(x) = 2\alpha x + \beta$$

$$(\delta') h'(x) = 2\alpha x - \beta$$

$$(\epsilon') h'(x) = 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}$$

$$(\varphi') h'(x) = 18x^2 - 6x + 5$$

$$(\zeta') h'(x) = 11x^{10} + 8x^7$$

$$(\eta') h'(x) = 25x^4 + 16x^3 + 9x^2 + 4x$$

$$(\theta') h'(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

$$(\iota') h'(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

42. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:



$$\begin{array}{ll}
 (\alpha') f(x) = \eta\mu x + e^x & (\eta') f(x) = \sigma\nu\nu\sqrt{2} + \sigma\nu\nu\frac{\pi}{8} \\
 (\beta') f(x) = 2\eta\mu x + 3\sigma\nu\nu x & (\theta') f(x) = \sqrt{2}\sigma\nu\nu x + \ln x \\
 (\gamma') f(x) = 2\eta\mu x + 3\sigma\nu\nu\frac{\pi}{18} & (\iota') f(x) = \ln x^3 \\
 (\delta') f(x) = 2e^x + 3e^4 & (\iota\alpha') f(x) = 5 \log x \\
 (\epsilon') f(x) = \eta\mu\frac{\pi}{5}\eta\mu x + e^{\eta\mu\frac{\pi}{11}} & (\iota\beta') f(x) = 3 \log 3x - 5 \log 2x \\
 (\varphi') f(x) = \varepsilon\varphi x + \sqrt{x} & (\iota\gamma') f(x) = \log(2x^2) \\
 (\zeta') f(x) = 4\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + x & (\iota\delta') f(x) = \log(3+x)
 \end{array}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha') f'(x) = \sigma\nu\nu x + e^x & (\eta') f'(x) = 0 \\
 (\beta') f'(x) = 2\sigma\nu\nu x - 3\eta\mu x & (\theta') f'(x) = -\sqrt{2}\eta\mu x + \frac{1}{x} \\
 (\gamma') f'(x) = 2\sigma\nu\nu x & (\iota') f'(x) = \frac{3}{x} \\
 (\delta') f'(x) = 2e^x & (\iota\alpha') f'(x) = \frac{5}{x \ln 10} \\
 (\epsilon') f'(x) = \eta\mu\frac{\pi}{5}\sigma\nu\nu x & (\iota\beta') f'(x) = -\frac{2}{x \ln 10} \\
 (\varphi') f'(x) = 1 + \varepsilon\varphi^2 x + \frac{1}{2\sqrt{x}} & (\iota\gamma') f'(x) = \frac{2}{x \ln 10} \\
 (\zeta') f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 & (\iota\delta') f'(x) = \frac{1}{(3+x) \ln 10}
 \end{array}$$

43. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha') f(x) = (x+1)(x-2) & (\eta') f(x) = (x+e^x)(x+\ln x)(x+1) \\
 (\beta') f(x) = (2x+1)(5x-2) & (\theta') f(x) = x(x^2+1)\eta\mu x \\
 (\gamma') f(x) = (x-1)(x^2+1) & (\iota') f(x) = (\eta\mu x)(\sigma\nu\nu x)(\varepsilon\varphi x) \\
 (\delta') f(x) = (x^3+x+1)(x-1) & (\iota\alpha') f(x) = e^x \ln x \eta\mu x \\
 (\epsilon') f(x) = (e^x+x)(x+\ln x) & (\iota\beta') f(x) = \sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}\sqrt[4]{x+2} \\
 (\varphi') f(x) = (\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x^3) & (\iota\gamma') f(x) = \sqrt{\alpha}\sqrt[3]{\alpha+1}\sqrt[4]{x+2} \\
 (\zeta') f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) & (\iota\delta') f(x) = x(x^2+x+1)(x^2-x+1)
 \end{array}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha') f'(x) = 2x - 1 & \\
 (\beta') f'(x) = 20x + 1 & \\
 (\gamma') f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 & \\
 (\delta') f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x & \\
 (\epsilon') f'(x) = e^x x + e^x \ln x + 2x + \ln x + e^x + \frac{1}{x}e^x + 1 & \\
 (\varphi') f'(x) = 1 + \frac{7}{2}\sqrt{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt{x} - 4x^3 & \\
 (\zeta') f'(x) = 3x^2 + 12x + 11 & \\
 (\eta') f'(x) = 3x^2 + 3x + 2x \ln x + \ln x + e^x x^2 + 3e^x x + e^x x \ln x + 2e^x \ln x + 1 + 2e^x + \frac{1}{x}e^x & \\
 (\theta') f'(x) = 3x^2 \eta\mu x + \eta\mu x + x^3 \sigma\nu\nu x + x \sigma\nu\nu x & \\
 (\iota') f'(x) = 2\sigma\nu\nu x \eta\mu x & \\
 (\iota\alpha') f'(x) = e^x \ln x \eta\mu x + \frac{1}{x}e^x \eta\mu x + e^x \ln x \sigma\nu\nu x & \\
 (\iota\beta') f'(x) = \frac{13x^2 + 29x + 12}{12\sqrt{x}\sqrt[3]{(1+x)^2}\sqrt[4]{(2+x)^3}} & \\
 (\iota\gamma') f'(x) = \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt[3]{\alpha+1}}{4\sqrt[4]{x+2^3}} & \\
 (\iota\delta') f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 &
 \end{array}$$

44. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:



$$(\alpha') f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$(\beta') f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$$

$$(\gamma') f(x) = \frac{2^x}{x}$$

$$(\delta') f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$(\epsilon') f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

$$(\zeta') f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$(\eta') f(x) = \frac{\ln 3x}{\ln 5x}$$

$$(\theta') f(x) = \frac{e^x}{x^c}$$

$$(\iota') f(x) = \frac{x}{x^2-2}$$

$$(\iota\alpha') f(x) = \frac{4}{x^2-2}$$

$$(\iota\beta') f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

$$(\iota\gamma') f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$$

$$(\iota\delta') f(x) = \frac{x+\eta\mu x}{\sigma\nu\nu x}$$

$$(\iota\epsilon') f(x) = \frac{x+\ln x}{x-\ln x}$$

$$(\iota\zeta') f(x) = \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$$

$$(\iota\zeta') f(x) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$(\iota\eta') f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$(\iota\theta') f(x) = \frac{x^3-1}{x^4-1}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha') f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$$

$$(\beta') f'(x) = \frac{-6x}{(x^2-2)^2}$$

$$(\gamma') f'(x) = 2^x \frac{x \ln 2 - 1}{x^2}$$

$$(\delta') f'(x) = e^x \frac{x-1}{x^2}$$

$$(\epsilon') f'(x) = e^x \frac{x-2}{x^3}$$

$$(\zeta') f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$(\zeta') f'(x) = \frac{-\eta\mu x + (\ln x \sigma\nu\nu x)x}{x(-1+\sigma\nu\nu^2 x)}$$

$$(\eta') f'(x) = \frac{\ln 5 - \ln 3}{(\ln 5 + \ln x)^2 x}$$

$$(\theta') f'(x) = e^x x^{-e} - x^{-e-1} e^{x+1}$$

$$(\iota') f'(x) = -\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}$$

$$(\iota\alpha') f'(x) = -\frac{8x}{(x^2-2)^2}$$

$$(\iota\beta') f'(x) = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{(\gamma x + \delta)^2}$$

$$(\iota\gamma') f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$$

$$(\iota\delta') f'(x) = \frac{\sigma\nu\nu x + x\eta\mu x + 1}{\sigma\nu\nu^2 x}$$

$$(\iota\epsilon') f'(x) = 2 \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

$$(\iota\zeta') f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$(\iota\zeta') f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$(\iota\eta') f'(x) = -4 \frac{e^{-2x}}{(-1+e^{-2x})^2}$$

$$(\iota\theta') f'(x) = \frac{-x^2(x^2+2x+3)}{(x^3+x^2+x+1)^2}$$

45. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$(\alpha') g(x) = (2x)^3$$

$$(\beta') g(x) = (qx)^r$$

$$(\gamma') g(x) = \sqrt{3x}$$

$$(\delta') g(x) = (x+1)^{11}$$

$$(\epsilon') g(x) = (11x+1)^{11}$$

$$(\zeta') g(x) = \eta\mu^3 x$$

$$(\eta') g(x) = \eta\mu 3x$$

$$(\theta') g(x) = \eta\mu x^3$$

$$(\iota') g(x) = \sqrt[3]{\eta\mu x}$$

$$(\iota') g(x) = \eta\mu \sqrt[3]{x}$$

$$(\iota\alpha') g(x) = \eta\mu \frac{x}{3}$$

$$(\iota\beta') g(x) = \frac{1}{3} \eta\mu x$$

$$(\iota\gamma') g(x) = e^{3x}$$

$$(\iota\delta') g(x) = e^{x^2+1}$$

$$(\iota\epsilon') g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$(\iota\zeta') g(x) = \eta\mu(\omega x)$$

$$(\iota\zeta') g(x) = \eta\mu(3x+4)$$

$$(\iota\eta') g(x) = \varepsilon\varphi 3x$$

$$(\iota\theta') g(x) = \ln(\eta\mu x)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:



$$\begin{array}{ll}
(\alpha) g'(x) = 24x^2 & (\iota\alpha) g'(x) = \frac{1}{3}\sigma\nu\nu\frac{1}{3}x \\
(\beta) g'(x) = rqr x^{r-1} & (\iota\beta) g'(x) = \frac{1}{3}\sigma\nu\nu x \\
(\gamma) g'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} & (\iota\gamma) g'(x) = 3e^{3x} \\
(\delta) g'(x) = 11(x+1)^{10} & (\iota\delta) g'(x) = 2xe^{x^2+1} \\
(\epsilon) g'(x) = 121(11x+1)^{10} & (\iota\epsilon) g'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \\
(\zeta) g'(x) = 3\sigma\nu\nu x - 3\sigma\nu\nu^3 x & (\iota\zeta) g'(x) = \omega\sigma\nu\nu\omega x \\
(\eta) g'(x) = 3(\sigma\nu\nu x^3) x^2 & (\iota\eta) g'(x) = 3 + 3\epsilon\varphi^2 3x \\
(\theta) g'(x) = \frac{\sigma\nu\nu x}{3\sqrt[3]{\eta\mu^2 x}} & (\iota\theta) g'(x) = \frac{\sigma\nu\nu x}{\eta\mu x} = \sigma\varphi x \\
(\iota) g'(x) = \frac{\sigma\nu\nu\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} &
\end{array}$$

46. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll}
(\alpha) f(x) = \eta\mu(\sigma\nu\nu x^2) & (\epsilon) f(x) = x^{x^2} \\
(\beta) f(x) = e^{\ln x^2} & (\zeta) f(x) = (\eta\mu\sqrt{x})x \\
(\gamma) f(x) = \sqrt{\epsilon\varphi 3x} & \\
(\delta) f(x) = \sqrt[3]{\ln x^2} &
\end{array}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\begin{array}{ll}
(\alpha) f'(x) = -2(\sigma\nu\nu(\sigma\nu\nu x^2)\eta\mu x^2)x & \\
(\beta) f'(x) = 2x & \\
(\gamma) f'(x) = \frac{3}{2} \frac{1+\epsilon\varphi^2 3x}{\sqrt{\epsilon\varphi 3x}} & \\
(\delta) f'(x) = \frac{2}{3x\sqrt[3]{\ln x^2}} & \\
(\epsilon) f'(x) = x^{x^2+1}(2\ln x + 1) & \\
(\zeta) f'(x) = \frac{1}{2}(\eta\mu(\sqrt{x}-1)x) \frac{\ln(\eta\mu x)\eta\mu x + 2x\sigma\nu\nu x}{\sqrt{x}} &
\end{array}$$

47. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll}
(\alpha) g(x) = \eta\mu(\ln x) & (\eta) g(x) = \eta\mu(x^2 + 1) \\
(\beta) g(x) = \eta\mu(\eta\mu x) & (\theta) g(x) = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\
(\gamma) g(x) = \ln(\ln x) & (\iota) g(x) = x^x \\
(\delta) g(x) = e^{x\eta\mu x} & (\iota\alpha) g(x) = -e^{-0,1x} \\
(\epsilon) g(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4 & (\iota\beta) g(x) = (x-1)^{x-1} \\
(\zeta) g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) & (\iota\gamma) g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} \\
(\delta) g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) & (\iota\delta) g(x) = \eta\mu(\ln x)
\end{array}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\begin{array}{ll}
(\alpha) g'(x) = \frac{\sigma\nu\nu(\ln x)}{x} & (\epsilon) g'(x) = -8\frac{(x+1)^3}{(x-1)^5} \\
(\beta) g'(x) = (\sigma\nu\nu x)\sigma\nu\nu(\eta\mu x) & (\zeta) g'(x) = (e^x \ln x)\sqrt{2}\sqrt{2}\frac{(\ln x)x+1}{(\ln x)x} \\
(\gamma) g'(x) = \frac{1}{x \ln x} & \\
(\delta) g'(x) = e^{x\eta\mu x}(\eta\mu x + x\sigma\nu\nu x) & (\iota\zeta) g'(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}
\end{array}$$



$$\begin{array}{ll}
 (\eta) & g'(x) = 2x(\sigma\upsilon\nu(x^2 + 1)) \\
 (\theta) & g'(x) = \frac{\pi}{4}(1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{\pi x}{4}) \\
 (\iota) & g'(x) = x^x(\ln x + 1) \\
 (\iota\alpha) & g'(x) = 0, 1e^{-0,1x} \\
 (\iota\beta) & g'(x) = (x-1)^{x-1}(\ln(x-1) + 1) \\
 (\iota\gamma) & g'(x) = -\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}} \frac{\ln \frac{x+1}{x} + 1}{x^2} \\
 (\iota\delta) & g'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x}
 \end{array}$$

48. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) & f(t) = e^{3t} \\
 (\beta) & f(\omega) = \sigma\upsilon\nu 3\omega \\
 (\gamma) & S(\omega) = \frac{\omega+1}{\omega-1} \\
 (\delta) & s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t - 2 \\
 (\varepsilon) & P(t) = t2^{-3t+3} \\
 (\varepsilon') & V(t) = \frac{\alpha}{\ln t} \\
 (\zeta) & E(r) = \pi(r+1)(r+2) \\
 (\eta) & V(x) = x^2 + x(x+\alpha) + \beta^2 \\
 (\theta) & I(\lambda) = \frac{\lambda}{\ln \lambda} \\
 (\iota) & I(\xi) = \sqrt{\xi(\xi+1)}
 \end{array}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) & f'(t) = 3e^{3t} \\
 (\beta) & f'(\omega) = -3\eta\mu 3\omega \\
 (\gamma) & S'(\omega) = -\frac{2}{(\omega-1)^2} \\
 (\delta) & s'(t) = t + 3 \\
 (\varepsilon) & P'(t) = 8^{1-t} - 24t8^{-t} \ln 2 \\
 (\varepsilon') & V'(t) = -\frac{\alpha}{t \ln^2 t} \\
 (\zeta) & E'(r) = 2\pi r + 3\pi \\
 (\eta) & V'(x) = 4x + \alpha \\
 (\theta) & I'(\lambda) = \frac{\ln \lambda - 1}{\ln^2 \lambda} \\
 (\iota) & I'(\xi) = \frac{2\xi+1}{2\sqrt{\xi(\xi+1)}}
 \end{array}$$

49. Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω παραστάσεων ως προς την μεταβλητή που σημειώνεται:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) & p = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2} \text{ ως προς } V_2 \\
 (\beta) & T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \text{ ως προς } D \\
 (\gamma) & y = y_0 \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ ως προς } t \\
 (\delta) & I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \text{ ως προς } t \\
 (\varepsilon) & R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ ως προς } R_1 \\
 (\varepsilon') & q = -N \frac{BS(\sigma\upsilon\nu\theta - 1)}{R_{II} + R_G} \text{ ως προς } \theta
 \end{array}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) & \frac{dp}{dV_2} = V_1 \frac{P_2 - P_1}{(V_1 + V_2)^2} \\
 (\beta) & \frac{dT}{dD} = -\frac{\pi}{\sqrt{D^3}} \sqrt{m} \\
 (\gamma) & \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} y_0 (\sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)) \\
 (\delta) & \frac{dI}{dt} = I_0 \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \\
 (\varepsilon) & \frac{dR}{dR_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \\
 (\varepsilon') & \frac{dq}{d\theta} = NBS \frac{\eta\mu\theta}{R_{II} + R_G}
 \end{array}$$

50. Στις παρακάτω σχέσεις να βρείτε την παράγωγο ως προς τις αναφερόμενες μεταβλητές:

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha) & xy = x + y + 1 \text{ (της } y \text{ ως προς } x) \\
 (\beta) & PV = nRT \text{ ( του } V \text{ ως προς } T) \\
 (\gamma) & \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ ( του } R_2 \text{ ως προς } R_1) \\
 (\delta) & \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \text{ ( του } C_v \text{ ως προς } C_p) \\
 (\varepsilon) & 2x = e^y \text{ ( του } x \text{ ως προς } y) \\
 (\varepsilon') & 2x = e^y \text{ ( του } y \text{ ως προς } x) \\
 (\zeta) & x^2 + y^2 = 9 \text{ ( του } y \text{ όταν είναι θετικό ως προς } x) \\
 (\eta) & 2^x + 2^y = 10 \text{ ( του } y \text{ ως προς } x)
 \end{array}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:



$$(\alpha) \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$(\epsilon) \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}e^y$$

$$(\beta) \frac{dV}{dT} = \frac{nR}{P}$$

$$(\varphi) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$(\gamma) \frac{dR_2}{dR_1} = -\frac{R^2}{(R-R_1)^2}$$

$$(\zeta) f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{\theta-x^2}}$$

$$(\delta) \frac{dC_p}{dC_v} = \frac{5}{3}$$

$$(\eta) \frac{dy}{dx} = \frac{2^x}{2^x-10}$$

51. Να υπολογίσετε το  $f'(x_0)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(\alpha) f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1$$

$$(\delta) f(x) = \sqrt{x+x^2}, \quad x_0 = 1$$

$$(\beta) f(x) = x + \eta\mu x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$(\epsilon) f(x) = x^x, \quad x_0 = 1$$

$$(\gamma) f(x) = x \ln x, \quad x_0 = e^2$$

$$(\varphi) f(x) = xe^x, \quad x_0 = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha) f'(1) = \frac{1}{4}$$

$$(\delta) f'(1) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$(\beta) f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$(\epsilon) f'(1) = 1$$

$$(\gamma) f'(e^2) = 3$$

$$(\varphi) f'(0) = 1$$

52. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$$

$$(\gamma) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$(\beta) f(x) = \frac{x - e^x}{1 + x \ln x}$$

$$(\delta) f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha) f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^3} \sqrt{x^2-1}}$$

$$(\gamma) f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$(\beta) f'(x) = \frac{(e^x \ln x + 1)(1-x)}{(1+x \ln x)^2}$$

$$(\delta) f'(x) = \frac{-2}{(x+1)(-1+x)}$$

53. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

$$(\gamma) f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

$$(\beta) f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha - x^2}$$

$$(\delta) f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(\alpha) f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

$$(\gamma) f'(x) = \frac{\beta x}{\alpha \sqrt{x^2 - \alpha^2}}$$

$$(\beta) f'(x) = \frac{-\beta x}{\alpha \sqrt{\alpha - x^2}}$$

$$(\delta) f'(x) = 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

54. Έστω ότι οι  $f, g$  είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να επαληθεύσετε τις ιδιότητες:

$$(\alpha) (f^2(x)g(x))' = 2f(x)f'(x)g(x) + f^2(x)g'(x)$$

$$(\beta) \left( \frac{\sqrt{f^2(x)+1}}{g(x)} \right)' = \frac{f(x)f'(x)g(x) - f^2(x)g'(x) - g'(x)}{g^2(x)\sqrt{f^2(x)+1}}, \quad g(x) \neq 0.$$

$$(\gamma) (f^2(x+1) - g^2(x+1))' = 2f(x+1)f'(x+1) - 2g(x+1)g'(x+1)$$



$$(\delta') (f(\ln x)g(x^3))' = \frac{3f(\ln x)g'(x^3)x^3 + f'(\ln x)g(x^3)}{x}$$

$$(\epsilon') (f(x)e^{f(x)} + \ln g(x))' = f(x)e^{f(x)}f'(x) + e^{f(x)}f'(x) + \frac{g'(x)}{g(x)},$$

$$g(x) > 0$$

$$(\zeta') ((f(x))^{g(x)})' = (g'(x)f(x)\ln f(x) + f'(x)g(x))(f(x))^{g(x)-1},$$

$$f(x) > 0$$

55. Έστω  $f$  μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f'(3) = -1$ . Αν  $g(x) = f(x^2 + x + 3)$  ποιά είναι η  $g'(0)$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: -1

56. Έστω  $f$  μία συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f'(3) = 10$ . Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{5}{3}$

#### 1.4 Εξίσωση Εφαπτομένης

57. Έστω  $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $\mathcal{C}_f$  στο σημείο της  $A(2, f(2))$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = 13x - 19$

58. Έστω  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$ . Σε ποια σημεία της  $\mathcal{C}_f$  οι εφαπτομένες της είναι παράλληλες στον άξονα  $x'$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στα  $A(1, 11)$  και  $B(2, 10)$ .

59. Να βρείτε εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της  $f$  που είναι παράλληλες στον άξονα  $x'$  στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$(\alpha') f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$(\beta') f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $(\alpha') y = \frac{1}{e}$   $(\beta') y = 3$

60. Έστω  $f(x) = x(x^2 + 1)$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $\mathcal{C}_f$  στο σημείο της που έχει τεταγμένη ίση με 3.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = 28x - 54$

61. Έστω  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $\mathcal{C}_f$  στο σημείο της που έχει τεταγμένη ίση με 3.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = 4x + 9$

62. Έστω  $f(x) = \eta\mu x$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $\mathcal{C}_f$  στο σημείο της που έχει τεταγμένη ίση με  $\frac{\pi}{6}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{12}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{2}$

63. Έστω  $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$ . Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει με τον  $x'$  η εφαπτομένη της  $\mathcal{C}_f$  στο σημείο της που έχει τεταγμένη ίση με  $-\frac{3}{4}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{\pi}{4}$

64. Έστω  $f(x) = x(x+1)(x+2)$ . Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει με τον  $x'$  η εφαπτομένη της  $\mathcal{C}_f$  στο σημείο της που έχει τεταγμένη ίση με  $-1$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{3\pi}{4}$



65. Έστω  $f(x) = e^x + 2x^2 - x$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $P(0, f(0))$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = 1$
66. Έστω  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  που διέρχεται από το σημείο  $A(4, 4)$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = \frac{3}{4}x + 1$
67. Έστω  $f(x) = x^3 + \sqrt{x} - 2$ . Να εξετάσετε αν η  $y = \frac{7}{2}x - \frac{7}{2}$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ναι στο σημείο της  $T(1, 0)$
68. Έστω  $f(x) = \ln x + 1$ . Να βρείτε εφαπτομένη της  $C_f$  που να σχηματίζει με τον  $x'$  γωνία ίση με  $\frac{\pi}{3}$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = \sqrt{3}x - \frac{1}{2} \ln 3$
69. Έστω  $f(x) = x^3 + x + 1$ . Για ποια τιμή του  $t$  η ευθεία  $y = 4x - 2t + 1$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$ ;  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $t = 1, t = -1$
70. Να βρείτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  που διέρχεται από το σημείο  $A(1, 1)$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  και  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
71. Να βρείτε ευθεία που να εφάπτεται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = x^2 + 3$  και  $g(x) = -3 - 2x^2$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = -4x - 1$  και  $y = 4x - 1$
72. Έστω  $f(x) = x^2 + x - 1$ . Έστω  $(\varepsilon)$  η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(-\frac{3}{4}, f(-\frac{3}{4}))$ . Να βρείτε εφαπτομένη της  $C_f$  που είναι κάθετη στην  $(\varepsilon)$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = 2x - \frac{5}{4}$
73. Να βρείτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το σημείο επαφής έχει τετμημένη  $x_0 = \sqrt{e}$  και η εφαπτομένη είναι η  $y = \frac{1}{2e}x$
74. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = -\alpha x^2 + \beta x - 1$ . Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  έτσι ώστε η ευθεία  $y = -2x + 5$  να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της  $g$  στο σημείο  $M(-1, 1)$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\alpha = -2, \beta = -6$
75. Να βρείτε τους αριθμούς  $\kappa, \lambda$  αν είναι γνωστό ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $y = x^2 + \kappa x + 1$  και  $y = 2x^2 + x + \lambda$  έχουν κοινή εφαπτομένη εφάπτονται σε σημείο με τετμημένη 1.  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\kappa = 3, \lambda = 2$
76. Έστω η συνάρτηση  $h(x) = -3x^3 + 12x^2 - 13x + 4$  και  $x_0 = 1$ ,  
(α') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $h$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0$ .  
(β') Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του προηγούμενου ερωτήματος επανατέμνει την γραφική παράσταση της  $h$  σε ένα σημείο του οποίου και να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $y = 2x - 2$  (β')  $M(2, 2)$





## 1.5 Μονοτονία

77. Έστω  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 6$ . Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -2]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[-2, 1]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$

78. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γνησίως φθίνουσα στο  $[0, 1]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$

79. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = e^x(x-1)^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -1]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 1]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$

80. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = x \ln^2 x - 4x \ln x + 4x + e$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[1, e^2]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[e^2, +\infty)$

81. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γνησίως αύξουσα στο  $(0, e]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[e, +\infty)$

82. Σε ποια διαστήματα είναι η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x$  γνησίως αύξουσα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: στο  $[0, +\infty)$ .

83. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^x - e^{-x}$  είναι γνησίως αύξουσα.

84. Για ποιές τιμές του  $\lambda$  η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3\lambda x^2 + (9\lambda - 6)x + 1$  είναι γνησίως αύξουσα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: για  $1 \leq \lambda \leq 2$

85. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x + \alpha^2 + \beta^2$  όπου  $\alpha < \beta$ . Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$  αν είναι γνωστό ότι η  $f$ :

- είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 13]$
- είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[13, 18]$
- είναι γνησίως αύξουσα στο  $[18, +\infty)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\alpha = 13, \beta = 18$

86. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x$  είναι γνησίως αύξουσα.

87. Έστω  $f(x) = e^{x^2-4x+3}$ . Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 2]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[2, +\infty)$

88. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = 2x + \frac{1}{2}x(\eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x))$  είναι γνησίως αύξουσα.

89. Έστω η συνάρτηση  $\varphi(x) = x^4 - 14x^2 + 24x + 34$ . Να βρείτε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως φθίνουσα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: στα  $(-\infty, -3], [1, 2]$

90. Να αποδείξετε ότι η  $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  είναι γνησίως αύξουσα.



91. Να αποδείξετε ότι η  $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .
92. Να αποδείξετε ότι η  $\omega(x) = -\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x + \eta\mu x - 3x$  είναι γνησίως φθίνουσα.
93. Να αποδείξετε ότι η  $g(x) = 2\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
94. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης

$$f(x) = x \ln^2 x - 7x \ln x + 13x$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γνησίως αύξουσα στο  $(0, e^2)$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[e^2, e^3]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[e^3, +\infty)$

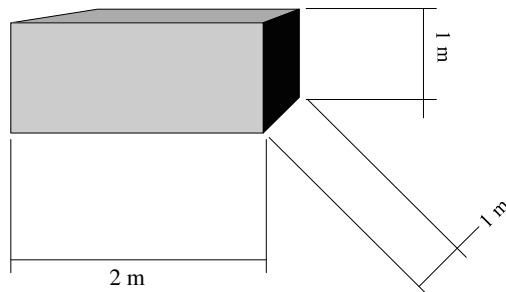
95. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = \frac{\log x}{x+1}$
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: γνησίως αύξουσα στο  $(0, e]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[e, +\infty)$

### 1.6 Μέγιστα - Ελάχιστα

96. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  με πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$ .
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 2 για  $x = 1$
97. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^3}$  με πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$ .
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η  $f$  γίνεται ελάχιστη για  $x_0 = \sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ . Η ελάχιστη τιμή της είναι η  $f(x_0) = \frac{5}{6} \sqrt[5]{3^2} \sqrt[5]{2^3}$
98. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = x \ln x - 2x$ .
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η  $f$  γίνεται ελάχιστη για  $x_0 = e$ . Η ελάχιστη τιμή της είναι η  $f(e) = -e$
99. Έστω  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 1$ . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$ .
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα  $x_0 = 1$  και  $x_0 = 3$ . Είναι  $f(1) = f(3) = -\frac{5}{4}$  και η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι  $-\frac{5}{4}$ .
100. Έστω  $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2$ . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$ .
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 2 για  $x = 2$
101. Για τους αριθμούς  $x, y$  είναι γνωστό ότι ισχύει  $2x + 3y = 1$ . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης  $x^2 + 3y^2 + xy$ .
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{11}{60}$  για  $x = \frac{3}{10}$ .
102. **Από τις εξετάσεις του 1977.** Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση  $2^x + 3^x = 5^x$  έχει την λύση  $x = 2$ . Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει άλλη λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
103. Για τους αριθμούς  $x, y$  είναι γνωστό ότι ισχύει  $2x - 3y = 5$ . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης  $x^2 + 3y^2 + xy$ .
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{275}{108}$  για  $x = \frac{25}{18}$  και  $y = -\frac{20}{27}$ .

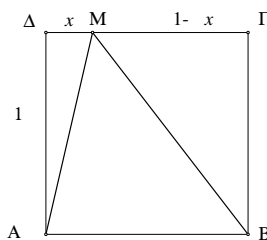


104. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-2, 4]$ .  
Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μέγιστο  $f(-2) = 11$ , ελάχιστο  $f(\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4}$ .
105. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-2, 4]$ .  
Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μέγιστο  $f(4) = 53$ , ελάχιστο  $f(-2) = f(1) = -1$ .
106. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης  $\sin^2\theta + 4\sin\theta + 6$  όταν το  $\theta$  μεταβάλλεται στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\phi(\pi) = 3$
107. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης  $e^x + e^y$  όταν είναι γνωστό ότι  $x + y = 1$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $2\sqrt{e}$  για  $x = y = \frac{1}{2}$ .
108. Έστω  $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $x > 1$ . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $g$ .  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $g(e) = e$
109. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = 3x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 12x + 6$   
(α') Να αποδείξετε ότι  $g'(x) = 12(x^2 + x + 1)(x + 1)$   
(β') Να αποδείξετε ότι  $f$  παίρνει μόνο θετικές τιμές.
110. Μία δεξαμενή πετρελαίου έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις  $2m \times 1m \times 1m$  (βλ. σχήμα). Ένα βυτιοφόρο γεμίζει την δεξαμενή με ρυθμό  $0,5 \text{ lit/sec}$ . Με τί ρυθμό ανεβαίνει η στάθμη της δεξαμενής;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $0,025 \text{ cm/sec}$

111. Το σημείο  $M$  κινείται κατά μήκος της πλευρά  $\Gamma\Delta$  του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  (βλ. σχήμα).



(α) Να αποδείξετε ότι το μήκος  $s(x)$  της τεθλασμένης  $AMB$  είναι  $s(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(1-x)^2}$ .

(β) Να αποδείξετε ότι  $s'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0$

(γ) Να αποδείξετε ότι  $\sqrt{5} \leq s(x) \leq 1 + \sqrt{2}$

### 112. Ένα διαγώνισμα του 1999

ΖΗΤΗΜΑ 1. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2\sqrt{x}$  και  $C_f$  η γραφική παράσταση της.

(α) <sup>1</sup> Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της  $A(4, f(4))$ .

(β) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  το σημείο  $B(\lambda, 4)$  ανήκει στην  $C_f$ .

ΖΗΤΗΜΑ 2. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδόν  $100 \text{ m}^2$  ποιο είναι εκείνο που:

(α) <sup>2</sup> Έχει τη μικρότερη περίμετρο;

(β) i. Έχει τη μικρότερη διαγώνιο;

ii. Το τρίγωνο που ορίζεται από μία διαγώνιο και δύο πλευρές του έχει τη μικρότερη περίμετρο;

### 113. Ένα διαγώνισμα του 1999

ΖΗΤΗΜΑ 1. Έστω  $f(x) = x^3 - 3x$

(α) <sup>3</sup> Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(-1)$ .

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $M(-1), f(-1)$ .

ΖΗΤΗΜΑ 2. Το άθροισμα δύο αριθμών  $x$  και  $y$  είναι ίσο με 40

(α) <sup>4</sup> Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενο τους.

(β) Ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση  $x^{2000} + y^{2000}$ ;

114. Για ποιά τιμή του  $\alpha$  η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 3x^2 + \alpha x + 1$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 = 1$ ; Ποιο είναι το είδος του ακροτάτου;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Για  $\alpha = -9$ . Το ακρότατο είναι τοπικό ελάχιστο.

115. Δίνεται η συνάρτηση  $r(x) = x^4 - 4x^2 - 3x$ . Να βρεθεί ευθεία που να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $r$  σε δύο διαφορετικά σημεία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $y = -3x - 4x$  ελάχιστο.

116. Έστω η συναρτήση  $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  η  $f$  έχει την μεγαλύτερη ελάχιστη τιμή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\lambda = 2$

<sup>1</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 27, Ασκ. 5,ii

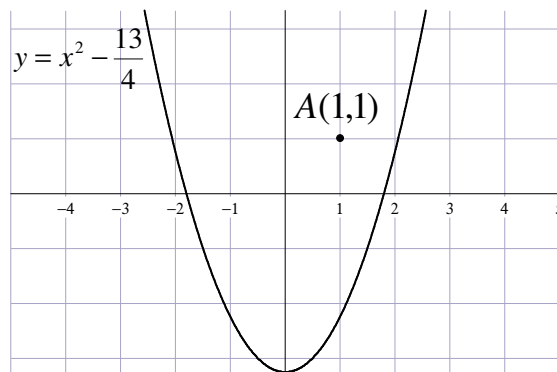
<sup>2</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 45, Ασκ. 5.

<sup>3</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 17, Ασκ. 1.

<sup>4</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 45, Ασκ. 4.



117. Έστω  $f(x) = x^2 - \frac{13}{4}$ . Να βρείτε ποιο σημείο της  $C_f$  απέχει από το σημείο  $A(1, 1)$  ελάχιστη απόσταση.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το  $M(2, \frac{3}{4})$

118. Έστω  $\sigma(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 6$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της  $C_\sigma$  η εφαπτομένη της σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  την μικρότερη δυνατή γωνία.  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στο  $P(-\frac{1}{2}, -\frac{17}{2})$ .

119. Δείξτε ότι το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha^2 x^3 + \alpha x^2 - \alpha^2 x^2 - \alpha x}{x^2 - 1}$  είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του  $-\frac{1}{8}$ .

120. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8x + 5$  δεν έχει σημεία κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

#### 1.7 Ασκήσεις σε όλο το κεφάλαιο

121. Αν  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 7$  να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 3

122. Ένα διαγώνισμα του 2001. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x - 3 \ln x - \frac{2}{x}$

(α') Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

(β') Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της με τετμημένη 2.

123. Ένα διαγώνισμα του 2001. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

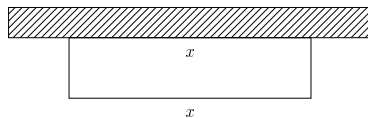
(α') Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

(β') Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της  $C_f$  που σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$

124. Ένα διαγώνισμα του 2001.

ΖΗΤΗΜΑ 1. Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 100m, μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.





Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι  $x$ :

(α)<sup>5</sup> Να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του  $x$ .

(β)<sup>6</sup> Να βρείτε ποιο είναι το μέγιστο δυνατό εμβαδόν της περιοχής.

**ΖΗΤΗΜΑ 2.** Έστω  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$ .

(α)<sup>6</sup> Να βρείτε την παράγωγο της  $f(x)$

(β)<sup>7</sup> Να αποδείξετε ότι αν  $\alpha < \beta$  τότε ισχύει  $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + e^{-\alpha}} < \frac{e^\beta}{e^\beta + e^{-\beta}}$

**125. Ένα διαγώνισμα του 2001.**

**ΖΗΤΗΜΑ 1** Έστω  $f(x) = x^2 + 5 + \frac{5}{x}$ ,  $x > 0$ .

(α)<sup>7</sup> Να βρείτε την παράγωγο της  $f$ .

(β)<sup>8</sup> Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $f(x) \geq \frac{3}{4}20^{\frac{2}{3}} + 5$ .

**ΖΗΤΗΜΑ 2** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ .

(α)<sup>8</sup> Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

(β)<sup>9</sup> Για τους θετικούς αριθμούς  $x$  και  $y$  ισχύει:

$$x^2 + y = 3$$

Να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$A = xy + 1$$

**126.** Για την συνάρτηση  $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  είναι η ευθεία  $(\varepsilon_1)$ :  $y = 3x - 1$ .

(α)<sup>9</sup> Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha, \beta$ .

(β)<sup>10</sup> Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης στο οποίο η εφαπτομένη  $(\varepsilon_2)$  είναι κάθετη στην  $(\varepsilon_1)$ .

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

(α)<sup>9</sup>  $\alpha = 1, \beta = 1$

(β)<sup>10</sup> Πρόκειται για το σημείο  $M(\frac{1}{6}, \frac{8}{9})$ .

**127.** Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 2x - 1} = -\frac{1}{4}$ .

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**  $\lambda = -3$

**128. Ένα διαγώνισμα του 2002.**

**ΖΗΤΗΜΑ 1** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ .

<sup>5</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 18, Ασκ. 2.

<sup>6</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 17, Ασκ. 16, iv.

<sup>7</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 37, Ασκ. 7, iii.

<sup>8</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 45, Ασκ. 2, ii.



- (α)<sup>9</sup> Να βρείτε την παράγωγο της  $f$ .  
 (β') Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**ΖΗΤΗΜΑ 2** Το άθροισμα δύο αριθμών  $x, y$  είναι ίσο με 40.

- (α)<sup>10</sup> Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενο τους.  
 (β') Να αποδείξετε ότι  $x^2 + y^2 \geq 800$ .

**129. Από τις εξετάσεις του 2001.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sin x + \eta \mu x$ .

- (α') Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f''(x) = 0$ .  
 (β') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, 1)$ .  
 (γ') Να βρείτε την τιμή  $\lambda \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f' \left( \frac{\pi}{2} \right) - 2f \left( \frac{\pi}{2} \right) = 2$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (β')  $y = x + 1$  (γ')  $\lambda = -4$

**130. Από τις εξετάσεις του 2002.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ .

- (α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .  
 (β') Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .  
 (γ') Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της  $f$ .  
 (δ') Να βρεθούν οι εφαπτομένες της καμπύλης της συνάρτησης  $f$  οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = 2x + 5$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$  (β')  $\frac{3}{2}$  (γ')  $f'(x) = \frac{2}{(1+x)^2}$  (δ')  $y = 2x, y = 2x + 8$

**131. Ένα διαγώνισμα του 2003.**

**ΖΗΤΗΜΑ 1** Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$$

- (α)<sup>11</sup> Να βρείτε την παράγωγο της  $f$ .  
 (β') Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την  $f$  στο διάστημα  $(-\pi, \pi)$ .

**ΖΗΤΗΜΑ 2** Έστω

$$v = 100p(1 + \ln r) - 100qr$$

συνάρτηση του  $r$ , όπου  $p, q$  είναι θετικές σταθερές.

- (α)<sup>12</sup> Να αποδείξετε ότι το  $v$  γίνεται μέγιστο όταν  $r = \frac{p}{q}$ .  
 (β') i. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του  $v$ .

<sup>9</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 36, Ασκ. 7, iii.

<sup>10</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 45, Ασκ. 4.

<sup>11</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 36, Ασκ. 12, i.

<sup>12</sup> Σχολικό βιβλίο, σελ. 46, Ασκ. 1.



ii. Να αποδείξετε ότι αν  $p < q$  τότε θα είναι  $v < 0$

132. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 12x + 1$  για την οποία είναι γνωστό ότι παρουσιάζει ακρότατα στα  $x = 1, x = 2$ .

(α') Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

(β') Για τις τιμές των  $\alpha, \beta$  που βρήκατε στο ερώτημα (α') να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α')  $\alpha = 2, \beta = -9$

(β') Τοπικό μέγιστο στο 1 και τοπικό ελάχιστο στο 2

133. Για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  ισχύει  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  για όλα τα  $x, y$ . Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x$  ισχύει  $f'(x) = f'(0)$ .

134. Ένα διαγώνισμα του 2004.

#### ZΗΤΗΜΑ 1

Αν  $h(\theta) = \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$ :

(α') <sup>13</sup>

i. Να υπολογίσετε τις τιμές  $h(0)$  και  $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ii. Για ποιες τιμές της γωνίας  $\theta$  είναι  $h(\theta) = 0$ ;

(β') Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα.

#### ZΗΤΗΜΑ 2

Έστω  $f(x) = x^2 + 5 + \frac{3}{x}$ .

(α') <sup>14</sup> Να βρείτε την παράγωγο της  $f$ .

(β') i. Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

ii. Να βρείτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  που σχηματίζει με τον  $x'$  γωνία  $135^\circ$ .

135. (α') Να αποδείξετε ότι για όλα τα  $x$  ισχύει  $e^{-x} + e^x \geq 2$  και ότι το " $=$ " ισχύει για  $x = 0$ .

(β') Να αποδείξετε ότι αν  $\alpha > \beta$  τότε ισχύει

$$e^\alpha - e^{-\alpha} - 2\alpha > e^\beta - e^{-\beta} - 2\beta$$

136. Έστω ότι  $f(1) = 3, f'(1) = -1, h(3) = 2$  και  $h'(3) = 5$ . Αν είναι  $g(x) = h(x^2 f(x))$  ποιο είναι το  $g'(1)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 10

137. Για τους θετικούς αριθμούς  $x, y$  είναι γνωστό ότι  $x + y = 2$ . Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 2 για  $x = y = 1$

<sup>13</sup>Σχολικό βιβλίο, σελ. 18, Ασκ. 3.

<sup>14</sup>Σχολικό βιβλίο, σελ. 36, Ασκ. 7 ii)





138. Για την συνάρτηση  $f(x) = e^{\lambda x}$  είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\lambda f''(x) + 2f'(x) - 3f(x)$$

για όλα τα  $x$ . Να βρείτε το  $\lambda$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1

139. Για την συνάρτηση  $f(x) = e^{\lambda x}$  είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\lambda f''(x) + 2f'(x) - 3f(x)$$

για όλα τα  $x$ . Να βρείτε το  $\lambda$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1

140. Να βρείτε όλα τα σημεία  $M$  της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}$  που έχουν την ιδιότητα η εφαπτομένη στο  $M$  να διέρχεται από το σημείο  $K(\frac{1}{2}, 0)$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $M(-\frac{1}{2}, 1)$  και  $M(\frac{3}{2}, 3)$

141. Για ποιές τιμές του  $\alpha$  η ευθεία  $y = 3x + 1$  εφάπτεται στην γραφική παράσταση της  $y = \alpha x^2 + 4x$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\alpha = -\frac{1}{4}$

142. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της  $f(x) = x^2$  στα σημεία της  $M_1(x_1, f(x_1))$  και  $M_2(x_2, f(x_2))$  είναι  $M(\frac{x_1+x_2}{2}, x_1x_2)$ .

143. Έστω  $\varphi(x) = e^{2x} - e^x + 2$ .

(α') Να βρεθεί η  $\varphi'(x)$ .

(β') Να βρεθεί η  $\varphi''(x)$ .

(γ') Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της  $\varphi$ .

(δ') Ποιό σημείο της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  έχει τεταγμένη 10;

(ε') Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  στο σημείο της  $R(0, \varphi(0))$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α')  $\varphi'(x) = 2e^{2x} - e^x$

(β')  $\varphi''(x) = 4e^{2x} - e^x$

(γ') Γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, -\ln 2]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[-\ln 2, +\infty)$ .

(δ') Το  $M(\ln(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}), 10)$ .

(ε')  $y = x + 2$

144. Από τις εξετάσεις του 2007. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = xe^x + 3$$

όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

(α') Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = f(x) + e^x - 3$ .

(β') Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$

145. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  είναι  $x^3 + \frac{1}{x} \geq \frac{4}{3}\sqrt[4]{3}$ .



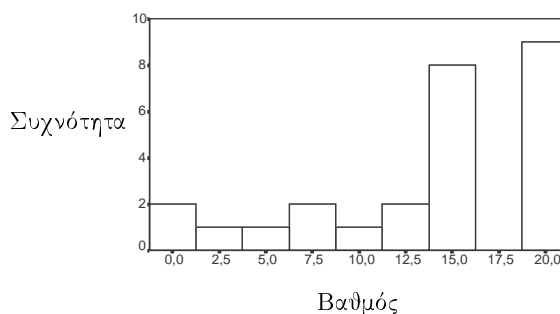
## 2 Στατιστική

146. Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται οι βαθμοί σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών ενός σχολείου.

Βαθμός	Μαθητές
1	2
3	1
4	1
8	2
10	1
12	2
14	3
15	5
19	2
20	7

- (α') Να ομαδοποιήσετε αυτά τα δεδομένα σε κλάσεις πλάτους 2,5 ώστε η κεντρική τιμή της πρώτης κλάσης να είναι 0.  
 (β') Να παραστήσετε τα ομαδοποιημένα δεδομένα σε ένα διάγραμμα.  
 (γ') Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών πριν και μετά την ομαδοποίηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (β')



(γ') 13,6 και 13,75

147. Σε μία έρευνα που διεξήγαγε η εταιρεία KΑΙΑ RESEARCH σε ένα δείγμα γονέων το 2001 διαπιστώθηκε ότι το 51,7% δηλώνει ότι η παρουσία των μεταναστών στην ελληνική κοινωνία τους προκαλεί ανησυχία και το 16,2% δηλώνει ότι η παρουσία των ξένων τους ενοχλεί. Αδιάφορο εμφανίζεται το 17,1% ενώ το 11,6% δηλώνει " ότι η νέα αυτή πολυπολιτισμική πραγματικότητα του φαίνεται ενδιαφέρουσα".

- (α) Βρείτε τι ποσοστό του δείγματος έδωσε άλλη απάντηση εκτός των αναφερομένων.  
 (β) Αν παραστήσουμε τα δεδομένα σε κυκλικό διάγραμμα τι γωνία θα αποδώσουμε στην πρώτη απάντηση; Στην δεύτερη;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) 3,4% (β) Περίπου  $186^\circ$  και  $58^\circ$ .

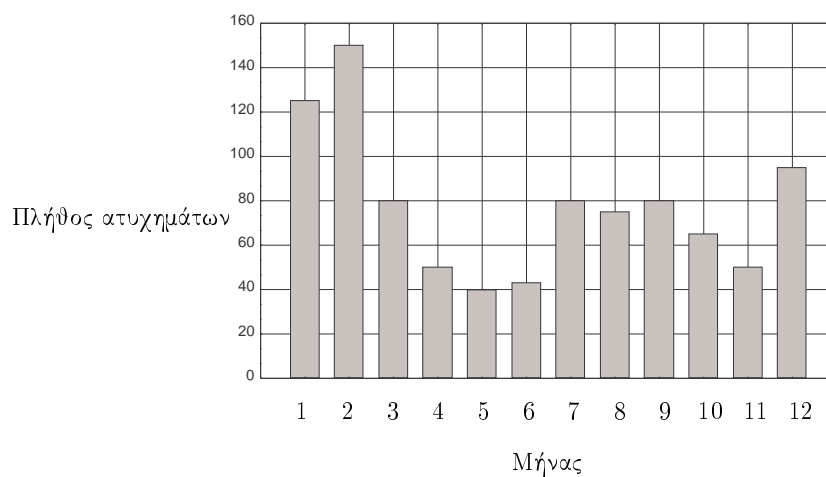


148. Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται τα πλήθη των τροχαίων ατυχημάτων ενός έτους σε μία πόλη.

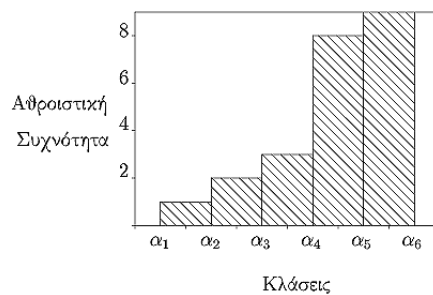
Μήνας	Αριθμός Ατυχημάτων
Ιανουάριος	125
Φεβρουάριος	150
Μάρτιος	80
Απρίλιος	50
Μάιος	40
Ιούνιος	43
Ιούλιος	80
Αύγουστος	75
Σεπτέμβριος	80
Οκτώβριος	65
Νοέμβριος	50
Δεκέμβριος	95

Να παραστήσετε τα δεδομένα σε ένα ραβδόγραμμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')



149. Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται μία αθροιστική ομαδοποιημένη κατανομή.

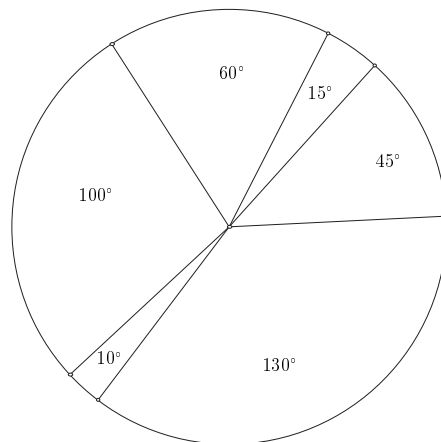


Να βρείτε τις συχνότητες των κλάσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Κλάση	$\nu_i$
$(\alpha_1, \alpha_2)$	1
$(\alpha_2, \alpha_3)$	1
$(\alpha_3, \alpha_4)$	1
$(\alpha_4, \alpha_5)$	5
$(\alpha_5, \alpha_6)$	1

150. Παρακάτω παρουσιάζεται το κυκλικό διάγραμμα της κατανομής ενός δείγματος μεγέθους  $N = 1800$ .



Να βρείτε τις συχνότητες που αντιστοιχούν σε κάθε τομέα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $45^\circ \rightarrow 225$ ,  $15^\circ \rightarrow 75$ ,  $60^\circ \rightarrow 300$ ,  $100^\circ \rightarrow 500$ ,  $10^\circ \rightarrow 50$ ,  $130^\circ \rightarrow 650$

151. Να βρείτε την διάμεσο και την μέση τιμή στις παρακάτω σειρές δεδομένων:

(α') 1, 2, 3, 4, 250

(β') 1, 2, 3, 4, 250, 250

(γ') 1, 2, 3, 4, 250, 250, 250

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(α')  $\delta = 3$ ,  $\bar{x} = 52$

(β')  $\delta = \frac{7}{2}$ ,  $\bar{x} = 85$

(γ')  $\delta = 4$ ,  $\bar{x} = \frac{760}{7}$

152. Η μέση τιμή της βαθμολογίας στα Μαθηματικά της Α' τάξης ενός Λυκείου είναι 10. Στο Λύκειο αυτό μεταγράφεται ένας μαθητής με βαθμολογία στα Μαθηματικά 18 και η μέση τιμή γίνεται 10,1. Να βρείτε το αρχικό πλήθος των μαθητών.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 79

153. Η μέση τιμή, ως προς μία μεταβλητή ενός πληθυσμού  $A$  με  $\nu$  άτομα είναι  $\alpha$  ενώ η μέση τιμή, ως προς την ίδια μεταβλητή ενός πληθυσμού  $B$  με  $\mu$  άτομα είναι  $\beta$ . Ποια θα είναι η μέση τιμή του πληθυσμού που προκύπτει από την ένωση των δύο παραπάνω πληθυσμών;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{\nu\alpha + \mu\beta}{\nu + \mu}$



154. Να βρείτε την διάμεσο της παρακάτω κατανομής: 2,4,-1,5,5,6,7,7,1,2,11,12.  
Ποια θα είναι η διάμεσος αν η τιμή 12 γίνει 13;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η διάμεσος και στις δύο περιπτώσεις θα είναι 5.

155. Σε μία επιχείρηση η μέση τιμή των ετησίων αποδοχών των εργαζομένων είναι 11800 ευρώ. Πως θα διαμορφωθεί η μέση τιμή αν:

- (α') Σε όλους του εργαζόμενους δοθεί ως δώρο το ποσό των 1000 ευρώ;  
(β') Σε όλους του εργαζόμενους δοθεί αύξηση 5%;  
(γ') Σε όλους του εργαζόμενους δοθεί αύξηση 5% και το ποσό των 1000 ευρώ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

- (α') 12800 ευρώ. (β') 12390 ευρώ. (γ') 13390 ευρώ.

156. Έστω η παρακάτω σειρά δεδομένων:

2, 4, 2,  $x$ , 11, 16, 7, 7, 2, 5

Να βρεθεί ο  $x$  ώστε:

- (α') Η μέση τιμή να είναι 6.  
(β') Η διάμεσος να είναι:  
i. 6  
ii. 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α') 4 (β') i.  $x \geq 7$  ii. 5

157. Να βρείτε τη μέση τιμή και την διάμεσο στην παρακάτω κατανομή:

Βαθμός	Μαθητές
2-5	12
5-8	17
8-11	22
11-14	19
N	70

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\bar{x} = 8,6$ ,  $\delta = \frac{97}{11} = 8,8$

158. Έστω η παρακάτω σειρά δεδομένων:

3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8

Να υπολογίσετε το εύρος, την διακύμανση και την τυπική απόκλιση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $R = 5$ ,  $s^2 = 2,89$ ,  $s = 1,7$ .

159. Η τυπική απόκλιση μίας κατανομής είναι 3 και η μέση τιμή 12. Ποιός θα είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 25%

160. Η τυπική απόκλιση των δεδομένων 2, 3, 4, 5,  $x$  είναι 1. Ποιος είναι ο  $x$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $x = \frac{7}{2}$



161. Το ημερομίσθιο των εργαζομένων σε ένα εργοτάξιο παρουσιάζει τυπική απόκλιση 3. Τι τυπική απόκλιση παρουσιάζουν οι εβδομαδιαίες αποδοχές τους; (Υπολογίστε 5 ημέρες εργασίας ανά εβδομάδα).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 15

162. Η παρακάτω κατανομή

2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 0

έχει μέση τιμή  $\bar{x} = \frac{17}{5} = 3,4$  και τυπική απόκλιση  $s = \frac{2}{15}\sqrt{186} = 1,8$ . Να βρείτε το ποσοστό των στοιχείων που έχει τιμή μεταξύ  $\bar{x}$  και  $\bar{x} + s$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 33,3%

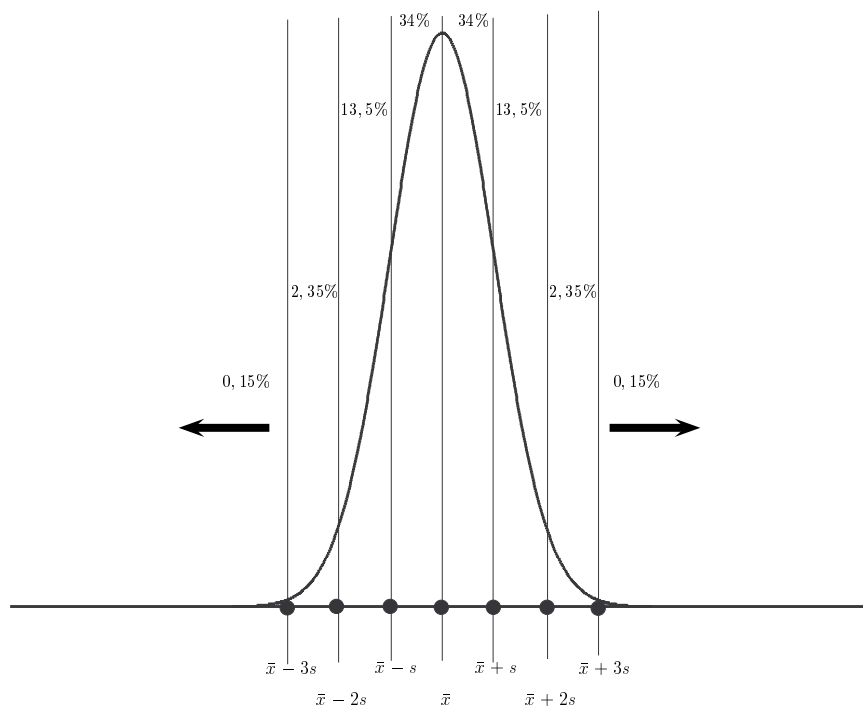
163. Η μέση τιμή των αριθμών 1, 2, ..., n είναι 7. Ποιος είναι ο n;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 13

164. Να αποδείξετε ότι ισχύει  $s \leq R$ .

165. Να αποδείξετε ότι αν  $s = 0$  τότε  $\bar{x} = \delta$ .

166. Στο σχήμα που ακολουθεί παριστάνεται μία κανονική κατανομή με μέσο  $\bar{x} = 3$  και τυπική απόκλιση  $s = 0,2$ .



Να βρείτε το ποσοστό του πληθυσμού που έχει τιμή:



- (α') Μεταξύ 3 και 3,2. (γ') Το πολύ 3,6.  
 (β') Μεταξύ 2,8 και 3,4. (δ') Τουλάχιστον 2,4.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α') 34% (β') 81,5% (γ') 99,85% (δ') 99,85%

167. Ο συντελεστής μεταβλητότητας της μεταβλητής  $X$  είναι 30%, και της μεταβλητής  $X + 1$  είναι 20%. Να βρείτε το  $\bar{x}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\bar{x} = 2$

168. Αφου συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση:

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές	Συχνότητες	$x_i^2$	$\nu_i x_i$	$\nu_i x_i^2$
[3, 7)		4			
[7, 11)		6			
[11, 15)		8			
[15, 19)		2			
		$N =$		$\sum \nu_i x_i =$	$\sum \nu_i x_i^2 =$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $s = \frac{4}{5}\sqrt{21}$

169. Να βρείτε την τυπική απόκλιση των παρακάτω δεδομένων:

Κλάση	Συχνότητα
1-4	6
4-7	17
7-10	30
10-13	27
13-16	12
16-19	8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $s = \frac{3}{50}\sqrt{4171}$

170. Από τις εξετάσεις του 2000.

Α. Να γράψετε στο τετράδιο σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής  $X$  σωστά συμπληρωμένο:

Τιμές μεταβλητής $x_i$	Συχνότητα $\nu_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα $N_i$	$x_i \nu_i$	$x_i^2 \nu_i$	$x_i^2 \nu_i$
1					10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	50	1	100	-		-	

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι  $s^2 = 0,49$ .

Δίνεται ότι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 \nu_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \nu_i \right)^2}{\nu} \right\}$$



## 171. Ένα διαγώνισμα του σχολικού έτους 2000.

**ZΗΤΗΜΑ 1ο**

Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 6. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 5, 8, 9.

- (α)<sup>15</sup> Να βρείτε τους άλλους δύο.  
 (β') Να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας του δείγματος που απαρτίζουν οι πέντε αυτοί αριθμοί.

**ZΗΤΗΜΑ 2ο**

- (α)<sup>16</sup> Να δείξετε ότι αν από όλες τις τιμές 0, 2, 4, 6, 8, 10 και 12 ενός δείγματος αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους και διαιρέσουμε με την τυπική απόκλιση, τότε οι τιμές που θα προκύψουν θα έχουν μέση τιμή 0 και διασπορά 1.  
 (β') i. Να διατυπώσετε ένα ανάλογο συμπέρασμα με εκείνο του του ερωτήματος 1. για τυχόν δείγμα.  
 ii. Να αποδείξετε το συμπέρασμα που διατυπώσατε στο ερώτημα ερώτημα (α').

## 172. Ένα διαγώνισμα του 2003.

**ZΗΤΗΜΑ 1**

- (α)<sup>17</sup> Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$x_i$	$\nu_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
1						10
2	4	0,20	6			
3				0,60		
4					25	
5	2					
6						
Σύνολο						

- (β') Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής για τα δεδομένα του προηγούμενου πίνακα.

**ZΗΤΗΜΑ 2**

<sup>18</sup> Η μέση ηλικία 13 αγοριών και 12 κοριτσιών μίας τάξης είναι 15,4 χρόνια. Η μέση ηλικία των αγοριών είναι 15,8 χρόνια.

- (α') Να βρείτε την μέση ηλικία των κοριτσιών.  
 (β') Έστω ότι:  
*τυπική απόκλιση της ηλικίας των κοριτσιών = τυπική απόκλιση της ηλικίας των αγοριών =  $\alpha$*

<sup>15</sup> Σχολικό βιβλίο σελίδα 101, άσκηση 9

<sup>16</sup> Σχολικό βιβλίο σελίδα 103, άσκηση 4

<sup>17</sup> Σχολικό βιβλίο σελίδα 79, άσκηση 5

<sup>18</sup> Σχολικό βιβλίο σελίδα 100, άσκηση 5





Να συγκρίνετε την τυπική απόκλιση της ηλικίας των μαθητών όλης της τάξης με το  $\alpha$ .

Δίνεται ότι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 \nu_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \nu_i \right)^2}{\nu} \right\}$$

173. Ένα άλλο διαγώνισμα του 2003 (των απόντων του προηγούμενου).

#### ZΗΤΗΜΑ 1

(α) <sup>19</sup> Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων, που δίνει την κατανομή του αριθμού των ημερών απουσίας από την εργασία τους λόγω ασθένειας 50 εργατών, να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των εργατών που απουσίασαν:

- i. τουλάχιστον 1 ημέρα
- ii. πάνω από 5 ημέρες
- iii. από 3 έως 5 ημέρες
- iv. το πολύ 5 ημέρες
- v. ακριβώς 5 ημέρες

Αριθμός Ημερών	Συχνότητα	Αριθμός Ημερών	Συχνότητα
0	12	5	8
1	8	6	0
2	5	7	5
3	4	8	2
4	5	9	1

(β) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής για τα δεδομένα του προηγούμενου πίνακα.

#### ZΗΤΗΜΑ 2

Έχουμε ένα δείγμα  $\nu = 10$  παρατηρήσεων, όπου κάθε παρατήρηση μπορεί να είναι 1, 2 ή 3.

(α) <sup>20</sup> Είναι δυνατόν η μέση τιμή να είναι:

- i. 1
- ii. 4
- iii. 1,8

(β) Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν η μέση τιμή να είναι 1,9.

Δίνεται ότι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 \nu_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \nu_i \right)^2}{\nu} \right\}$$

<sup>19</sup> Σχολικό βιβλίο σελίδα 79, άσκηση 4

<sup>20</sup> Σχολικό βιβλίο σελίδα 100, άσκηση 2



174. Μία κανονική κατανομή έχει τυπική απόκλιση 4. Ποιο είναι το εύρος της;  
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Περίπου 24.

175. Έστω ότι δύο δείγματα  $A, B$  έχουν πλήθη  $\mu, \nu$ . Ως προς μία μεταβλητή έχουν μέσες τιμές  $\alpha, \beta$  και αποκλίσεις  $p, q$ . Να αποδείξετε ότι το δείγμα  $A \cup B$  έχει τυπική απόκλιση

$$\frac{\mu(\alpha^2 + p^2) + \nu(\beta^2 + q^2)}{\mu + \nu} - \left( \frac{\mu\alpha + \nu\beta}{\mu + \nu} \right)^2$$

176. **Από τις εξετάσεις του 2001.** Σε μία έρευνα που έγινε στους μαθητές μίας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

**A.** Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

**B.** Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

**Γ.** Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά;

**Δ.** Μία μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε κατά πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής  $CV$ .

177. **Από τις εξετάσεις του 2000.** Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [ - )	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0-5	10
5-10	15
10-15	12
15-20	15
20-25	18
25-30	18
30-35	12

**A.** Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

**B.** Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

**α)** πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν στα επόμενα 12,5 χρόνια;

**β)** πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμείνει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

178. **Από ένα διαγώνισμα του 2001.** Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι τιμές μίας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες συχνότητες τους εκτός της πέμπτης.



$x_i$	$\nu_i$
2	1
3	3
4	1
5	2
6	;
7	1

- (α)<sup>21</sup> Να βρείτε την πέμπτη συχνότητα αν γνωρίζετε ότι η μέση τιμή είναι 4,4.
- (β') Να αποδείξετε ότι όποια τιμή και να πάρει η πέμπτη συχνότητα θα είναι πάντα  $4 \leq \bar{x} \leq 6$ .

179. **Από ένα διαγώνισμα του 2002.** Η μέση ηλικία 18 αγοριών και 12 κοριτσιών μίας τάξης είναι 15,4 χρόνια. Εάν η μέση ηλικία των αγοριών είναι 15,8 χρόνια:

- (α)<sup>22</sup> Να βρείτε την μέση ηλικία των κοριτσιών.
- (β') Να αποδείξετε ότι αν κανένας μαθητής ή μαθήτρια δεν είναι κάτω των 15 ετών τότε το πολύ 6 άτομα μπορούν να είναι 17 ετών.

180. **Από τις εξετάσεις του 2003 (Εσπερινά Λύκεια).** Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

Ωρες υπερωριακής απασχόλησης, Κλάσεις (-)	Αθροιστική συχνότητα $N_i$
0-2	5
2-4	15
4-6	20
6 - 8	35
8 - 10	40

Να βρείτε:

- (α') το μέγεθος του δείγματος,
- (β') τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων και
- (γ') τη μέση τιμή.

181. **Από τις εξετάσεις του 2002.** Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ: 8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

- (α') Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.
- (β') Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.
- (γ') Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

<sup>21</sup>Σχολικό βιβλίο, σελίδα 101 ασκ. 10

<sup>22</sup>Σχολικό βιβλίο, σελίδα 100 ασκ. 5



182. **Από τις εξετάσεις του 2003.** Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

- (α') Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.
- (β') Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.
- (γ') Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;
- (δ') Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.
183. Στα δεδομένα 1, 2,  $x$ ,  $y$  έχουμε μέση τιμή  $\frac{5}{2}$  και τυπική απόκλιση  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ . Βρείτε τα  $x$ ,  $y$ .
- ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $x = 3$ ,  $y = 4$ ,  $x = 4$ ,  $y = 3$
184. Να αποδείξετε ότι ο σταθμικός μέσος κάποιων τιμών βρίσκεται μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης τιμής.
185. Μια βιομηχανία κάνει συσκευασία γάλακτος σε 4 μεγέθη κουτιών και σε ποσοστά: 10%, 20%, 30% 40% με αντίστοιχο κόστος συσκευασίας 16, 12, 8, 4 λεπτά ανά κουτί.
- (α') Να βρεθεί το μέσο κόστος συσκευασίας και η τυπική απόκλιση του κόστους αυτού.
- (β') Αν το κόστος κάθε συσκευασίας αυξηθεί κατά 10% να βρεθεί η νέα τυπική απόκλιση του κόστους συσκευασίας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η μέση τιμή είναι 8 και η τυπική απόκλιση είναι 4. Μετά την αύξηση του 10% θα γίνουν 8,8 και 4,4.

186. Ένα δείγμα αποτελείται από 5 αριθμούς. Οι 4 από αυτούς είναι οι 1, 2, 3, 4. Πως πρέπει να επιλεγεί ο 5ος ώστε το δείγμα να παρουσιάζει την μικρότερη δυνατή τυπική απόκλιση;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $x = 5$

187. Κατά μία μέτρηση του αναστήματος των 10 αθλητών βρέθηκε ότι η μέση τιμή του ήταν 1,71. Ωστόσο στη συνέχεια βρέθηκε ότι οι υπολογισμοί έγιναν με μία λάθος τιμή: Αντί του πραγματικού αναστήματος 1,87 ενός αθλητή είχε δοθεί η τιμή 1,78. Ποιά είναι η πραγματική μέση τιμή του αναστήματος;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1,72



188. Στην παρακάτω κατανομή

[2, 3)	5
[3, 4)	6
[4, 5)	$x$
[6, 7)	10

η διάμεσος είναι  $\frac{40}{9}$ . Να βρεθεί το  $x$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $x = 9$

189. Από τις εξετάσεις του 2003 (Εσπερινά Λύκεια). Οι χρόνοι σε ώρες (παρατηρήσεις) που έξι από τους επίγειους σταθμούς δεν είχαν επαφή με τον Ελληνοκυπριακό δορυφόρο είναι:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 4, \quad t_6 = 5$$

(α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και τη διάμεσο  $\delta$  των παρατηρήσεων.

(β') Αν  $f(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + (t_3 - x)^2 + (t_4 - x)^2 + (t_5 - x)^2 + (t_6 - x)^2$  τότε:

i. να αποδείξετε ότι  $f'(\bar{x}) = 0$

ii. να αποδείξετε ότι  $f(\bar{x}) = 6s^2$ , όπου  $s^2$  είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων και

iii. να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(\bar{x}, f(\bar{x}))$ .

190. Να βρείτε την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο συντελεστής μεταβολής των παρακάτω δεδομένων 1, 2, 3,  $x$  ( $x > 0$ ).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι  $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{3x^2 - 12x + 20}}{x+6}$  το οποίο για  $x = \frac{7}{3}$  παίρνει την μέγιστη τιμή του  $\frac{1}{5}\sqrt{3} = 0,35$ . Άρα η μέγιστη τιμή του CV είναι 35%.

191. Να αποδείξετε ότι αν έχουμε  $r$  πληθυσμούς με  $n_1, \dots, n_r$  οι οποίοι, ως προς μία μεταβλητή  $X$ , έχουν μέσες τιμές  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  τότε η ένωση τους έχει μέση τιμή τον σταθμικό μέσο των  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  με βάρη  $n_1, \dots, n_r$ .

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αν έχετε λύσει την άσκηση 153 έχετε λύσει το πρόβλημα για  $r = 2$ .

192. Έστω ότι σε μία κατανομή ενός δείγματος μεγέθους  $\nu$  εμφανίζονται οι τιμές:

$$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_\nu$$

να αποδείξετε ότι για η διάμεσος είναι:

$$\delta = \begin{cases} t_{\frac{\nu+1}{2}} & , \quad \nu = \text{περιττός} \\ \frac{t_{\frac{\nu}{2}} + t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2} & , \quad \nu = \text{άρτιος} \end{cases}$$

193. Ένα διαγώνισμα του 2004.

#### ZΗΤΗΜΑ 1

Έξη διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί έχουν μέση τιμή 15.



- (α)<sup>23</sup>
- Τους αριθμούς
  - Τη διάμεσο τους
- (β') Να βρείτε την διασπορά τους.

## ΖΗΤΗΜΑ 2

Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι τιμές μίας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες συχνότητες τους εκτός της πέμπτης.

$x_i$	$\nu_i$
2	1
3	3
4	1
5	2
6	$n$
7	1

- (α) Να βρείτε την πέμπτη συχνότητα αν γνωρίζετε ότι η μέση τιμή είναι 4,4.<sup>24</sup>
- (β') i. Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής μεταβολής είναι

$$50\sqrt{2}\frac{\sqrt{25n+72}}{16+3n}\%$$

- ii. Για ποια τιμή του  $n$  ο συντελεστής μεταβολής είναι  $14\sqrt{2}\sqrt{3}\%$ ;

194. Ένα άλλο διαγώνισμα του 2004 (των απόντων του προηγούμενου).

## ΖΗΤΗΜΑ 1

Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 6. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 5, 8, 9.<sup>25</sup>

- (α) Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς.
- (β') Να βρείτε την διασπορά τους.

## ΖΗΤΗΜΑ 2

Σε μία κάλπη υπάρχουν άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες σε αναλογία 10%, 20%, 30% και 40% αντιστοίχως. Μία άσπρη μπάλα έχει βάρος 10gr, μία μαύρη 11gr, μία κόκκινη 12gr και μία πράσινη 13gr.

- (α) Να βρείτε τη μέση τιμή του βάρους για όλες τις μπάλες.<sup>26</sup>
- (β') Είναι το δείγμα που περιέχεται στην κάλπη ομογενές;

<sup>23</sup>Σχολικό βιβλίο, σελίδα 100 ασκ. 1

<sup>24</sup>Σχολικό βιβλίο, σελίδα 101 ασκ. 10

<sup>25</sup>Σχολικό βιβλίο, σελίδα 101 ασκ. 9

<sup>26</sup>Σχολικό βιβλίο, σελίδα 100 ασκ. 6



195. **Από τις εξετάσεις του 2004.** Στην “Αττική οδό” εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

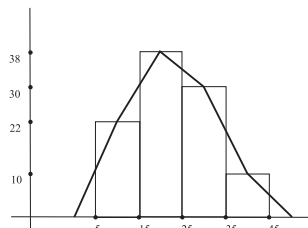
Κλάσεις σε χλμ	Κέντρο κλάσης $x_i$	Συχνότητα $\nu_i$	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$ σε χλμ	Αθρ. Σχετ. συχνότητα $F_i\%$
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

- (α) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντιστοίχων μεγεθών
- (β) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα  $(x_i, f\%)$  και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
- (γ) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$ .
- (δ) Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

	[5, 15)	10	60	30	60	30
(α')	[15, 25)	20	76	38	136	68
	[25, 35)	30	44	22	180	90
	[35, 45)	40	20	10	200	100
	Σύνολο		200	100		



(β')  
(γ)  $\bar{x} = 21,2$  (δ) 64 χιλιάδες αυτοκίνητα

196. Για τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα

Κλάσεις	Συχνότητες $\nu_i$
[0,4)	35
[4,8)	$\kappa$
[8,12)	28
[12,16)	$\lambda$
[16,20)	12
ΣΥΝΟΛΟ	100

η μέση τιμή είναι 8,2.

(α) Να βρείτε τις συχνότητες  $\kappa$ ,  $\lambda$ .

(β) Να βρείτε τη διάμεσο.

(γ) Να βρείτε τη διάσπορά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α)  $\kappa = 12$ ,  $\lambda = 13$  (β)  $\delta = 8 + \frac{3}{25} \times 4 = \frac{212}{25} = 8,48$  (γ)  $s^2 = 30,84$ 

197. Σε μία κανονική κατανομή το εύρος είναι 18 και το κατώτερο 16% φθάνει μέχρι την τιμή 10. Ποια είναι η μέση τιμή;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 13

198. Ένα διαγώνισμα του 2005.

## ΖΗΤΗΜΑ 1

Ο μέσος χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε το πρωί από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο είναι 10 λεπτά με τυπική απόκλιση 2 λεπτά. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή:

(α) Να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται:

- i. κάτω από 8 λεπτά
- ii. πάνω από 14 λεπτά
- iii. το πολύ 10 λεπτά
- iv. από 6 έως 12 λεπτά

για να πάνε στο σχολείο τους.

(β) Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής του παραπάνω δείγματος.





## ΖΗΤΗΜΑ 2

Σε μια κάλπη υπάρχουν άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες σε αναλογία 10%, 20%, 30% και 40% αντίστοιχα αλλά δε γνωρίζουμε πόσες μπάλες υπάρχουν στην κάλπη. Μια άσπρη μπάλα έχει βάρος 10 gr, μια μαύρη 11 gr, μια κόκκινη 12 gr και μια πράσινη 13 gr.

(α') Να βρείτε

- i. τη μέση τιμή και
- ii. τη διάμεσο

του βάρους όλων των μπαλών

- (β')
- i. Να βρείτε την διασπορά του βάρους όλων των μπαλών.
  - ii. Αφαιρούμε από την κάλπη μία μπάλα από κάθε είδος. Η μέση τιμή άραγε θα αυξηθεί, θα ελαττωθεί ή θα παραμείνει ίδια; (Δεκτές μόνο αιτιολογημένες απαντήσεις).

199. Σε μία επιχείρηση ο μέσος μηνιαίος μισθός του προσωπικού είναι 1200 ευρώ. Ο μέσος μισθός των ανδρών της επιχείρησης είναι 1250 ευρώ και των γυναικών 1100 ευρώ. Αν οι γυναίκες πάρουν αύξηση 5% πως θα διαμορφωθεί ο μέσος μηνιαίος μισθός των εργαζομένων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1241, 7 ευρώ

200. Οι τιμές ενός δείγματος είναι 5, 4, 3, 6, 12 και οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες τους είναι αντίστοιχως 0, 2, 0, 3, 0,4 0, 8 και 1. Βρίτε τη μέση τιμή τους.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 4, 14

201. Ο μέσος μισθός των εργαζομένων σε μία επιχείρηση είναι  $m$ . Αν όλοι οι μισθοί αυξηθούν κατά ποσοστό  $a\%$   $0 < a < 100$  και μετά από κάποιο διάστημα μειωθούν κατά  $a\%$  ποιος θα είναι ο μέσος μισθός των εργαζομένων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $m \left(1 - \frac{a^2}{10000}\right)$

## 3 Πιθανότητες

202. Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{x, y, z, t, s, k\}$  και τα ενδεχόμενα του  $A = \{x, y, s, k\}$ ,  $B = \{y, t, s\}$ . Να συμπληρώσετε τι ισότητες:

(α')  $A \cap B =$

(β')  $A \cup B =$

(γ')  $A - B =$

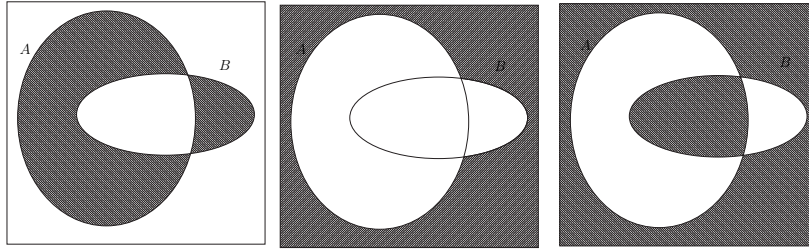
(δ')  $A' =$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $A \cap B = \{s, y\}$ ,  $A \cup B = \{x, t, s, y, k\}$ ,  $A - B = \{x, k\}$ ,  $A' = \{z, t\}$

203. Σε κάθε ένα από τα παρακάτω διαγράμματα του Venn είναι  $P(A) = 0,4$ ,  $P(B) = 0,2$  και  $P(A \cap B) = 0,1$ . Να βρείτε την πιθανότητα του γραμμωσιασμένου ενδεχομένου.



Α Α



ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 0, 4, 0, 5 και 0, 6

204. Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ . Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $A = \{\omega_1, \omega_2\}$  στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α')  $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4)$

(β')  $P(\omega_1) = 2P(\omega_2) = 3P(\omega_3) = 4P(\omega_4)$

(γ')  $P(\omega_1) + P(\omega_3) = 0, 2, P(\omega_1) + P(\omega_4) = 0, 3, P(\omega_3) = 2P(\omega_1)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $\frac{1}{2}$  (β')  $\frac{18}{25}$  (γ')  $\frac{17}{30}$ 

205. Για τα ενδεχόμενα  $X, Y$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι γνωστό ότι  $P(X) = 2P(Y)$  και ότι  $P(X \cap Y) = \frac{1}{4}P(X)$ . Έστω ότι  $P(X) = \lambda$ . Να εκφράσετε συναρτήσει του  $\lambda$  τις παρακάτω πιθανότητες:

(α')  $P(Y')$

(β')  $P((X \cap Y) \cup (Y - X))$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $1 - \frac{\lambda}{2}$ , (β')  $\frac{\lambda}{2}$ 

206. Να επαληθεύσετε τις ισότητες

(α')  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(β')  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(Νόμοι του de Morgan)

207. Να βρεθεί η πιθανότητα  $P(A)$  αν, κατά περίπτωση, είναι γνωστό ότι:

(α')  $P(A') = \frac{3}{4}P(A)$

(β')  $5P(A) + 2P(A') = 4$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $\frac{4}{7}$ , (β')  $\frac{2}{3}$ 

208. Μία τάξη έχει 30 παιδιά. Είναι γνωστό ότι η πιθανότητα σε τυχαία επιλογή ενός παιδιού να είναι αγόρι είναι  $\frac{2}{5}$ . Πόσα κορίτσια έχει η τάξη; ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 18

209. Να αποδείξετε ότι για κάθε ενδεχόμενο ισχύει πάντα

$$0 \leq P(X)P(X') \leq \frac{1}{4}$$



210. Από τις εξετάσεις του 1994, Δέσημη 4η. Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και  $A, B$  υποσύνολα του  $\Omega$ . Έστω ότι  $P(A') \leq 0,28$  και  $P(B') \leq 0,71$ . Να αποδείξετε ότι

(α')  $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$

(β') Το ενδεχόμενο  $A \cap B$  δεν είναι το  $\emptyset$ .

211. Έστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$  και η απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε υποσύνολο  $A$  του  $\Omega$  ένα πραγματικό αριθμό  $P(A)$  εξής:

(α')  $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{3}, P(\omega_4) = 0$

(β')  $P(\emptyset) = 0$

(γ') Για κάθε άλλο  $A \subseteq \Omega$  το  $P(A)$  είναι το άθροισμα των τιμών των  $P(\omega_i)$  με  $\omega_i \in A$ .

(α') Να επαληθεύετε ότι η  $P$  ορίζει μία πιθανότητα στο  $\Omega$ .

(β') Να ελέγξετε την ισχύ των παρακάτω:

i.  $P(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$

ii.  $P(A) = 1 \Rightarrow A = \Omega$

iii.  $A \subseteq B, P(A) = P(B) \Rightarrow A = B$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όλοι οι ισχυρισμοί είναι λάθος.

212. Να βρείτε το λάθος:

Να αποδείξετε ότι αν για ένα ενδεχόμενο  $A$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει  $P^2(A) + P^2(A') = 1$  τότε  $A = \emptyset$  ή  $A = \Omega$ .

Λύση

$$\begin{aligned} P^2(A) + P^2(A') = 1 &\implies \\ P^2(A) + (1 - P(A))^2 = 1 &\implies \\ P^2(A) + 1 - 2P(A) + P^2(A) = 1 &\implies \\ 2P^2(A) - 2P(A) = 0 &\implies \\ 2P(A)(P(A) - 1) = 0 &\implies \\ P(A) = 0 \text{ ή } P(A) - 1 = 0 &\implies \\ P(A) = 0 \text{ ή } P(A) = 1 &\implies \\ A = \emptyset \text{ ή } A = \Omega &\end{aligned}$$

213. Από τις εξετάσεις του 2000. Από τους 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποιά είναι ή πιθανότητα ο μαθητής:

(α') να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

(β') να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;

(γ') να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $\frac{4}{15}$ , (β')  $\frac{1}{6}$  (γ')  $\frac{11}{15}$



214. Στους τελικούς του διασχολικού πρωταθλήματος βόλει μετέχουν οι ομάδες Α, Β, Γ, Δ. Εκτιμάται ότι η Α έχει τριπλάσιες πιθανότητες να πάρει το πρωτάθλημα από ότι η Β, η Β έχει τριπλάσιες πιθανότητες από ότι η Γ και η Γ έχει διπλάσιες από της Δ. Τι πιθανότητα έχει να πάρει το πρωτάθλημα η ομάδα Δ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{1}{27}$

215. **Από τις εξετάσεις του 2001.** Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις:

Βάρος σε κιλά [ - )	Αθροιστική Συχνότητα $F_i$
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

- (α) Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.
- (β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.
- (γ) Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.
- Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.
  - Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.
216. Να αποδείξετε ότι αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε:

$$P(A \cup B) \geq \frac{P(A) + P(B) + |P(A) - P(B)|}{2}$$

και

$$P(A \cap B) \leq \frac{P(A) + P(B) - |P(A) - P(B)|}{2}$$

217. Σε μία επιχείρηση με  $\nu$  εργαζόμενους απασχολούνται  $\alpha$  άνδρες και  $\beta$  πτυχιούχοι ανώτατης σχολής. Οι εργαζόμενες γυναίκες χωρίς πτυχίο ανώτατης σχολής είναι  $\gamma$ . Επιλέγουμε ένα εργαζόμενο στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι πτυχιούχος άνδρας;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\nu} - 1$

218. Ο ποιοτικός έλεγχος σε ένα μηχάνημα που παράγεται από μία βιομηχανία έδειξε ότι:

- (α') Η πιθανότητα να μην λειτουργεί είναι 0,04.
- (β') Η πιθανότητα έχει άλλο ελάττωμα είναι 0,05.
- (γ') Η πιθανότητα να μην λειτουργεί και να έχει και άλλο ελάττωμα είναι 0,02.

Επιλέγουμε στην τύχη ένα μηχάνημα. Να βρεθεί η πιθανότητα:



- (α') Να μην λειτουργεί ή να έχει και άλλο ελάττωμα.  
 (β') Να μην λειτουργεί μόνο ή να έχει και άλλο ελάττωμα μόνο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 0,06 και 0,03

219. Αν για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν  $P(A) = 0,8$  και  $P(B) = 0,4$  να αποδείξετε ότι:

- (α') Τα  $A$  και  $B$  δεν είναι ασυμβίβαστα  
 (β')  $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$

220. Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ώστε:

$$|2P(A) + 1| - |P(A) - 3| = 4\lambda$$

και

$$P(B) = 1 - \ln(\kappa + 1)$$

όπου  $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda \neq 0$ .

- (α') Να υπολογιστούν οι αριθμοί  $\kappa, \lambda$ .  
 (β') Να αποδείξετε ότι

$$\ln \frac{e}{2} \leq P(A \cup B) \leq \ln \frac{e\sqrt[3]{e^2}}{2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\lambda = 0$ ,  $\kappa = 0, 1$

221. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

- (α') Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε:

$$P(A - B) + P(B) = P(B - A) + P(A)$$

- (β') Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε:

$$P(A \cup B) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

- (γ') Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ , με:  $P(A) = 0,7$  και  $P(B) = 0,6$  τότε τα  $A, B$  είναι ασυμβίβαστα.

- (δ') Αν ενδεχόμενα  $A, B$  είναι ασυμβίβαστα τότε

$$P(B) > P(A)$$

- (ε') Το βέβαιο ενδεχόμενο και το αδύνατο ενδεχόμενο είναι αντίθετα ενδεχόμενα

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Σ, Λ, Λ, Λ, Σ

222. Από τις εξετάσεις του 2000, Δέση Ι. Έστω  $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$  είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Αν  $\lambda \in \Omega$ , θεωρούμε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \lambda^2$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα  $X, Y$  όπου:



- (α)  $X$ : Η μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $[0, 5]$  είναι μεγαλύτερη ή ίση του  $68/3$ .  
 (β)  $Y$ : Η ελάχιστη τιμή της  $f$  στο  $[0, 5]$  είναι μικρότερη ή ίση του 4.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $X$ ,  $Y$ ,  $X \cap Y$  και  $X \cup Y$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $P(X) = \frac{7}{10}$ ,  $P(Y) = \frac{2}{10}$ ,  $P(X \cap Y) = 0$ ,  $P(X \cup Y) = \frac{9}{10}$

223. Από τις εξετάσεις του 2002. Έστω  $A$ ,  $B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με

$$P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$$

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (α) Να δείξετε ότι  $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$ .  
 (β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο

$$x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

- (γ) Εάν τα ενδεχόμενα  $A$ ,  $B$  είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι

$$f(P(A)) = f(P(B))$$

224. Αν ο αριθμός  $x$  προκύπτει από την ρίψη ενός ζαριού ποια είναι η πιθανότητα οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5,  $x$  να έχουν μέση τιμή μεγαλύτερη του  $\frac{23}{7}$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{1}{3}$

225. Σε ένα ορεινό χωριό κατοικούν  $\mu$  Έλληνες και  $\nu$  αλλοεθνείς με  $\mu < \nu$ .

- (α) Επιλέγουμε ένα κάτοικο αυτού του χωριού τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι Έλληνας.  
 (β) Πόσοι Έλληνες πρέπει να μετοικήσουν στο χωριό αυτό ώστε η πιθανότητα του ερωτήματος (α) να διπλασιασθεί.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α)  $\frac{\mu}{\mu+\nu}$  (β) περίπου  $\frac{\mu(\mu+\nu)}{\nu-\mu}$ .

226. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται μία κατανομή για την οποία είναι γνωστό ότι η μέση τιμή είναι  $\frac{170}{29}$ . Επιλέγουμε από το δείγμα τυχαία ένα άτομο. Ποιά είναι η πιθανότητα να ανήκει στην κλάση  $[3, 5)$ ;

Κλάση	Συχνότητα	
[1,3)	3	
[3,5)	7	
[5,7)	$x$	
[7,9)	11	

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{7}{29}$

227. Έστω ένας δειγματικός χώρος  $\Omega$  και δύο ενδεχόμενα του  $A$ ,  $B$ . Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:



$X$ : Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα  $A, B$

$Y$ : Πραγματοποιούνται και τα δύο από τα  $A, B$  ή κανένα.

Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το  $X$  είναι ίση με την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το  $Y$ .

228. Στον δικτυακό τόπο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας υπάρχει η παρακάτω άσκηση:

Έστω  $A, B$  δύο ενδεχόμενα ενός πεπερασμένου δ.χ. ενός πειράματος τύχης. Αν  $P(A) = P(A \cup B')$  και  $P(B) = P(A' \cap B)$  να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα  $A$  είναι  $B$  είναι συμπληρωματικά.

η οποία συνοδεύεται με την ακόλουθη υπόδειξη

Αρκεί να δείξετε ότι  $P(A) + P(B) = 1$ .

Τι δεν πάει καλά;

229. **Από τις εξετάσεις του 1998 (Δέση IV).** (Μέρος ενός θέματος) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4(x-1)(x^2 - 5x + 6)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \}$  με  $\omega_1 = x_1$ ,  $\omega_2 = x_2$ ,  $\omega_3 = x_1$ ,  $\omega_4 = 4x_1$ ,  $\omega_5 = 4x_2$ ,  $\omega_6 = 4x_3$  όπου  $x_1, x_2, x_3$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . Οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ικανοποιούν τις σχέσεις  $P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) = 3P(\omega_2) = 3P(\omega_1)$ . Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του  $\Omega$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$  και επομένως  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 8, 12\}$ . Είναι  $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{12}$  και  $P(\omega_4) = P(\omega_5) = P(\omega_6) = \frac{1}{4}$ .  $P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{12}$ ,  $P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{4}$ .

230. Να αποδείξετε ότι για τρία οποιαδήποτε ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(B \cap \Gamma) - P(\Gamma \cap A) + P(A \cap B \cap \Gamma)$$

231. Σε ένα κουτί υπάρχουν 10 κάρτες αριθμημένες από 1 έως 10. Επιλέγουμε μία κάρτα στην τύχη. Να βρεθεί ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός της κάρτας

(α) Να είναι ίσος με το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ .

(β) Να είναι ίσος με το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 1}$ .

(γ) Να είναι ίσος με την μέση τιμή των δεδομένων 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

(δ) Να είναι θέση ακροτάτου της συνάρτησης  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 18$ .

(ε) Να είναι μικρότερος από το ελάχιστο της συνάρτησης  $g(x) = 7e^x + \frac{1}{e^x}$ .

(ς) Να είναι μεγαλύτερος ή ίσος της διαμέσου των δεδομένων

$$2, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 6, 7, 1, 2, 9, 4, 7$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:



$$(\alpha') \frac{1}{10} \quad (\beta') 0 \quad (\gamma') \frac{1}{10} \quad (\delta') \frac{3}{10} \quad (\varepsilon') \frac{1}{2} \quad (\zeta') \frac{7}{10}$$

232. Σε μία επιχείρηση  $A$  η πιθανότητα, με τυχαία επιλογή, να επιλέξουμε άνδρα εργαζόμενο είναι  $0,32$ . Σε μία άλλη επιχείρηση  $B$  με τριπλάσιο αριθμό εργαζομένων η αντίστοιχη πιθανότητα είναι  $0,67$ . Οι δύο επιχειρήσεις συγχωνεύονται χωρίς να γίνει αύξηση ή μείωση του προσωπικού τους. Ποια είναι η πιθανότητα στη νέα επιχείρηση ένας εργαζόμενος να είναι άνδρας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $0,58$

233. Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου ισχύει  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Να αποδείξετε ότι  $P(A - B) = P(A) \cdot P(B')$ .

234. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 8x^3 - 17x^2 + 12x + 8$  και τα ενδεχόμενα  $A, B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Να αποδείξετε ότι αν η  $f$  παρουσιάζει ακρότατα στις θέσεις  $P(A), P(B)$  τότε τα  $A, B$  δε μπορούν να είναι ασυμβίβαστα.

235. Έστω τα δείγματα

$$\Delta_1 : 5, 6, 8, 12, 14, 19$$

$$\Delta_2 : 3, 4, 5, 4, 3$$

Από το δείγμα  $\Delta_2$  επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς.

( $\alpha'$ ) Να γράψετε το δειγματικό χώρο του παραπάνω πειράματος τύχης.

( $\beta'$ ) Τους δύο αριθμούς που προκύπτουν από το παραπάνω πείραμα τους προσθέτουμε στο δείγμα  $\Delta_1$ . Ποια είναι η πιθανότητα το νέο δείγμα που θα προκύψει να έχει μέση τιμή  $9$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

( $\alpha'$ ) Είναι  $\Omega = \{(3, 4), (3, 5), (3, 4), (3, 3), (4, 5), (4, 4), (4, 3), (5, 4), (5, 3), (4, 3)\}$  όπου με έντονους χαρακτήρες (bold) συμβολίσαμε το δεύτερο  $4$  και το δεύτερο  $3$  του  $\Delta_2$ .

( $\beta'$ )  $\frac{3}{10}$

236. Να αποδείξετε ότι αν  $A, B$  είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε θα ισχύει

$$P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}$$

237. Να αποδείξετε ότι αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε θα ισχύει  $P(A' \cap B') \geq 1 - P(A) - P(B)$ .

238. Να αποδείξετε ότι αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε ισχύει

$$P(A \cap B) \leq P(A)P(B) + P(A' \cap B')$$

239. Μία νέα που αναζητεί εργασία έχει υποβάλει αίτηση σε δύο αλυσίδες καταστημάτων. Η πιθανότητα να προσληφθεί στην πρώτη αλυσίδα είναι  $70\%$  στην δεύτερη  $50\%$  και η τουλάχιστον μία επιχείρηση να μην την προσλάβει είναι  $60\%$ . Ποια είναι η πιθανότητα να βρεί εργασία σε μία τουλάχιστον από τις δύο αλυσίδες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $80\%$

240. Ένα διαγώνισμα του 2002.





## ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω  $A$  και  $B$  δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοια ώστε  $A \subseteq B$ .

(α') Να αποδείξετε ότι  $B' \subseteq A'$ .

(β') Να αποδείξετε ότι  $P(A' \cap B') = 1 - P(B)$ .

## ΖΗΤΗΜΑ 2

Για τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύουν  $P(A) = \frac{17}{30}$ ,  $P(B) = \frac{7}{15}$  και  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ .

(α') Να βρείτε την  $P(A \cap B)$

(β') Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα  $A$ ,  $B$ .

## 241. Ένα διαγώνισμα του 2003.

## ΖΗΤΗΜΑ 1

Για τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι γνωστό ότι  $P(A) = P(B)$ ,  $P(A \cup B) = 0,6$  και  $P(A \cap B) = 0,2$ .

(α') Να βρείτε την  $P(A)$

(β') Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το  $A$  αλλά όχι το  $B$  είναι ίση με την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το  $B$  αλλά όχι το  $A$ .

## ΖΗΤΗΜΑ 2

Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο.

(α') Από τον πληθυσμό επιλέγουμε ένα άτομο τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει τουλάχιστον μία ασθένεια;

(β') Από τον πληθυσμό επιλέγουμε ένα άτομο τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει ακριβώς μία ασθένεια;

242. Να αποδείξετε ότι για κάθε ενδεχόμενο  $A$  ισχύει:

(α')  $P^2(A) + P^2(A') \geq \frac{1}{2}$

(β')  $P^4(A) + P^4(A') \geq \frac{1}{8}$

Μπορείτε να βγάλετε κάποιο συμπέρασμα για το άθροισμα

$$P^n(A) + P^n(A')$$

όπου  $n$  θετικός ακέραιος;

## 243. Ένα διαγώνισμα του 2004.

## ΖΗΤΗΜΑ 1



Έστω  $A$  και  $B$  δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου.

- (α') Να γράψετε το ενδεχόμενο  $A \cup B$  ως ένωση τριών ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων.
- (β') Ονομάστε  $X, Y, Z$  τα ενδεχόμενα που χρησιμοποιήσατε στο ερώτημα 1. (ποιο ενδεχόμενο θα ονομασθεί πως δεν έχει σημασία). Να αποδείξετε ότι

$$X' \cap Y' \cap Z' = A' \cap B'$$

## ZΗΤΗΜΑ 2

Έστω  $A$  ένα ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τέτοιο ώστε

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$$

- (α') Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A), P(A')$ .
- (β') Για ένα ενδεχόμενο  $B$  του  $\Omega$  ισχύει
- Η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν το  $A$  και το  $B$  είναι  $\frac{1}{7}$ .
  - Η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το  $A$  και να μην πραγματοποιηθεί το  $B$  είναι  $\frac{2}{7}$ .
- Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το  $B$ .

244. **Από τις εξετάσεις του 2003.** Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

- (α') γυναίκα ή φιλόλογος  
 (β') γυναίκα και όχι φιλόλογος  
 (γ') άνδρας και φιλόλογος  
 (δ') άνδρας ή φιλόλογος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α') 65% (β') 25% (γ') 10% (δ') 75%

245. **Από τις εξετάσεις του 2004.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$ . Οι πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(B)$  δύο ενδεχομένων  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ίσες με τις τιμές του  $x$ , στις οποίες η  $f$  έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

- (α') Να δείξετε ότι  $P(A) = \frac{1}{2}$  και  $P(B) = \frac{1}{3}$ .
- (β') Για τις παραπάνω τιμές των  $P(A), P(B)$  καθώς και για  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ , να βρείτε τις πιθανότητες:
- i.  $P(A \cap B)$
  - ii.  $P(A - B)$
  - iii.  $P[(A \cap B)']$
  - iv.  $P[(A - B) \cup (B - A)]$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $\frac{1}{6}$  (β')  $\frac{1}{3}$  (γ')  $\frac{5}{6}$  (δ')  $\frac{1}{2}$

246. Από ένα πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $s$  επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο. Ποια είναι η πιθανότητα να επαληθεύει την ανίσωση  $|x - \mu| > s$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 32%

247. Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου ισχύει

$$9P^2(A) + 25P^2(B) + 13 = 12P(A) + 30P(B)$$

Να αποδείξετε ότι δεν είναι ασυμβίβαστα.

248. Ένας δειγματικός χώρος απαρτίζεται από τρία αποτελέσματα που οι πιθανότητες τους είναι οι δεκαδικοί λογάριθμοι των αριθμών  $a, a^2, a^3$ . Ποιες είναι οι πιθανότητες των αποτελεσμάτων αυτών;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ .

249. Για τα ενδεχόμενα  $A, B$  είναι γνωστό  $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ . Να αποδείξετε ότι  $P(A - B)P(B - A) \leq \frac{1}{36}$ .

250. Σε ένα δειγματικό χώρο όλα τα απλά ενδεχόμενα έχουν θετική πιθανότητα. Να αποδείξετε ότι αν για δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ισχύει  $1 + P(A)P(B) = P(A) + P(B)$  τότε κάποιο από αυτά είναι το βεβαιο ενδεχόμενο.

251. Σε μία κάλπη τοποθετούμε ένα σφαιρίδιο που αναγράφει τον αριθμό 1, δύο σφαιρίδια που αναγράφουν τον αριθμό 2, τρία σφαιρίδια που αναγράφουν τον αριθμό 3 κ.ο.κ. και τέλος  $m$  σφαιρίδια που αναγράφουν τον αριθμό  $m$ . Από την κάλπη επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο. Ποια είναι η πιθανότητα να αναγράφει τον αριθμό  $m$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{2}{m+1}$

252. Ένας δειγματικός χώρος έχει  $n$  ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα. Υπάρχει άραγε ενδεχόμενο με πιθανότητα  $\frac{3}{2n}$ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι.

253. Για τα ενδεχόμενα  $A, B, \Gamma$  είναι γνωστό ότι  $A \subseteq B \subseteq \Gamma$  και ότι  $P(A) = \frac{1}{12}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$  και  $P(\Gamma) = \frac{1}{3}$ . Να βρείτε τα

$$(α') P(B - A) \quad (β') P(\Gamma - B) \quad (γ') P(\Gamma - (B - A))$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$(α') \frac{1}{6} \quad (β') \frac{1}{12} \quad (γ') \frac{1}{6}$$

254. Ρίχνουμε ένα (αμερόληπτο) ζάρι δύο φορές. Ποιο από τα παρακάτω ενδεχόμενα είναι πιθανότερο: Το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 7 ή το άθροισμα των ενδείξεων να είναι 8;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το πρώτο.

255. Ένα εμπορικό κέντρο έχει 5 ορόφους αλλά όχι ισόγειο. Από μετρήσεις έχει διαπιστωθεί ότι μία συγκεκριμένη ώρα της ημέρας ο πρώτος όροφος συγκεντρώνει διπλάσιους πελάτες από τον τρίτο, τους μισούς από τον τέταρτο



και το 20% των πελατών του δευτέρου. Αν ο πέμπτος όροφος συγκεντρώνει τόσους πελάτες όσους οι δύο προηγούμενοι του ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης του εμπορικού κέντρου να βρισκείται στον τρίτο όροφο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{1}{22}$

256. Σε μία πόλη η πιθανότητα ένας κάτοικος να οδηγεί αυτοκίνητο είναι  $\frac{1}{3}$ , να οδηγεί μοτοσυκλέτα είναι  $\frac{1}{5}$  και η πιθανότητα να μην οδηγεί τίποτα από τα δύο είναι  $\frac{8}{15}$ . Αν το πλήθος εκείνων που οδηγούν και τα δύο είναι 100 πόσους κατοίκους έχει η πόλη;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1500

257. Να αποδείξετε ότι αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε  $P(A - B) + P(B - A) \leq 1$ .

258. Έστω ένα δείγμα μεγέθους  $n$  που απαρτίζεται από ανα δύο διάφορες παρατηρήσεις με διάμεσο  $\delta$ . Από το δείγμα επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο. Έστω  $a$  η τιμή του. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα  $\{a \leq \delta\}$ ,  $\{a \geq \delta\}$  είναι ισοπίθανα.

259. Ένα διαγώνισμα του 2005.

#### ZΗΤΗΜΑ 1

Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέρφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή,

- (α') Να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.  
 (β') Να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τουλάχιστον τρία παιδιά.

#### ZΗΤΗΜΑ 2

Για δύο ενδεχόμενα  $A, B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ :

- (α') Να δείξετε ότι  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$   
 (β') Να δείξετε ότι  $P(A') + P(B') \leq 2 - P(A \cup B)$

260. Από τις εξετάσεις του 2005. Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , ώστε να ισχύουν:

- (i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα  $A, B$  είναι  $\frac{7}{8}$ .  
 (ii) Οι πιθανότητες  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο  $X = \{k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\}$ , όπου

$$k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$$

- (α') Να βρεθεί το  $k$ .



(β') Να βρεθούν τα  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ') Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $A$ .

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο  $A$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $k = \frac{3}{4}$  (β')  $P(B) = \frac{3}{4}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$  (γ')  $\frac{5}{8}$  και  $\frac{1}{8}$

261. Έστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$  ένας δειγματικός χώρος στον οποίο οι πιθανότητες των  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$  είναι ανάλογες των αριθμών  $1, 2, 3, \dots, \nu$  δηλαδή ισχύει:

$$\frac{P(\omega_1)}{1} = \frac{P(\omega_2)}{2} = \frac{P(\omega_3)}{3} = \dots = \frac{P(\omega_\nu)}{\nu}$$

Να αποδείξετε ότι αν για τον ακέραιο  $k$  είναι  $1 \leq k \leq \nu$  τότε

$$P(\omega_k) = \frac{2k}{\nu(\nu+1)}$$

262. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Για ένα ενδεχόμενο  $A$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι γνωστό ότι  $P(A) = f(x)$ .

(α') Να εξετάσετε αν μπορεί το  $A$  να είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

(β') Να αποδείξετε ότι θα είναι πάντα  $x > 0$ .

(γ') Αν, επιπλέον, ισχύει ότι  $P(A') = f(x+1)$  να βρείτε τα  $P(A)$ ,  $P(A')$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (γ')  $P(A) = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ ,  $P(A') = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3}$

263. Σε ένα δειγματικό χώρο η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο  $A$  αλλά όχι το  $B$  είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν και τα δύο ενδεχόμενα  $A, B$ . Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το  $A$  είναι μεγαλύτερη του διπλασίου της πιθανότητας να πραγματοποιηθούν και τα δύο ενδεχόμενα.

264. Σε ένα δειγματικό χώρο  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\}$  τα  $P(\omega_i)$  είναι θετικά. Έστω ότι για τα ενδεχόμενα  $A, B$  τα  $P(A), P(B)$  είναι ρίζες της συνάρτησης

$$g(x) = x^2 - P(A \cup B)x + m = 0$$

(α') Να αποδείξετε ότι τα  $A, B$  είναι ασυμβίβαστα.

(β') Να αποδείξετε ότι  $P(A') \cdot P(B') = g(1)$

265. Από τις εξετάσεις του 2007. Έστω ο δειγματικός χώρος

$$\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

για τον οποίο ισχύει

$$P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$$

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του  $\Omega$ :

$$A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}, \quad B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$$



- (α) Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  $\Omega$ , δηλαδή οι  $P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$ .
- (β') Να βρεθεί η μοναδική τιμή του  $x$  για την οποία ισχύει  $A \cap B = \{-1, 3\}$ .
- (γ') Για  $x = -1$  ναδειχθεί ότι:

$$P(A) = \frac{5}{11}, P(B) = \frac{7}{11}, P(A \cap B) = \frac{3}{11}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες  $P(A - B), P(A \cup B')$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $\frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}$  (β') -1 (γ')  $\frac{2}{11}, \frac{7}{11}$

266. Από τις εξετάσεις του 2006. Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν  $x$  αγόρια και  $(x + 4)^2$  κορίτσια.

- (α) Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του  $x$  την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.
- (β') Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με  $\frac{1}{19}$  και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.
- (γ') Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α')  $\frac{x}{x^2+9x+16}$  (β') 38,  $\frac{18}{19}$  (γ') 4

267. Μία παρέα αποτελείται από τέσσερα άτομα το Μηνά τον Κοσμά τον Λουκά και τον ανέντιμο Μεμά. Η παρέα αποκτά ένα εισιτήριο για ένα ποδοσφαιρικό αγώνα και αποφασίζει να το βάλει στον κλήρο. Συμφωνούν να βάλουν σε μία κληρωτίδα 12 κλήρους όπου σε κάθε τρεις γράφεται το όνομα ενός μέλους της παρέας. Από την κληρωτίδα ανασύρεται ένας κλήρος. Το εισιτήριο κερδίζει το άτομο που αναγράφεται στον κλήρο.

- (α) Την κλήρωση αναλαμβάνει ο Μηνάς ο οποίος τηρεί την συμφωνία της παρέας. Να βρείτε όλα τα ενδεχόμενα του πειράματος και τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $\{\text{Μηνάς}, \text{Κοσμάς}\}, \{\text{Λουκάς}, \text{Μεμάς}\}$ .
- (β') Την κλήρωση αναλαμβάνει ο ανέντιμος Μεμάς. Τοποθετεί σε μία κληρωτίδα 12 κλήρους όπου όμως σε τρεις από αυτούς γράφει το όνομα «Λουκάς» και στους υπόλοιπους 9 το όνομα «Μεμάς». Να βρείτε όλα τα ενδεχόμενα του πειράματος και τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $\{\text{Μηνάς}, \text{Κοσμάς}\}, \{\text{Λουκάς}, \text{Μεμάς}\}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

- (α')  $\emptyset, \{\text{Μηνάς}\}, \{\text{Λουκάς}\}, \{\text{Κοσμάς}\}, \{\text{Μεμάς}\}, \{\text{Λουκάς}, \text{Μεμάς}\}, \{\text{Μηνάς}, \text{Μεμάς}\}, \{\text{Κοσμάς}, \text{Μεμάς}\}, \{\text{Μηνάς}, \text{Κοσμάς}, \text{Μεμάς}\}, \{\text{Μηνάς}, \text{Κοσμάς}\}, \{\text{Μηνάς}, \text{Λουκάς}\}, \{\text{Κοσμάς}, \text{Λουκάς}\}, \{\text{Μηνάς}, \text{Κοσμάς}, \text{Λουκάς}\}, \{\text{Μηνάς}, \text{Λουκάς}, \text{Μεμάς}\}, \{\text{Κοσμάς}, \text{Λουκάς}, \text{Μεμάς}\}, \{\text{Μηνάς}, \text{Κοσμάς}, \text{Λουκάς}, \text{Μεμάς}\}$   
 Είναι  $P(\{\text{Μηνάς}, \text{Κοσμάς}\}) = \frac{1}{2}, P(\{\text{Λουκάς}, \text{Μεμάς}\}) = \frac{1}{2}$
- (β') Τα ενδεχόμενα είναι ίδια με του (α') αλλά  
 $P(\{\text{Μηνάς}, \text{Κοσμάς}\}) = 0, P(\{\text{Λουκάς}, \text{Μεμάς}\}) = 1$



268. Ένας ιδιόρρυθμος καθηγητής όταν πρόκειται να επιλέξει θέματα εξετάσεων καταφεύγει στην Θεά Τύχη. Έτσι προκειμένου να δώσει στους μαθητές του να μελετήσουν ως προς τη μονοτονία μία συνάρτηση της μορφής  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \gamma$  επιλέγει κάθε ένα από τους 3 συντελεστές ρίχνοντας ένα ζάρι. Ποια είναι η πιθανότητα η συνάρτηση που θα προκύψει με αυτό τον τρόπο να είναι γνησίως αύξουσα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $\frac{29}{36}$

269. Βρείτε ενδεχόμενα  $X, Y$  του δειγματικού χώρου  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  τέτοια ώστε:

- $X - \{1, 2\} = Y \cup \{0, 4, 5, 6\}$
- $Y - \{1, 2, 3\} = X \cup \{0, 5\}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:  $X = Y = \{0, 4, 5, 6\}$

270. Μία παρέα αποτελείται από τέσσερα άτομα το Μηνά τον Κοσμά τον Λουκά και τον ανέντιμο Μεμά. Η παρέα αποκτά ένα εισιτήριο για ένα ποδοσφαιρικό αγώνα και αποφασίζει να το βάλει στον κλήρο. Συμφωνούν να βάλουν σε μία κληρωτίδα 12 κλήρους όπου σε κάθε τρεις γράφεται το όνομα ενός μέλους της παρέας. Από την κληρωτίδα ανασύρεται ένας κλήρος. Το εισιτήριο κερδίζει το άτομο που αναγράφεται στον κλήρο.

- (α') Την κλήρωση αναλαμβάνει ο Μηνάς ο οποίος τηρεί την συμφωνία της παρέας. Να βρείτε όλα τα ενδεχόμενα του πειράματος και τις πιθανότητες των εδεχομένων  $\{\text{Μηνάς, Κοσμάς}\}$ ,  $\{\text{Λουκάς, Μεμάς}\}$ .
- (β') Την κλήρωση αναλαμβάνει ο ανέντιμος Μεμάς. Τοποθετεί σε μία κληρωτίδα 12 κλήρους όπου όμως σε τρεις από αυτούς γράφει το όνομα «Λουκάς» και στους υπόλοιπους 9 το όνομα «Μεμάς». Να βρείτε όλα τα ενδεχόμενα του πειράματος και τις πιθανότητες των εδεχομένων  $\{\text{Μηνάς, Κοσμάς}\}$ ,  $\{\text{Λουκάς, Μεμάς}\}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

- (α')  $\emptyset, \{\text{Μηνάς}\}, \{\text{Λουκάς}\}, \{\text{Κοσμάς}\}, \{\text{Μεμάς}\}, \{\text{Λουκάς, Μεμάς}\}, \{\text{Μηνάς, Μεμάς}\}, \{\text{Κοσμάς, Μεμάς}\}, \{\text{Μηνάς, Κοσμάς, Μεμάς}\}, \{\text{Μηνάς, Κοσμάς}\}, \{\text{Μηνάς, Λουκάς}\}, \{\text{Κοσμάς, Λουκάς}\}, \{\text{Μηνάς, Κοσμάς, Λουκάς}\}, \{\text{Μηνάς, Λουκάς, Μεμάς}\}, \{\text{Κοσμάς, Λουκάς, Μεμάς}\}, \{\text{Μηνάς, Κοσμάς, Λουκάς, Μεμάς}\}$   
 Είναι  $P(\{\text{Μηνάς, Κοσμάς}\}) = \frac{1}{2}, P(\{\text{Λουκάς, Μεμάς}\}) = \frac{1}{2}$
- (β') Τα ενδεχόμενα είναι ίδια με του (α') αλλά  
 $P(\{\text{Μηνάς, Κοσμάς}\}) = 0, P(\{\text{Λουκάς, Μεμάς}\}) = 1$



ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

$$(c)' = 0 \quad (2)$$

$$(x)' = 1 \quad (3)$$

$$(x^2)' = 2x \quad (4)$$

$$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1} \text{ όπου } \nu \text{ φυσικός} \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (6)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (7)$$

$$(x^\rho)' = \rho x^{\rho-1} \text{ όπου } x \text{ θετικός και } \rho \text{ ρητός} \quad (8)$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \quad (9)$$

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \quad (10)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (11)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (12)$$

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad (13)$$

$$f(x) + g(x)' = f'(x) + g'(x) \quad (14)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (15)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad (16)$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (17)$$

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad (18)$$

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\kappa = \nu \quad (19)$$

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa \quad (20)$$

$$0 \leq f_i \leq 1 \quad (21)$$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1 \quad (22)$$

$$f_i \% = 100f_i \quad (23)$$

$$N_i = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i \quad (24)$$

$$F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i \quad (25)$$

$$F_i \% = 100F_i \quad (26)$$

$$\nu_1 = N_1, \nu_2 = N_2 - N_1, \dots, \nu_\kappa = N_\kappa - N_{\kappa-1} \quad (27)$$

$$f_1 = F_1, f_2 = F_2 - F_1, \dots, f_\kappa = F_\kappa - F_{\kappa-1} \quad (28)$$

$$\alpha_i = \nu_i \frac{360^\circ}{\nu} = 360^\circ f_i \text{ για } i = 1, 2, \dots, \kappa \quad (29)$$

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} t_i \quad (30)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \dots + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\kappa} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i \quad (31)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + \dots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \dots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i} \quad (32)$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (t_i - \bar{x})^2 \quad (33)$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu} \right\} \quad (34)$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 \nu_i \quad (35)$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i\right)^2}{\nu} \right\} \quad (36)$$

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} \cdot 100\% = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (37)$$

$$y = x + c \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + c, \quad s_y = s_x \quad (38)$$

$$y = x \cdot c \Rightarrow \bar{y} = c\bar{x}, \quad s_y = |c|s_x \quad (39)$$

$$A - B = A \cap B' \quad (40)$$

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \quad (41)$$

$$P(\Omega) = 1 \quad (42)$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (43)$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu\} \Rightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_\nu) = 1 \quad (44)$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (45)$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (46)$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad (47)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (48)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B) \quad (49)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (50)$$