Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Διαγωνίσματα
Γ' Λυκείου
Θετικής-Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
1999-2016

ΑΘΗΝΑ
2022

Διαγωνίσματα
Γ′ Λυκείου
Θετικής-Τεχνολογικής
Κατεύθυνσης
1999-2016

Ν.Σ. Μαυρογιαννης

Διαγωνίσματα Γ′ Λυκείου Θετικής-Τεχνολογικής Κατεύθυνσης 1999-2016

Αθηνα 2022

Ν.Σ. Μαυρογιάννης Μαθηματικός MSc, PhD
http://nsmavrogiannis.gr/
mavrogiannis@gmail.com

Για την σύνθεση του παρόντος χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά δωρεάν λογισμικό.

- Στοιχειοθετήθηκε σε LaTeX στο TeXnicCenter συνδεδεμένο με το Sumatra PDF χρησιμοποιώντας την διανομή TeX Live.
- Για ορισμένες εξισώσεις χρησιμοποιήθηκε το TeXaide.
- Τα σχήματα έγιναν στην Geogebra και για κάποια διαγράμματα του TikZ ο κώδικας παρήχθη με το TikzEdt.
- Για εικόνες και γραφικά χρησιμοποιήθηκαν τα IrfanView και Inkscape.

ISBN 978-618-00-4126-2

Προλεγόμενα και Επεξηγήσεις

Το παρόν περιλαμβάνει θέματα διαγωνισμάτων που έδωσα σους μαθητές μου της Θετικής Τεχνολογικής Κατεύθνης της Γ′ Λυκείου την περίοδο 1999-2016 δηλαδή επί 17 συνεχόμενα σχολικά έτη.

Απευθύνεται κατά κύριο λόγο σε συναδέλφους που διδάσκουν ή πρόκειται να διδάξουν σχετικά μαθήματα. Επειδή η οπτική μου για την διδασκαλία γενικότερα αλλά και του συγκεκριμένου μαθήματος έχει εκτεθεί σε άλλες περιστάσεις (κάποιες παραπομπές ακολουθούν) γράφω συνοπτικά κάποια επεξηγηματικά.

Θεωρώ ότι το μάθημα των Μαθηματικών όταν διδάσκεται σε ένα τμήμα απευθύνεται δυνητικά σε όλους τους μαθητές του. Αυτό σημαίνει ότι καταβάλλεται προσπάθεια ώστε να επωφεληθούν όλοι ίσως όχι με τον ίδιο τρόπο και ενδεχομένως όχι στον ίδιο βαθμό. Στην προσπάθεια αυτή μπορούν να συμβάλλουν μεταξύ άλλων η κατάλληλη πλαισίωση του σχολικού βιβλίου [1]και στρατηγικές διαφοροποίησης της διδασκαλίας[2].

Μαθηματικά που απευθύνονται σε μαθητές δεν νοούνται αν συγχρόνως δεν συνοδεύονται και από μια αποτίμηση της δουλειάς που έγινε (προσπάθεια του δασκάλου και των μαθητών). Μεταξύ των διαθέσιμων μεθόδων αξιολόγησης είναι και τα διαγωνίσματα. Παρέχουν μια εκτίμηση του αποτελέσματος γρήγορα, ευσύνοπτα και με σχετικά αντικειμενικό τρόπο. Ιδίως στην Γ′Λυκείου όπου οι μαθητές στο τέλος θα διαγωνιστούν στις Πανελλήνιες, που παίζουν βαρύνοντα ρόλο στα επόμενα βήματα τους μετά το σχολείο, η παρουσία των διαγωνισμάτων είναι ουσιώδης και επιβεβλημένη: Οργανώνουν την μελέτη ιδίως αν σε μεγάλο βαθμό είναι προσανατολισμένα σε κάποια στοχοθεσία, ανιχνεύουν έγκαιρα δυσκολίες και αποτελούν προετοιμασία για την σύνθετη και απαιτητική δοκιμασία των πανελληνίων.

Ένα σχολείο που σέβεται τον εαυτό του οφείλει να προσφέρει στους μαθητές της Γ′ λυκείου όχι μόνο καλής ποιότητας διδασκαλία αλλά και προσεκτικά σχεδιασμένες ευκαιρίες αποτίμησης των προσπαθειών. Επομένως το σχολείο οφείλει να μην παραιτηθεί από το σημαντικό οργανικό κομμάτι της μαθησιακής διαδικασίας που αποτελούν τα διαγωνίσματα. Και επομένως δεν νοείται ο περιορισμός του μόνο στην διδασκαλία και η εκχώρηση των υπολοίπων καθηκόντων σε άλλους εξωσχολικούς παράγοντες. Πρόκειται για ένα δύσκολο καθήκον που γίνεται δυσκολότερο από το γεγονός ότι σταθερά, διαχρονικά οι πολιτικές ηγεσίες του Υπουργείου εκφράζονται λόγω (με παροτρύνσεις) και έργω (με εγκυκλίους) εχθρικά έναντι της «εντατικοποίησης» των διαγωνισμάτων.

Οι μαθητές της Γ′ Λυκείου εκτός από τις πανελλήνιες εξετάσεις έχουν μπροστά τους και ένα εκπαιδευτικό και επαγγελματικό μέλλον. Επομένως έχει σημασία να βοηθηθούν όχι μόνο να επιτύχουν το καλλίτερο δυνατό αποτέλεσμα στις εξετάσεις αλλά να καταστούν εκπαιδεύσιμοι και να μπορέσουν να εξελιχθούν. Που σημαίνει ότι η

[1] *Πλαισιώσεις του σχολικού βιβλίου* https://www.academia.edu/40936560/

[2] *Διαφοροποιημένη διδασκαλία στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ′ Λυκείου* https://www.academia.edu/41703680/

διδασκαλία και όλες οι ενέργειες που την υποβοηθούν δεν πρέπει απλώς να στοχεύουν στην «μίας χρήσεως» επιτυχία στις πανελλήνιες αλλά συγχρόνως να επιδιώκουν την δημιουργία γνωστικής υποδομής για την παρακολούθηση μαθημάτων της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, την καλλιέργεια διερευνητικού πνεύματος, κριτικής ικανότητας επινοητικότητας κ.α. Πρόκειται για ένα συνδυασμό δύσκολων καθηκόντων σε περιορισμένο χρονικό διάστημα και υπό συνθήκες πίεσης. Ωστόσο υπάρχουν στοιχεία που μπορούν να προσφέρουν σημαντική βοήθεια: η εστίαση στο ουσιώδες, η ανάδειξη των συνδέσεων των εννοιών και της ενότητας, η απαίτηση για μελέτη «πισω από τα γράμματα» και η έμφαση στην απόδειξη είναι μερικά[3]. Ιδιαίτερα η έμφαση στην απόδειξη έχει ξεχωριστή σημασία διότι μολονότι είναι βασικό συστατικό των Μαθηματικών δυστυχώς στα προγράμματα, στα βιβλία και τις οδηγίες διδασκαλίας παραμελείται με αποτέλεσμα να καταστρέφεται η συνοχή του διδασκομένου αντικειμένου. Η αποκατάσταση της είναι δουλειά του δασκάλου και τα διαγωνίσματα μεταξύ άλλων, μπορούν να δώσουν έμφαση στην απόδειξη και συναφείς ικανότητες.

Τα διαγωνίσματα που παρουσιάζονται στο παρόν άρχισαν να διαμορφώνονται το 1999, όταν δίδασκα στο 3ο Λύκειο Ν. Σμύρνης. Με τον περιορισμό των εξεταζομένων μαθημάτων στις πανελλήνιες (αρχικά ήσαν 14) πήραν και την οριστική τους μορφή. Συνεχίστηκαν με την μετακίνηση μου στο Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολή Σμύρνης το 2005 και φτάνουν έως το 2016 οπότε σταμάτησα να διδάσκω και μετακινήθηκα για μια τετραετία στο ΙΕΠ.

Αναλυτικά η διάρθρωση των διαγωνισμάτων είναι η ακόλουθη

1. Ολιγόλεπτα (20 λεπτά) τεστ σε βασικές γνώσεις-δεξιότητες των κεφαλαίων (Μιγαδικοί, όρια, παράγωγοι, ολοκληρώματα και ένα τεστ θεωρίας σε όλη την ύλη)

2. Διαγωνίσματα ανά κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου. Μετά το πέρας κάθε κεφαλαίου οι μαθητές έγραφαν ωριαίο διαγώνισμα σε όλο το κεφάλαιο. Το εξεταστικό δοκίμιο περιελάμβανε δύο ασκήσεις του σχολικού βιβλίου του οικείου κεφαλαίου (Μιγαδικοί, Όρια-Συνέχεια, Διαφορικός Λογισμός, Ολοκληρωτικός Λογισμός) και δύο ερωτήσεις επί αυτών [4]

3. Δύο[5] τρίωρα διαγωνίσματα που, αθροιστικά κάλυπταν όλη την ύλη.

Η τοποθέτηση των διαγωνισμάτων στην σχολική χρονιά ήταν η ακόλουθη

[3] *γινομένων γαρ πάντων κατά τον λόγον. Διδασκαλία και Απόδειξη στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου.* `https://www.academia.edu/41820196`

[4] Το 1991 δόθηκε και ένα διαγώνισμα στους πίνακες που τότε περιλαμβάνονταν στην ύλη. Δεν περιέχεται στο παρόν.

[5] Αρχικά δίνονταν ένα τρίωρο. Ο αριθμός αυξήθηκε κατά ένα όταν το επέτρεψαν οι εξεταστικές συνθήκες.

20λεπτο Τέστ στα βασικά των Μιγαδικών
Ωριαίο Διαγώνιμα στους Μιγαδικούς
20 Όρια σε 20 λεπτά
Ωριαίο Διαγώνισμα στα Όρια-Συνέχεια
20 Παράγωγοι σε 20 λεπτά
1ο Τρίωρο Διαγώνισμα (από την αρχή έως το ρυθμό μεταβολής)
Ωριαίο Διαγώνισμα στον Διαφορικό Λογισμό
20 Ολοκληρώματα σε 20 λεπτά
Ωριαίο Διαγώνισμα στον Ολοκληρωτικό Λογισμό
2ο Τρίωρο Διαγώνισμα (από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έως το τέλος)
5 ερωτήματα Θεωρίας σε 20 λεπτά

Όλα τα διαγωνίσματα ήταν με προειδοποίηση και τα θέματα μετά το πέρας τους ήταν διαθέσιμα. Επίσης διαθέσιμα ήταν και τα θέματα των προηγουμένων ετών. Η λογική των διαγωνισμάτων ανά κατηγορία ήταν ή ακόλουθη:

1. Στα τεστ επιδιώκονταν ο έλεγχος της εμπέδωσης βασικών τεχνικών και η εφαρμογή τυπικών διαδικασιών αυτόματα σε περιορισμένο χρόνο. Αυτός ο παράγοντας είναι σημαντικός στις πανελλήνιες. Έχει σημασία ο εξεταζόμενος να κάνει το διεκπεραιωτικό μέρος του εξεταστικού δοκιμίου γρήγορα, σωστά και άκοπα ώστε να έχει χρόνο και ενέργεια για τα πιο απαιτητικά ερωτήματα. Ειδικά το τεστ θεωρίας αποσκοπούσε στον έλεγχο της κατοχής βασικών γνώσεων και της σωστής παρουσίασης τους στις εξετάσεις. Ήταν κίνητρο για μια έγκαιρη επανάληψη και αποσκοπούσε στην αποτροπή απώλειας μονάδων στην θεωρία (κάτι που αποτελεί συνηθισμένο φαινόμενο στις πανελλήνιες). Τα ερωτήματα ήσαν προκαθορισμένα και προέρχονταν όλα από υλικό που είχε διανεμηθεί στους μαθητές [6]. Οι ερωτήσεις Σ-Λ εξετάζονταν προφορικά στην τάξη και πάντοτε με αιτιολόγηση.

2. Στα ωριαία διαγωνίσματα επιδιώκονταν ο σε βάθος έλεγχος του σχολικού βιβλίου. Οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου δεν είναι αρκετές για την προετοιμασία στις πανελλήνιες αλλά δε μπορούν να αγνοηθούν. Με κατάλληλες συμπληρώσεις και επεκτάσεις μπορούν να δημιουργήσουν ένα βασικό σκληρό πυρήνα

[6] *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Σημειώσεις Θεωρίας* `https://www.academia.edu/87580630`

όπου θα οικοδομηθεί η περαιτέρω γνώση. Επιπλέον τα διαγωνίσματα αυτά όπου κατά το ήμισυ περιείχαν οικείες μαθηματικές καταστάσεις, μαζί με τα τεστ, προσέφεραν στους μαθητές ένα κλίμα ασφάλειας και βιώματα επιτυχίας. Σε μερικά από αυτά εκτός από τις γνώσεις θεωρίας του σχολικού βιβλίου χρειάζονταν και συμπληρωματικές γνώσεις που περιείχε το υλικό της σημείωσης 6. Σε όσε λύσεις γίνονται αναφορές σε ασκήσεις εκτός του σχολικού αυτές αφορούν συμπληρωματικό υλικό ασκήσεων που είχε δοθεί στους μαθητές[7].

3. Τα τρίωρα διαγωνίσματα αποσκοπούσαν στην εξάσκηση των μαθητών να εργασθούν για κάποιο χρόνο με ένταση, να συναντήσουν απροσδόκητες καταστάσεις και να αγωνιστούν. Στην Ευαγγελική είχα μια επιπλέον ευκαιρία: τα τρίωρα διαγωνίσματα διαμορφώνονταν[8] από κοινού με όλους τους διδάσκοντες του μαθήματος και έτσι το τελικό δοκίμιο περιείχε ποικίλες αντιλήψεις και οπτικές. Υπήρχε η συμφωνία μεταξύ των διδασκόντων ότι τα θέματα θα λάβουν δημοσιότητα και θα είναι κοινό κτήμα. Γράφονταν πάντοτε λύσεις που διανέμονταν μετά το πέρας στους μαθητές και το τρίωρο διαγώνισμα ήταν ένα γεγονός του σχολείου.

Το παρόν προέρχεται από αρχεία θεμάτων-λύσεων που έχω γράψει σε διάφορες χρονικές στιγμές. Αρκετά από αυτά είχαν πολλές εκδοχές που η κάθε μία διόρθωνετροποποιούσε την προηγούμενη. Ελπίζω τα λάθη να έχουν περιοριστεί. Σε κάθε περίπτωση ελπίζω να υπάρξει, μελλοντικά, μια βελτιωμένη εκδοχή.

Τέλος θεωρώ ευτυχή συγκυρία που σε κάποια από τα διαγωνίσματα συνεργάστηκα με τους συναδέλφους μου που ήσαν οι: *Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Γεώργιος Θεοχάρης, Γεράσιμος Κουτσανδρέας, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Βασίλειος Τσίτσος, Σωτήριος Χασάπης, Αρετή Χούλη,*

21 Σεπτεμβρίου 2022
Ν.Σ.Μ.

[7] *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικής Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Ασκήσεις* `https://www.academia.edu/87581254`

[8] Προς το τέλος συνέβη κάτι ανάλογο και με τα ωριαία διαγωνίσματα. Στις επόμενες σελίδες όπου υπάρχουν και άλλοι θεματοδότες αναφέρονται.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Σχολικό έτος 1999-2000

1.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

1.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την σχέση

$$z - \bar{z} = 6i$$

1. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των αριθμών του A.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in A$ ο μιγαδικός αριθμός $\frac{1}{z} + \frac{1}{6}i$ έχει σταθερό μέτρο.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$3x^3 - 10x^2 + 7x + 10 = 0 \tag{1.1}$$

1. Με δεδομένο ότι ο μιγαδικός αριθμός $2 + i$ είναι ρίζα της 1.1 να βρείτε τις άλλες ρίζες της.
2. Να υπολογίσετε το άθροισμα των πρωτευόντων ορισμάτων των ριζών της (1).

1.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο §2.2, Α12 α) Σελ. 96

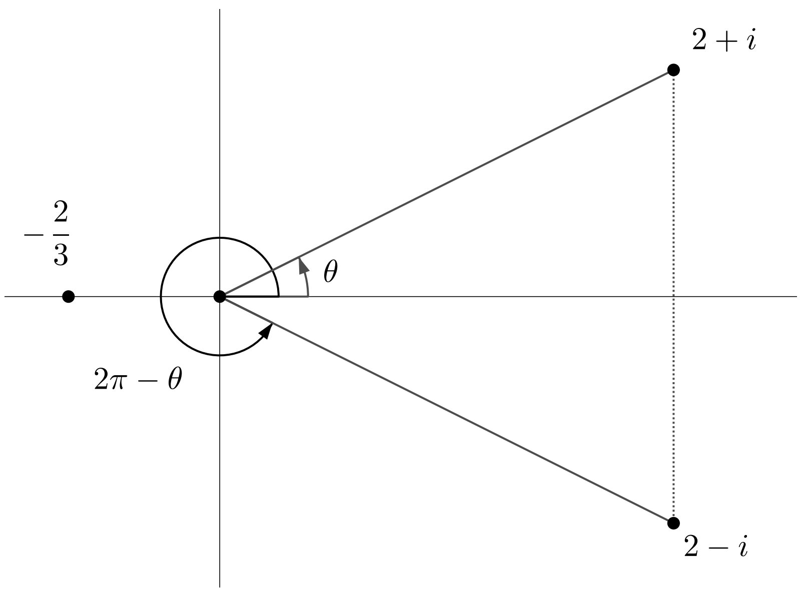
2. Αν $z \in A$ τότε με $z = x + yi$ είναι $y = 3$ οπότε $z = x + 3i$. Άρα:
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{6}i = \frac{1}{x+3i} + \frac{1}{6}i = \frac{1}{6}i\frac{x-3i}{x+3i},$$
επομένως
$$\left|\frac{1}{z} + \frac{1}{6}i\right| = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2+9}} = \frac{1}{6}.$$

Σχολιο 1. Η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία $y = 3$. Ο μετασχηματισμός $z \to \frac{1}{z}$ απεικονίζει την ευθεία στον κύκλο
$$x^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}.$$
Η πρόσθεση στο $\frac{1}{z}$ του $\frac{1}{6}i$ μετασχηματίζει τον παραπάνω κύκλο στον
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{36}.$$
Το μέτρο του $\frac{1}{z} + \frac{1}{6}i$ είναι $\frac{1}{6}$ διότι σε αυτόν τον κύκλο ανήκει η εικόνα του.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο §2.5, Α5 Σελ 121

2. Οι ρίζες $2 \pm i$ και $-\frac{2}{3}$ έχουν πρωτεύοντα ορίσματα θ, $2\pi - \theta$, π όπου θ είναι η οξεία γωνία με εφ$\theta = \frac{1}{2}$. Άρα το άθροισμα των πρωτευόντων ορισμάτων είναι 2π.



1.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

1.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για την συνάρτηση f ισχύει

$$1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

   $$\eta\mu x - x + 1 = 0$$

   έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.
2. Να αποδείξετε ότι για κάθε λ η εξίσωση

   $$\eta\mu x - x + 1 = \lambda$$

   έχει μία τουλάχιστον λύση.

1.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος §1.5 Α8 i)
2. Για $x > 0$ έχουμε

   $$\frac{1}{x} - x \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x} + x.$$

   Οι συναρτήσεις

   $$\frac{1}{x} - x, \ \frac{1}{x} + x$$

   για $x \to 0^+$ έχουν όριο $+\infty$ και επομένως από το κριτήριο παρεμβολής και το όριο της $\frac{f(x)}{x}$ για $x \to 0^+$ είναι $+\infty$.
   Για $x < 0$ έχουμε

   $$\frac{1}{x} - x \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{x} + x$$

   και όπως πριν βρίσκουμε ότι για $x \to 0^-$ το όριο της $\frac{f(x)}{x}$ είναι $-\infty$.

   Επομένως αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ δεν υπάρχει.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος §1.8 Α6

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x - x + 1 - \lambda \quad x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$f(x) = x\left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 + \frac{1}{x} - \frac{\lambda}{x}\right)$$

. Έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| |\eta\mu x| \le \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$$

οπότε

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|}$$

δηλαδή

$$-\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

Άρα

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Επομένως υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ ώστε

$$f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$$

και από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει x μεταξύ των x_1, x_2 ώστε $f(x) = 0$. Το x αυτό είναι και λύση της δοθείσας εξίσωσης.

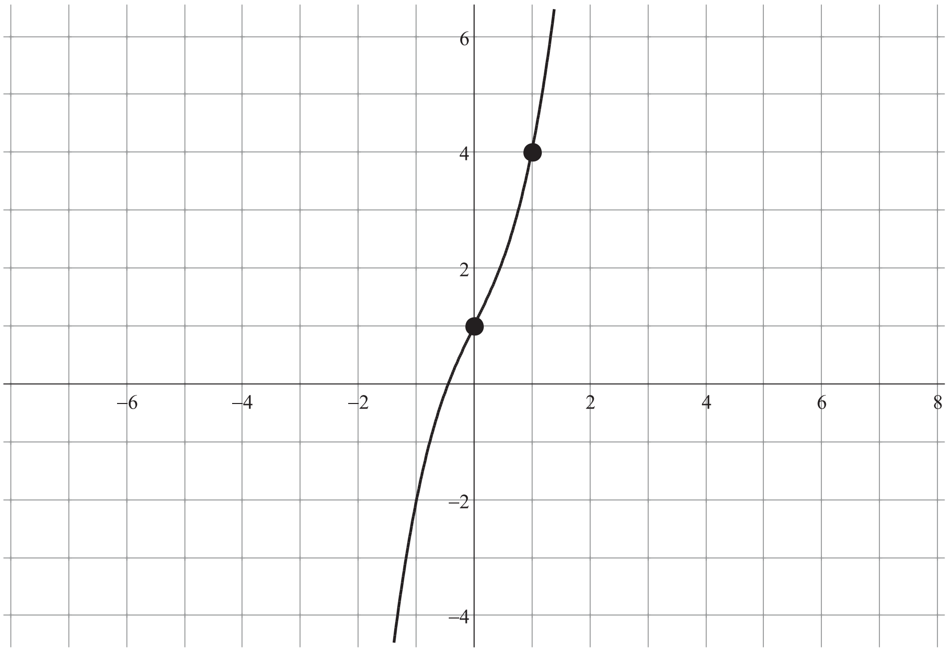
1.3 Τρίωρο Διαγώνισμα.

1.3.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Στο σχήμα που ακολουθεί υπάρχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης της μορφής

$$f(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$$



1. Να βρείτε τα κ, λ.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = f\left(f^{-1}(-2) + f^{-1}(1)\right)$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$\alpha = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + i\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right).$$

1. Να υπολογίσετε τον α^6.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να λύσετε ως προς w την εξίσωση

$$\left(\frac{\alpha}{w}\right)^3 = 1$$

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει
$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}}\right)=0$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω Σ το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών z της μορφής
$$z=\text{συν}t+\frac{1}{\text{ημ}t}i$$
όπου t πραγματικός αριθμός με $t\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z\in\Sigma$ είναι και $\bar{z}\in\Sigma$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z\in\Sigma$ ισχύει $|z|\geq 1$.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

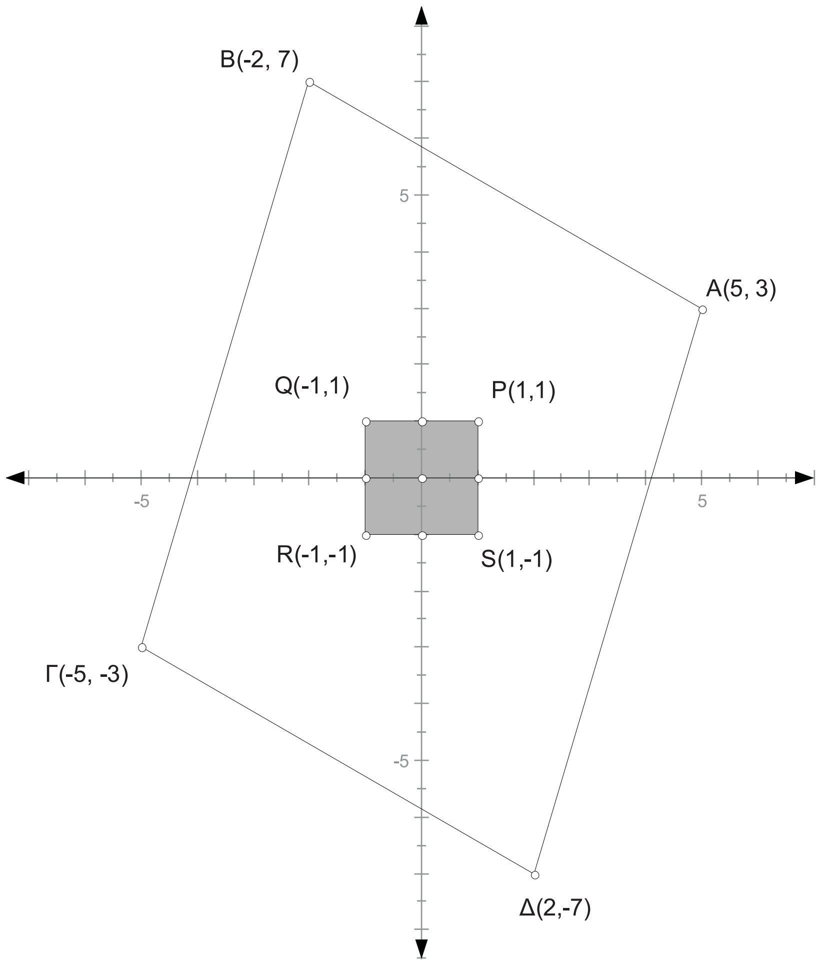
3. Να αποδείξετε ότι το Σ περιέχει στοιχεία οσοδήποτε μεγάλου μέτρου.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Ένας σπουδαστής προγραμματισμού θέλει να ενσωματώσει σε ένα πρόγραμμα γραφικών την εξής λειτουργία:

Με μία εντολή το τετράγωνο PQRS του σχήματος να μετασχηματίζεται μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.



Στην προσπάθεια του δοκιμάζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό T τέτοιον ώστε το P να απεικονίζεται στο A και το Q να απεικονίζεται στο B.

1. Να βρείτε ποιος πρέπει να είναι ο μετασχηματισμός T.

12 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να επαληθεύσετε ότι ο μετασχηματισμός T που βρήκατε πράγματι απεικονίζει το PQRS στο ΑΒΓΔ.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν, με κατάλληλη επιλογή του T, το PQRS να απεικονίζεται σε ένα, τυχόν πλέον, παραλληλόγραμμο Π του οποίου το κέντρο συμπίπτει με την αρχή των αξόνων.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

1.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = 4$. Επομένως έχουμε:

$$\lambda = 1, \quad 1 + \kappa + \lambda = 4,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\lambda = 1, \ \kappa = 2$. Άρα

$$f\left(x\right) = x^3 + 2x + 1.$$

2. Είναι

$$f'\left(x\right) = 3x^2 + 1 > 0$$

και επομένως $f \uparrow$. Άρα η f είναι και $1-1$ επομένως αντιστρέψιμη.

3. Είναι $f(-1) = -2$ και $f(0) = 1$. Επομένως $f^{-1}\left(-2\right) = -1$ και $f^{-1}\left(1\right) = 0$. Άρα

$$f^{-1}\left(-2\right) + f^{-1}\left(1\right) = -1$$

και επομένως

$$f\left(f^{-1}\left(-2\right) + f^{-1}\left(1\right)\right) = f\left(-1\right) = -2.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Είναι:

$$\alpha^6 = 2^6\left(\sigma\upsilon\nu\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\eta\mu\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = 64\left(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi\right) = -64.$$

2. Είναι:

$$\left(\frac{\alpha}{w}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{w}{\alpha}\right)^3 = 1.$$

Από την δεύτερη σχέση προκύπτει ότι ο $\frac{w}{\alpha}$ θα είναι κυβική ρίζα της μονάδας επομένως θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Επειδή $\alpha = \sqrt{3} + i$ ο w θα είναι κάποιος από τους αριθμούς:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot 1, \ \left(\sqrt{3}+i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right), \quad \left(\sqrt{3}+i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right),$$

δηλαδή οι ο w είναι

$$\sqrt{3} + i \quad -\sqrt{3} + i \quad -2i.$$

3. Θέτοντας $z = x + yi$, $\alpha = \sqrt{3} + i$ έχουμε

$$\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}} = \frac{x + yi - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\left(x\sqrt{3} - y - 2\right) + \left(x + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right)i}{4}.$$

Επομένως το φανταστικό μέρος του $\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}}$ είναι μηδέν αν και μόνο αν

$$x + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0.$$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι η ευθεία

$$x + y\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Αν ο $z = \text{συν}t + \frac{1}{\text{ημ}t}$, $t \neq kpi, k \in \mathbb{Z}$ είναι ένα στοιχείο του Σ τότε

$$\bar{z} = \text{συν}t - \frac{1}{\text{ημ}t} = \text{συν}\left(-t\right) + \frac{1}{\text{ημ}\left(-t\right)},$$

με $-t \neq kpi, k \in \mathbb{Z}$. Επομένως ο $\bar{z}$ είναι επίσης στοιχείο του Σ.

2. Με

$$z = \text{συν}t + \frac{1}{\text{ημ}t}$$

είναι

$$|z|^2 = \text{συν}^2 t + \frac{1}{\text{ημ}^2 t} \geq \frac{1}{\text{ημ}^2 t} \geq 1,$$

αφού $\text{συν}^2 t \geq 0$ και $0 < \text{ημ}^2 t \leq 1$. Επομένως $|z| \geq 1$.

3. Με το z να είναι όπως στο προηγούμενο είναι

$$|z| = \sqrt{\text{συν}^2 t + \frac{1}{\text{ημ}^2 t}}$$

και

$$\lim_{t \to 0^+} \sqrt{\text{συν}^2 t + \frac{1}{\text{ημ}^2 t}} = +\infty.$$

Επομένως το $|z|$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο αρκεί το t να είναι ένας αρκούντως μικρός θετικός αριθμός.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έστω ότι ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι ο
$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$
Θα είναι
$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$
Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε το σύστημα
$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta&=5 \\ \gamma+\delta&=3 \\ -\alpha+\beta&=-2 \\ -\gamma+\delta&=7 \end{aligned}\right\},$$
από την επίλυση του οποίου βρίσκουμε
$$\alpha=\frac{7}{2}, \quad \beta=\frac{3}{2}, \gamma=-2, \quad \delta=5.$$
Επομένως ο ζητούμενος πίνακας είναι ο
$$\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Προφανώς από κατασκευής ο μετασχηματισμός που έχει τον παραπάνω πίνακα απεικονίζει το P στο A και το Q στο B. Για τα υπόλοιπα δύο ζεύγη μπορεί να γίνει απλή επαλήθευση ή απλούστερα να γίνει η παρατήρηση ότι οι πίνακες των συντεταγμένων των R, S είναι αντίθετοι εκείνων των P, Q και επομένως θα απεικονίζονται σε πίνακες με αντίθετες συντεταγμένες. Άρα θα έχουμε την αντιστοίχιση $R \to \Gamma$ και $S \to \Delta$.

3. Αν (p,q) και (r,s) είναι δύο διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου τα διανύσματα $\vec{u}=(p,q)$ και $\vec{v}=(r,s)$ δεν θα είναι συγγραμμικά. Θέλουμε κατ΄ αρχάς
$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix},$$
και επομένως
$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta&=p \\ \gamma+\delta&=q \\ -\alpha+\beta&=r \\ -\gamma+\delta&=s \end{aligned}\right\}.$$

Το παραπάνω σύστημα έχει πάντοτε λύση και είναι

$$\alpha = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r, \;\; \beta = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r, \;\; \gamma = \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}s, \;\; \delta = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s.$$

Επειδή οι άλλες δύο κορυφές θα είναι οι $(-p,-q)$, $(-r,-s)$ η αντιστοίχιση

$$(-1,-1) \to (-p,-q)\,, \;\; (1,-1) \to (-r,-s)\,,$$

προκύπτει άμεσα από την αντιστοίχιση

$$(1,1) \to (p,q)\,, \;\; (-1,1) \to (r,s)\,.$$

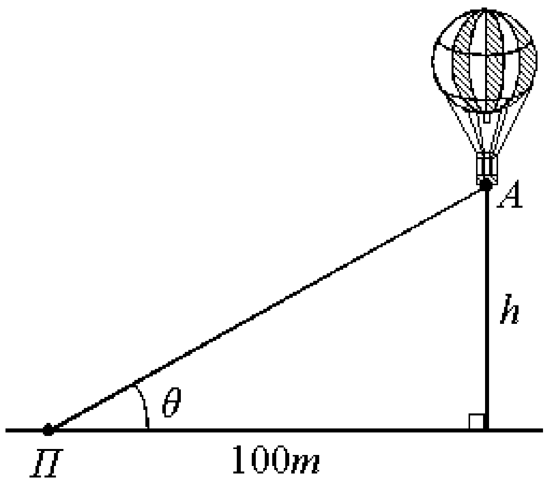
Επομένως η αντιστοίχιση του τετραγώνου $PQRS$ στο τυχόν παραλληλόγραμμο με κέντρο την αρχή των αξόνων είναι πάντα δυνατή.

1.4 Διαφορικός Λογισμός.

1.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Ένα αερόστατο A αφήνει το έδαφος σε απόσταση $100m$ από ένα παρατηρητή Π με ταχύτητα $50m/min$.



1. Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος $100m$.

2. Να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται η απόσταση ΑΠ την ίδια χρονική στιγμή με εκείνη του ερωτήματος 1.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Η παράγωγος μίας συνάρτησης f είναι

$$f'(x) = 3(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$$

1. Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;

2. Να αποδείξετε ότι η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $[1,2]$.

1.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 2.4 Α4.

2. Αν ονομάσουμε $d(t)$ την απόσταση $A\Pi$ κατά την χρονική στιγμή t και $h(t)$ τούψος του αερόστατου πάλι κατά την χρονική στιγμή t έχουμε ότι:

$$d'(t) = \frac{h(t)\,h'(t)}{\sqrt{100^2 + h^2(t)}}$$

Κατά την χρονική στιγμή t_0 οπότε $h(t_0) = 100$ είναι

$$d'(t_0) = \frac{100 \cdot 50}{\sqrt{100^2 + 100^2}} = 25\sqrt{2}\frac{m}{sec}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 2.7.

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση μας έχει δύο ή περισσότερες ρίζες στο διάστημα $[1,2]$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

   Θεωρούμε $\rho_1 < \rho_2$ δύο από αυτές τις ρίζες. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Επομένως είναι και συνεχής σε αυτό. Ακόμη αφού τα ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες θα ισχύει

$$f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0.$$

   Άρα η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$. Θα πρέπει λοιπόν να ικανοποιεί και το συμπέρασμα δηλαδή η f' να έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ στο (ρ_1, ρ_2). Αλλά αφού οι ρ_1, ρ_2 περιέχονται στο διάστημα $[1,2]$ θα πρέπει και η ρίζα ξ να περιέχεται στο $[1,2]$. Αλλά η f' έχει μοναδικές ρίζες τις $1, 2, 3$ και καμία μεταξύ των 1 και 2 (άτοπο).

1.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

1.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+3}{x+2}dx$
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^x \frac{e^x+3}{e^x+2}dx$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να βρείτε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ και $f(9) = 1$.
2. Έστω C_f η γραφική παράσταση της συνάρτησης f του ερωτήματος Α) και $d(x)$ η απόσταση των σημείων $A(x, f(x))$ και $B(x+1, f(x+1))$ της C_f. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\infty} d(x)$

1.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο §3.1 Α1 vii) σελ. 307
2. Θέτουμε $e^x = u$ οπότε $du = exdx$ άρα
$$\int e^x \frac{e^x+3}{e^x+2}dx = \int \frac{u+3}{u+2}du = u + \ln(u+2) + C,$$
απο το ερώτημα 1. Επομένως
$$\int e^x \frac{e^x+3}{e^x+2}dx = e^x + \ln(e^x+2) + C$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος §3.1 Α2.
2. Από το ερώτημα 1. έχουμε ότι
$$f(x) = 2\sqrt{x} - 5.$$
Είναι
$$d(x) = \sqrt{(x+1-x)^2 + (f(x+1) - f(x))^2} =$$
$$\sqrt{1 + 4\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)^2}.$$

Αλλά

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$$

Επομένως το ζητούμενο όριο είναι 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Σχολικό έτος 2000-2001

2.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

2.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για το μιγαδικό z ισχύει $|2z-1| = |z-2|$.

1. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

2. Να αποδείξετε ότι αν επιπλέον $z \neq 1$ τότε η εικόνα του $\frac{1}{z-1}$ ανήκει στην ευθεία $x = -\frac{1}{2}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Εστω $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Να υπολογίσετε τον z^{2000}.

2. Να βρείτε όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$z^{\nu} + (1-z)^{\nu}$$

όταν $\nu \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο §2.3 Β6 σελ. 102

2. Θέτουμε $w = \frac{1}{z-1}$. Είναι $w \neq 0$ οπότε λύνοντας ως προς z βρίσκουμε $z = \frac{w+1}{w}$,και αντικαθιστώντας στην σχέση της υπόθεσης έχουμε

$$|2\frac{w+1}{w} - 1| = |\frac{w+1}{w} - 2|,$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$|w+2| = |w-1|.$$

Επομένως η εικόνα του w ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σμεία $A(-2,0)$, $B(1,0)$ δηλαδή την ευθεία $x = -\frac{1}{2}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο §2.4 Α6 σελ. 110

2. Με $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι $z = \text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{\pi}{3}$. Αφού $1 - z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ είναι

$$z^\nu + (1-z)^\nu = \left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)^\nu + \left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^\nu = 2\text{συν}\frac{\nu\pi}{3}.$$

Διακρίνοντας τις περιπτώσεις $\nu = 6k + \upsilon$, $\upsilon = 0, 1, ..., 5$ έχουμε:

ν	$z^\nu + (1-z)^\nu$
$6k$	$2\text{συν}2k\pi = 2$
$6k+1$	$2\text{συν}\frac{\pi}{3} = 1$
$6k+2$	$2\text{συν}\frac{2\pi}{3} = -1$
$6k+3$	$2\text{συν}\pi = -2$
$6k+4$	$2\text{συν}\frac{4\pi}{3} = -1$
$6k+5$	$2\text{συν}\frac{5\pi}{3} = 1$

2.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

2.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}_f$ της συνάρτησης;

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x}$$

2. Για την συνάρτηση f του ερωτήματος (α′) να εξετάσετε αν ισχύει το επόμενο:
Για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ υπάρχει $x' \in \mathcal{D}_f$ τέτοιο ώστε $f(x) < f(x')$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις $f(0) < g(0)$ και $f(1) > g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \text{ημ}x$ και $g(x) = e^{-x}$ ορισμένες στο $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_g$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

2.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος §1.2 Α1

2. Η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεψών συναρτήσεων και επειδή ορίζεται στο κλειστό διάστημα $\mathcal{D}_f = [1,2]$ θα έχει μέγιστη τιμή. Άρα θα υπάρχει $x_\mu \in [1,2]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(x_\mu)$ για κάθε $x \in [1,2]$ και για το $x = x_\mu$ δεν υπάρχει $x' \in [1,2]$ ώστε $f(x) < f(x')$. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος §1.8 Β4

2. Οι συναρτήσεις f, g είναι προφανώς συνεχείς. Είναι

$$f(0) = \text{ημ}0 = 0 < 1 = e^0 = f(0)$$

και

$$g(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{ημ}\frac{\pi}{4} < \text{ημ}1 = f(1).$$

Επομένως από το ερώτημα 1. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$. Άρα οι γραφικές παραστάσεις $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_g$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο το $A(\xi, f(\xi))$.

Αν $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2$ είναι $-x_1 > -x_2$ άρα $e^{-x_1} > e^{-x_2}$ και $g(x_1) > g(x_2)$ άρα και η g είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης επειδή η ημ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ θα είναι και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα

- Για $x < \xi$ θα είναι $f(x) < f(\xi) = g(\xi) < g(x)$
- Για $x > \xi$ θα είναι $f(x) > f(\xi) = g(\xi) > g(x)$.

Επομένως για $x \neq \xi$ θα είναι $f(x) \neq g(x)$ άρα το σημείο A είναι το μοναδικό κοινό σημείο.

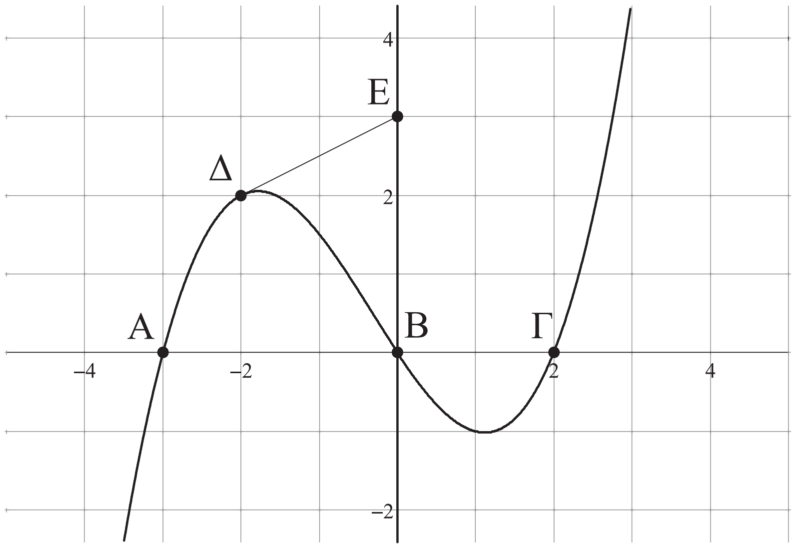
2.3 Τρίωρο Διαγώνισμα.

2.3.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Στο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης της μορφής

$$f(x) = \alpha(x-\kappa)(x-\lambda)(x-\mu)$$



1. Να βρείτε τον τύπο της f.

12 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να επαληθεύσετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να εξετάσετε αν υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$. που είναι κάθετη στην ΔΕ.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω:

$$z = 3 + 4i \text{ και } \omega = \text{συν}\tfrac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\tfrac{2\pi}{3}$$

1. Να υπολογίσετε τα μέτρα των μιγαδικών ω, ω^2.

12 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών
$$z,\ \omega z,\ \omega^2 z$$
ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί
$$\frac{1}{z-5},\ \frac{1}{\omega z-5},\ \frac{1}{\omega^2 z-5}$$
έχουν ίσα πραγματικά μέρη.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Μία λίμνη μολύνεται από διαρροή τοξικού υγρού.
Η ποσότητα, σε λίτρα, $\varphi(t)$ του υγρού που έχει εισρεύσει στη λίμνη μετά πάροδο χρόνου t ωρών είναι:
$$\phi(t)=\begin{cases}\frac{2t}{5-t} & \text{αν} \quad t\leqslant 4\\ 10t-32 & \text{αν} \quad t>4\end{cases}$$
Η διαρροή διήρκεσε 10 ώρες.

1. Να υπολογίσετε πόσα λίτρα τοξικού υγρού διοχετεύθηκαν στη λίμνη.

12 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε ποια χρονική στιγμή t_0 υπήρχαν στη λίμνη 8 λίτρα τοξικού υγρού.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της φ κατά την χρονική στιγμή t_0 του προηγουμένου ερωτήματος 2.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta \geq \gamma \geq 1$.
   Να βρείτε το όριο
   $$\lim_{x \to +\infty} \left(\alpha^x - \beta^x - \gamma^x\right)$$

   12 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta \geq \gamma \geq 1$.
   Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
   $$\alpha^x - \beta^x - \gamma^x = 0$$
   έχει ακριβώς μία λύση.

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η πλευρά α είναι μεγαλύτερη από τις δύο άλλες.
   Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μοναδικός θετικός αριθμός x έτσι ώστε
   $$\alpha^x = \beta^x + \gamma^x$$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Η f έχει ρίζες τους αριθμούς -3, 0, 2 επομένως είναι
   $$f(x) = \alpha (x - \kappa)(x - \lambda)(x - \mu).$$
   Η τιμή του α βρίσκεται από την συνθήκη $f(-2) = 2$ από την οποία προκύπτει ότι $\alpha = \frac{1}{4}$. Επομένως
   $$f(x) = \frac{1}{4} x (x + 3)(x - 2).$$

2. Είναι
   $$f'(x) = \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{3}{2}.$$
   Η εξίσωση εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $(-2, 2)$ είναι
   $$y = f'(-2)(x + 2) + f(-2),$$
   δηλαδή η
   $$y = \frac{1}{2} x + 3.$$
   Αυτή εκτός από το $(-2, 2)$ διέρχεται και από το $(0, 3)$ άρα συμπίπτει με την ευθεία ΔE δηλαδή η ΔE είναι εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$.

3. Μια ευθεία που είναι κάθετη στην ΔE θα πρέπει να έχει συντελεστή διευθύνσεως ίσο με -2. Αν λοιπόν μια εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ σε κάποιο $M(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ΔE θα έχει συντελεστή διευθύνσεως $-2 = f'(x_0)$. Αλλά η εξίσωση $f'(x_0) = -2$ ισοδυναμεί με την $3x_0^2 + 2x_0 + 2 = 0$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ κάθετη στην ΔE.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Προφανώς $|\omega| = 1$ και επομένως $\left|\omega^2\right| = |\omega|^2 = 1$.

2. Είναι
$$\left|\omega^2 z\right| = \left|\omega^2\right| |z| = |z|$$
και
$$|\omega z| = |\omega| \, |z| = |z| \, .$$
Επομένως οι εικόνες των τριών μιγαδικών απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $|z|$ άρα ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων κα ακτίνα $|z| = 5$.

3. Οι αριθμοί z, ωz, $\omega^2 z$ έχουν όλοι μέτρο 5. Έστω v ένας οποιοσδήποτε από αυτούς. Το πραγματικό μέρος του $\frac{1}{v-5}$ είναι ίσο με
$$\frac{\frac{1}{v-5} + \frac{1}{\bar{v}-5}}{2} = \frac{\bar{v} - 5 + v - 5}{2\,(v-5)\,(\bar{v}-5)} = \frac{\bar{v} + v - 10}{2\,(v\bar{v} - 5\,(v+\bar{v}) + 25)} =$$
$$\frac{\bar{v} + v - 10}{2\,(25 - 5\,(v+\bar{v}) + 25)} = -\frac{1}{10}.$$
Επομένως οι $\frac{1}{z-5}$, $\frac{1}{\omega z-5}$, $\frac{1}{\omega^2 z-5}$ έχουν ίσα πραγματικά μέρη.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Το συνολικό ποσό τοξικού υγρού αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή 10 ώρες και είναι $\varphi(10) = 10 \cdot 10 - 32 = 68$ λίτρα.

2. Αν η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι μικρότερη ή ίση των 4 ωρών θα είναι
$$\varphi(t_0) = 10 \Leftrightarrow \frac{2t_0}{5 - t_0} = 10 \Leftrightarrow t_0 = \frac{25}{6}.$$
Η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη του 4 και απορρίπτεται. Για τιμές μεγαλυτερες του 4 είναι
$$\varphi(t_0) = 10 \Leftrightarrow 10 \cdot t_0 - 32 = 10 \Leftrightarrow t_0 = \frac{21}{5}.$$
Η τιμή αυτή είναι δεκτή διότι είναι μεγαλύτερη του 4. Τελικά κατά την χρονική στιγμή των $\frac{21}{5}$ ωρών δηλαδή των 4 ωρών και 12 λεπτών υπήρχαν στην λίμνη 10 λίτρα τοξικού υγρού.

3. Επειδή $t_0 > 10$ κοντά στο t_0 θα είναι

$$\varphi(t) = 10t - 32, \quad \varphi'(t) = 10$$

και ο ρυθμός μεταβολής στο t_0 είναι 10 λίτρα ανά ώρα.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha^x - \beta^x - \gamma^x) = \lim_{x\to+\infty}\alpha^x\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x\right) = +\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x = 0$.

2. Είναι

$$\alpha^x - \beta^x - \gamma^x = 0 \Leftrightarrow \alpha^x\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x = 0.$$

Η συνάρτηση $1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα αφού οι $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x$ και $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσες. Επομένως έχει το πολύ μια ρίζα. Άρα και η συνεχής $f(x) = \alpha^x - \beta^x - \gamma^x$, $x \in [0, +\infty)$ έχει το πολύ μια ρίζα. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και επομένως υπάρχει $m > 0$ ώστε $f(m) > 0$. Επίσης $f(0) = -1$ και επομένως απο το θεώρημα του Bolzano η f θα έχει ρίζα μεταξύ 0 και m η οποία είναι και η μοναδική ρίζα της f.

3. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλες τις πλευρές του τριγώνου επί κάποιο κατάλληλο λ ώστε να προκύψει όμοιο τρίγωνο με όλες τις πλευρές μεγαλύτερες του 1. Φυσικά σε αυτό το τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\lambda\alpha$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός x ώστε

$$(\lambda\alpha)^x - (\lambda\beta)^x - (\lambda\gamma)^x = 0.$$

Ισοδύναμα (απλοποιώντας το λ^x) έχουμε ότι υπ΄ρχει μοναδικός θετικός αριθμός x ώστε

$$\alpha^x = \beta^x + \gamma^x.$$

2.4 Διαφορικός Λογισμός.

2.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

2. Να βρείτε σημείο της C_f που να απέχει από την αρχή των αξόνων ελάχιστη απόσταση.

2.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος §2.7 Α2 iii).

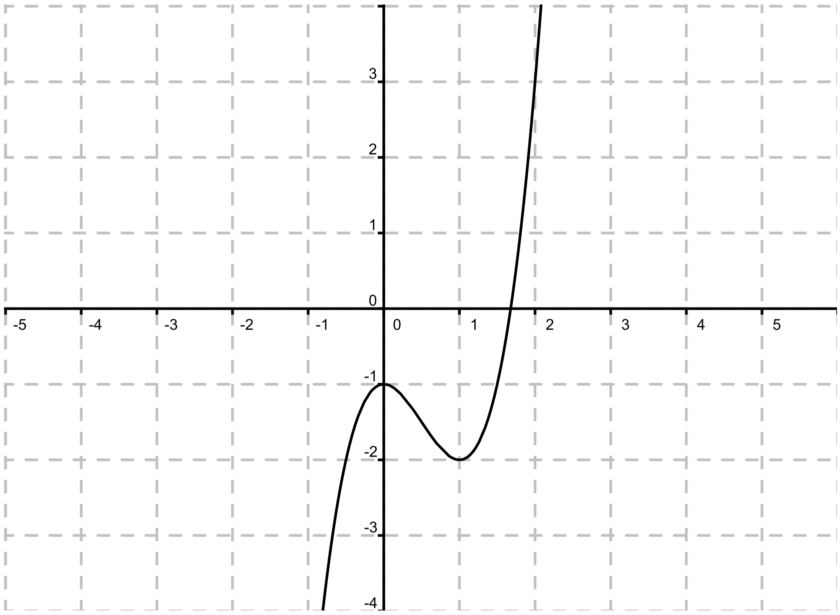
2. Από την μελέτη της μονοτονίας της f έχουμε βρεί ότι στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο διάστημα $[0, 1]$ είναι γνησίως φθίνουσα. Έχουμε:

$$f((-\infty, 0]) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)] = (-\infty, -1]$$

$$f([0, 1]) = [f(1), f(0)] = [-2, -1]$$

$$f([1, +\infty)) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [-2, \infty)$$

Βλέπουμε ότι μόνο το τρίτο διάστημα περιέχει το μηδέν άρα η συνάρτηση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Η ρίζα αυτή λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική. Τελικά η συνάρτηση έχει μία μόνο ρίζα.



ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος §2.8 Α3 i).

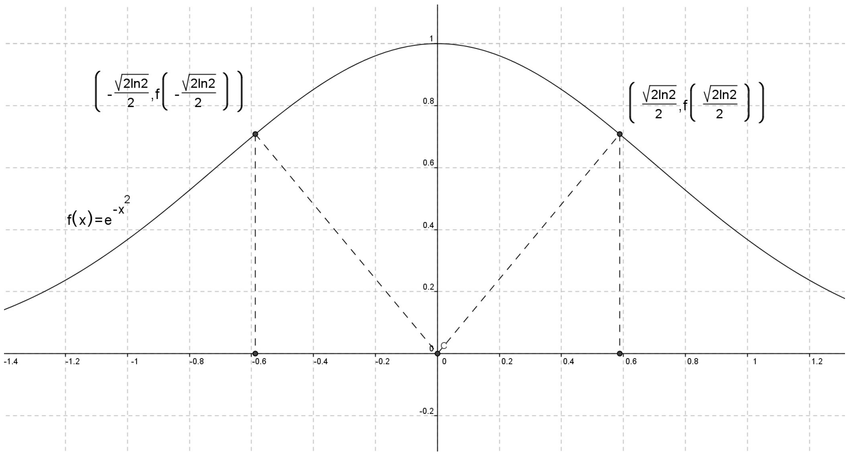
2. Το τυχόν σημείο της $\mathcal{C}_f$ είναι της μορφής $M(x, f(x))$ και η απόσταση του από το σημείο $O(0,0)$ είναι

$$d\,(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (f\,(x)-0)^2} = \sqrt{x^2 + e^{-2x^2}}$$

Έχουμε $d'\,(x) = \frac{x\left(1-2e^{-2x^2}\right)}{\sqrt{x^2+e^{-2x^2}}}$. Είναι

$$d'\,(x) > 0 \Leftrightarrow x\left(1-2e^{-2x^2}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2} < x < 0 \qquad \text{ή} \qquad \frac{\sqrt{2\ln 2}}{2} < x$$

Επομένως η μονοτονία της συνάρτησης d είναι η ακόλουθη: $(-\infty, -\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}] \uparrow$, $\left[-\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}, 0\right] \downarrow$, $[0, \frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}] \uparrow$, $[\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}, +\infty) \downarrow$. Άρα παρουσιάζει μέγιστο το οποίο είναι η μέγιστη από τις τιμές της d στα $\pm\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}$. Αλλά η d είναι, προφανώς, άρτια επομένως οι δύο αυτές τιμές είναι ίσες. Συνεπώς η μέγιστη απόσταση παρουσιάζεται στα σημεία $\left(\pm\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}, f\left(\pm\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}\right)\right)$ δηλαδή στα σημεία $\left(\pm\frac{\sqrt{2\ln 2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



2.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

2.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να αποδείξετε ότι
$$2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)f'(x)\,dx = \left((f(\beta))^2 - (f(\alpha))^2\right).$$

2. Για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι γνωστό ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,1)$. Να βρείτε το ολοκλήρωμα
$$\int_{1}^{2}\left(x + f(x)\,f'(x)\right)dx.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int x^2 e^{-x} dx$.

2. Έστω $h > 0$ και $E(h)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 e^{-x}$ και τις ευθείες $y = 0$, $x = h$, $x = 0$.

   (α′) Να εκφράσετε το $E(h)$ συναρτήσει του h.

   (β′) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το $E(h)$.

2.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό Β′ μέρος §3.5 βιβλίο Α3.

2. Έχουμε:

$$\int_1^2 \left(x + f(x) f'(x)\right) dx = \int_1^2 x dx + \int_1^2 f(x) f'(x)\, dx \underset{\text{Ερώτημα 1.}}{=}$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left((f(1))^2 - (f(2))^2\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(1^2 - 2^2\right) = 0.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό Β′ μέρος βιβλίο §3.2 Α1 i).

2. (α′) Αξιοποιώντας την απαντηση στο ερώτημα 1. έχουμε:

$$E(h) = \int_0^h x^2 e^{-x} dx = 2 - e^{-h}\left(h^2 + 2h + 2\right).$$

Είναι $E'(h) = h^2 e^{-h} > 0$ επομένως $E \uparrow$ (η μονοτονία είναι αναμενόμενη αφου όταν το h αυξάνει προστίθεται εμβαδόν).

(β′) Το σύνολο τιμών της h είναι το $\left(\lim\limits_{h\to 0^+} E(h), \lim\limits_{h\to+\infty} E(h)\right)$. Έχουμε

- $\lim\limits_{h\to 0^+} E(h) = \lim\limits_{h\to 0^+} \left(2 - e^{-h}\left(h^2 + 2h + 2\right)\right) = 0$
- $\lim\limits_{h\to+\infty} E(h) = \lim\limits_{h\to+\infty} \left(2 - \left(\frac{h^2+2h+2}{e^h}\right)\right) = 2$ αφού

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{h^2 + 2h + 2}{e^h} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{h\to+\infty} \frac{2h+2}{e^h} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{h\to+\infty} \frac{2}{e^h} = 0.$$

Επομένως το $E(h)$ μπορεί να πάρει όλες τις τιμές μεταξύ 0, 2 και μόνο αυτές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σχολικό έτος 2001-2002

3.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

3.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η εξίσωση

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \quad (1)$$

1. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την (1).

2. Να αποδείξετε ότι αν z είναι μία οποιαδήποτε λύση της (1) τότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών

$$z, \quad \frac{1}{\overline{z}}, \quad -z$$

είναι σημεία συνευθειακά.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Αν $z = \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta$ να αποδείξετε ότι

$$z^\nu + \frac{1}{z^\nu} = 2\text{συν}(\nu\theta) \quad (2)$$

2. Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει η (2). Να αποδείξετε ότι:

   (α′) $(z^\nu \overline{z}^\nu - 1)(z^\nu - \overline{z}^\nu) = 0$.

   (β′) Αν $z^\nu \notin \mathbb{R}$ τότε ισχύει $|z| = 1$.

   (γ′) Αν $z^\nu \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $|z| = 1$.

   (δ′) Υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R}$ ώστε $z = \text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi$.

3.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο §2.2 Α13 α) σελ. 96

2. Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί $1 \pm i\sqrt{2}$ πρέπει να αποδείξουμε ότι αν επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε z από αυτούς οι εικόνες των
$$z, \; \frac{1}{\bar{z}}, \; -z \;\; (*)$$
και οι εικόνες των
$$\bar{z}, \; \frac{1}{\bar{\bar{z}}}, \; -\bar{z}, \; -z \;\; (**)$$
είναι σημεία συνευθειακά. Επειδή οι $(**)$ είναι συζυγείς των $(*)$ οι εικόνς τους θα είναι συμμετρικές ώς προς τον x−άξονα επομένως λόγω συμμετρίας αρκεί να επαληθεύσουμε την συμμετρία για μία μόνο από τις δύο τριάδες επιλέγοντας $z = 1 + i\sqrt{2}$ οπότε $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{1-i\sqrt{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i\sqrt{2}$ και $-z = -1 - i\sqrt{2}$. Άρα θέλουμε τα σημεία $A\left(1, \sqrt{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)$, $\mathit{\Gamma}\left(-1, -\sqrt{2}\right)$ να είναι συνευθειακά. Ένας τρόπος είναι να διαπιστώσουμε την ισότητα των συντελεστών διευθύνσεως $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}$ δηλαδή την ισότητα
$$\frac{\frac{1}{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}}{-1 - 1},$$
η οποία ισχύει αφού και τα δύο μέλη της είναι ίσα με $\sqrt{2}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο §2.4 Β6 α) σελ. 112

2. (α′) Αφού $z^\nu + \frac{1}{z^\nu} = 2\sigma\upsilon\nu\left(\nu\theta\right) \in \mathbb{R}$ θα είναι $\overline{z^\nu + \frac{1}{z^\nu}} = z^\nu + \frac{1}{z^\nu}$ δηλαδή
$$\bar{z}^\nu + \frac{1}{\bar{z}^\nu} = z^\nu + \frac{1}{z^\nu}$$
από την οποία προκύπτει διαδοχικά:
$$\bar{z}^\nu + \frac{1}{\bar{z}^\nu} = z^\nu + \frac{1}{z^\nu}$$
$$z^\nu - \bar{z}^\nu = \frac{z^\nu - \bar{z}^\nu}{z^\nu \bar{z}^\nu}$$
$$\left(z^\nu - \bar{z}^\nu\right)\left(1 - \frac{1}{z^\nu \bar{z}^\nu}\right) = 0$$
και επομένως η αποδεικτέα.

(β′) Αφού $z^\nu \notin \mathbb{R}$ θα είναι $z^\nu \neq \bar{z}^\nu$ και επομένως η (α′) μας δίνει ότι $z^\nu \bar{z}^\nu = 1$ δηλαδή $|z|^{2\nu} = 1$ και $|z| = 1$.

(γ′) Έστω $a = z^\nu \in \mathbb{R}$. Από την (2) έχουμε ότι $a + \frac{1}{a} = 2\text{συν}(\nu\theta)$ και επομένως $-2 \leq a + \frac{1}{a} \leq 2$ άρα

$$\frac{(a+1)^2}{a} \geq 0 \text{ και } \frac{(a-1)^2}{a} \leq 0.$$

- Αν $a < 0$ η πρώτη σχέση μας δίνει ότι $(a+1)^2 \leq 0$ και επομένως $a = -1$.
- Αν $a > 0$ η δεύτερη σχέση μας δίνει ότι $(a-1)^2 \leq 0$ και επομένως $a = 1$.

Άρα $z^\nu = \pm 1$ και επομένως $|z|^\nu = |z^\nu| = |\pm 1| = 1$ και $|z| = 1$.

(δ′) Σε κάθε περίπτωση είναι $|z| = 1$ και επομένως αν φ είναι ένα όρισμα του z θα είναι $z = |z|(\text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi) = \text{συν}\varphi + i\text{ημ}\varphi$.

3.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

3.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x + \mu}{x}$$

1. Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

2. (α′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_g$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 = \mu$$

(β′) Να αποδείξετε ότι αν $\mu \neq 0$ τότε $g\left(2\sqrt{|\mu|}\right) = g\left(\frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}}\right)$.

(γ′) Να αποδείξετε ότι η τιμή που βρήκατε στο ερώτημα (1) είναι η μοναδική τιμή του μ για την οποία η g είναι 1-1.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{ημ}x}{x} & , \quad x < 0 \\ \text{συν}x & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}.$$

1. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την f.

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$f(\xi) = f(\xi - f(\xi))$$

3.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο B′ Μέρος §1.6 B3 (η δεύτερη συνάρτηση).

2. (α′) $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 + \frac{\mu}{x_1} = x_2 + 2 + \frac{\mu}{x_2} \Leftrightarrow x_1 + \frac{\mu}{x_1} - x_2 - \frac{\mu}{x_2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\frac{x_1x_2-\mu}{x_2x_1} = 0 \underset{x_1-x_2\neq 0}{\Leftrightarrow} x_1x_2 = \mu$

   (β′) Με $x_1 = 2\sqrt{|\mu|}, x_2 = \frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}}$ είναι $x_1x_2 = 2\sqrt{|\mu|}\frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}} = \mu$ οπότε από το προηγούμενο θα είναι $g(x_1) = g(x_2)$

   (γ′) *Έστω ότι* $\mu \neq 0$. Τότε οι μη μηδενικοί αριθμοί

$$x_1 = 2\sqrt{|\mu|}, x_2 = \frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}},$$

   είναι διάφοροι διότι:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow 2\sqrt{|\mu|} = \frac{\mu}{2\sqrt{|\mu|}} \Leftrightarrow 2\sqrt{|\mu|}2\sqrt{|\mu|} = \mu \Leftrightarrow 4|\mu| = \frac{1}{4}\mu \quad \text{(αδύνατο)}.$$

   Από το (β′) όμως είναι $g(x_1) = g(x_2)$. Επομένως στην περίπτωση αυτή η f δεν είναι 1-1.
   Έστω ότι $\mu = 0$. Θα δείξουμε ότι αν $g(x_1) = g(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$. Πράγματι αν ήταν $x_1 \neq x_2$ τότε από το (α′) θα ίσχυε $x_1x_2 - \mu = 0$ δηλαδή $x_1x_2 - 0 = 0$ δηλαδή $x_1x_2 = 0$ πράγμα αδύνατο αφού $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{0\}$. Επομένως η g είναι 1-1.
   Άρα η μόνη τιμή του μ για την οποία η f είναι 1-1 είναι η $\mu = 0$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο B′ Μέρος §1.8 A4 ii).

2. Από το ρώτημα 1. η f είναι συνεχής. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - f(x - f(x)),$$

   η οποία είναι συνεχής ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ και $f(x - f(x))$. Είναι

$$h(0) = f(0) - f(0 - f(0)) =$$

$$\sigma\upsilon\nu 0 - f(-\sigma\upsilon\nu 0) = 1 - f(-1) = 1 - \frac{\eta\mu(-1)}{-1} = 1 - \eta\mu 1 > 0$$

   (αφού $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$). Και

$$h(\pi) = f(\pi) - f(\pi - f(\pi)) =$$

$$\sigma\upsilon\nu\pi - f(\pi - \sigma\upsilon\nu\pi) = -1 - \sigma\upsilon\nu(\pi + 1) < 0$$

   (αφού $\pi < \pi + 1 < \frac{3\pi}{2}$). Από το θεώρημα του Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ξ μεταξύ των $0, \pi$ ώστε $h(\xi) = 0$ δηλαδή $f(\xi) = f(\xi - f(\xi))$.

3.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

3.3.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω z ένας μιγαδικός του οποίου η εικόνα ανήκει στην ευθεία και

$$x + y = 1$$

1. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού iz ανήκει στην ευθεία

$$x - y = -1$$

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να εξετάσετε αν μπορεί να ισχύει:

(α′) $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β′) $\mathrm{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x) = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$g'(x) - f'(x) = f''(x)(x - x_0)$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι το $M(x_0, f(x_0))$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ των f, g.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο M.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $0 < \beta < \alpha$ και οι συναρτήσεις

$$\varphi(x) = \sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x$$

και

$$\psi(x) = \sqrt{(x+\alpha)(x-\beta)} - x$$

1. Να ορίσετε την συνάρτηση $\psi - \varphi$.

13 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τους αριθμούς α, β αν

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 7$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 5$$

12 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Να αποδείξετε ότι αν για μία συνεχή συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ υπάρχουν x_1, x_2 ώστε

$$h(x_1) = e^{-x_1} \quad \text{και} \quad h(x_2) = 2e^{-x_2}$$

τότε:

(α′) $x_1 \neq x_2$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β′) Υπάρχει x_3 μεταξύ των x_1, x_2 έτσι ώστε

$$h(x_3) = \frac{3e^{-x_3}}{2}$$

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(e^x h(x)) = 0$$

για όλα τα x.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Αν $z = a + bi$ και $iz = c + di$ τότε αφού $iz = -b + ai$ θα είναι $c = -b$ και $d = a$. Αλλά τότε $b = -c$ και $a = d$. Αφού $a + b = 1$ είναι και $d - c = 1$ ή $c - d = -1$. Επομένως η εικόνα τοι iz ανήκει στην ευθεία $x - y = -1$.

2. Γενικά αν ο $z = x + yi$ έχει πρωτεύον όρισμα διάφορο των $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ τότε $y \neq 0$ τότε
$$\text{εφ}\mathrm{Arg}\,(z) = \frac{y}{x}$$
Στην ειδική περίπτωση όπου η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία $x + y = 1$ θα είναι $y = 1 - x$ και επομένως
$$\text{εφ}\mathrm{Arg}\,(z) = \frac{1}{x} - 1$$
(α΄) Αν είναι $\mathrm{Arg}\,(z) = \frac{\pi}{4}$ τότε θα πρέπει $\frac{1}{x} - 1 = 1$ και $x = y = \frac{1}{2}$. Οπότε πράγματι ο $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ που η εικόνα του ανήκει στην ευθεία $x + y = 1$ έχει πρωτεύον όρισμα $\frac{\pi}{4}$.
(β΄) Αν είναι $\mathrm{Arg}\,(z) = \frac{3\pi}{4}$ θα πρέπει $\frac{1}{x} - 1 = -1$ πράγμα αδύνατον. Επομένως δεν υπάρχει μιγαδικός με εικόνα στην ευθεία $x + y = 1$ και πρωτεύον όρισμα $\frac{3\pi}{4}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

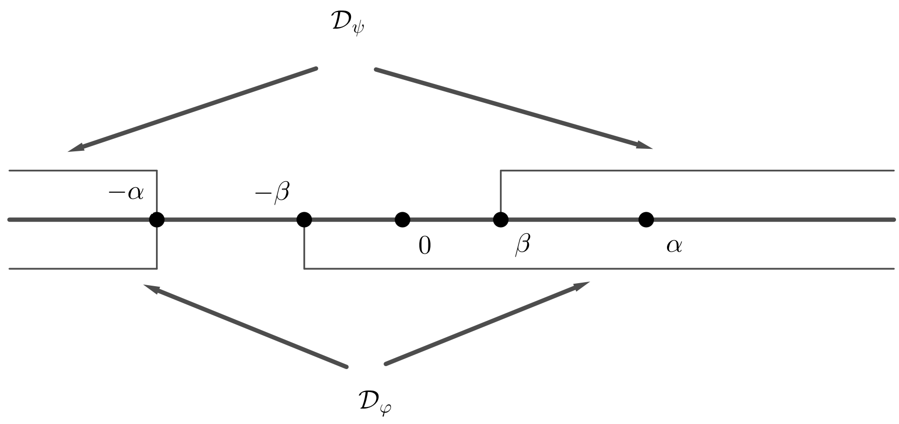
1. Παραγωγίζοντας την g βρίσκουμε:
$$g'(x) = f''(x)(x - x_0) + f'(x),$$
από την οποία προκύπτει η αποδεικτέα σχέση.

2. Το M προφανώς ανήκει στην $\mathcal{C}_f$. Επίσης $g(x_0) = f(x_0)$ άρα ανήκει και στην $\mathcal{C}_g$. Επομένως είναι κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

3. Οι εφαπτομένες των $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ στο M, προφανώς, έχουν κοινό σημείο το M. Οι συντελεστές διευθύνσεως τους είναι αντιστοίχως $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Θέτοντας $x = x_0$ στην σχέση του 1. βρίσκουμε ότι είναι ίσοι. Άρα οι δύο εφαπτομένες έχουν κοινό σημείο και ίσους συντελεστές διευθύνσεως και επομένως συμπίπτουν.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Είναι $-\alpha < -\beta < 0 < \beta < \alpha$ και
$$\mathcal{D}_\varphi = (-\infty, -\alpha] \cup [-\beta, +\infty),$$
$$\mathcal{D}_\psi = (-\infty, -\alpha] \cup [\beta, +\infty).$$
Σε μια προχειρη απεικόνιση:



Είναι $\mathcal{D}_{\psi-\varphi} = \mathcal{D}_\psi \cap \mathcal{D}_\varphi = (-\infty, -\alpha] \cup [\beta, +\infty)$.

Ο τύπος της ζητούμενης συνάρτησης είναι:

$$(\psi - \varphi)(x) = \sqrt{(x+\alpha)(x-\beta)} - \sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}.$$

2. Έχουμε:

$$\varphi(x) = \sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x = \frac{\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x\right)\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x\right)}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} =$$

$$\frac{(\alpha+\beta)x + \alpha\beta}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} = \frac{x\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)} + x} \underset{x>0}{=}$$

$$\frac{\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+\frac{\beta}{x}\right)} + 1} \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Όμοια:

$$\psi(x) = \sqrt{(x+\alpha)(x-\beta)} - x \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Θα είναι

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 7, \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = 5,$$

από τις οποίες βρίσκουμε:

$$\alpha = 12, \quad \beta = 2.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. (α′) Αν υποτεθεί ότι $x_1 = x_2 = k$ τότε $h(x_1) = h(x_2)$ και επομένως $e^{-k} = 2e^{-k}$ που μας οδηγεί στο άτοπο συμπέρασμα ότι $1 = 2$. Επομένως $x_1 \neq x_2$.

   (β′) Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση
$$g(x) = h(x) - \frac{3e^{-x}}{2}$$
   ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Είναι
$$g(x_1) = e^{-x_1} - \frac{3e^{-x_1}}{2} = -\frac{1}{2}e^{-x_1} < 0,$$
$$g(x_2) = 2e^{-x_2} - \frac{3e^{-x_2}}{2} = \frac{1}{2}e^{-x_2} > 0.$$
   Επομένως από το θεώρημα το Bolzano η g έχει ρίζα x_3 στο ανοικτό διάστημα με άκρα x_1, x_2. Για αυτό το x_3 θα ισχύει
$$h(x_3) = \frac{3e^{-x_3}}{2}.$$

2. Για δοθέν x το $e^x h(x)$ θα συμπίπτει με κάποια από τις ρίζες της f δηλαδή με κάποιον από τους αριθμούς 1 ή 2. Εξετάζουμε αν μπορεί για κάποιο x να είναι $e^x h(x) = 1$ και για κάποιο άλλο $e^x h(x) = 2$. Αυτό σημαίνει ότι για την συνεχή συνάρτηση h θα υπάρχουν x_1, $x =_2$ ώστε:
$$e^{x_1} h(x_1) = 1 \quad \text{και} \quad e^{x_2} h(x_2) = 2$$
   δηλαδή
$$h(x_1) = e^{-x_1} \quad \textit{και} \quad h(x_2) = 2e^{-x_2}.$$
   Αλλά τότε από το ερώτημα 1. (β′) θα υπάρχει x_3 ώστε $h(x_3) = \frac{3e^{-x_3}}{2}$ δηλαδή $e^{x_3} h(x_3) = \frac{3}{2}$ κάτι που έρχεται σε αντίθεση με το ότι για ολα τα x το $e^x h(x)$ πρέπει να ειναι 1 ή 2. Άρα:

   - Ή θα είναι $h(x) = e^{-x}$ για όλα τα x
   - είτε θα είναι $h(x) = 2e^{-x}$ για όλα τα x

   και επομένως οι ζητούμενες συνεχείς συναρτήσεις είναι οι
$$h(x) = e^{-x}, \quad h(x) = e^{-x}.$$

3.4 Διαφορικός Λογισμός.

3.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$.

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής.

2. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{e^{x-1} - 1}$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για μία συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$$

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

2. (α′) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

   (β′) Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει

$$|f(x) - x| = \frac{1}{2\left(f^2(x) + xf(x) + x^2\right) + 6}$$

   (γ′) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της $\mathcal{C}_f$ για $x \to +\infty$.

3.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος §2.8 Α1 i).

2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{e^{x-1}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^5-5x^4+2}{e^{x-1}-1} =_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 1} \frac{15x^4-20x^3}{e^{x-1}} = -5$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος §2.7 Β4.

2. (α′) Από την παραγώγιση της δοθείσας σχέσης έχουμε ότι $6f^2(x)f'(x) + 6 = 6x^2 + 6$ από την οποία προκύπτει ότι $f'(x)\left(f^2(x) + 1\right) = x^2 + 1$. Αλλά για κάθε x είναι $x^2 + 1 > 0$ και $f^2(x) + 1 > 0$ επομένως θα είναι και $f'(x) > 0$. Άρα $f \uparrow$.

(β′) Από την υπόθεση διαδοχικά έχουμε

$$2f^3(x) - 2x^3 + 6f(x) - 6x = 1 \Rightarrow$$

$$2\left(f^3(x) - x^3\right) + 6(f(x) - x) = 1 \Rightarrow$$

$$2(f(x) - x)\left(f^2(x) + f(x)x + x^2\right) + 6(f(x) - x) = 1 \Rightarrow$$

$$(f(x) - x)\left(2\left(f^2(x) + f(x)x + x^2\right) + 1\right) = 1 \Rightarrow$$

$$f(x) - x = \frac{1}{2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1} \Rightarrow$$

$$|f(x) - x| = \frac{1}{|2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1|}$$

Αλλά είναι γνωστό ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β ισχύει $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$. Επομένως είναι $2\left(f^2(x) + f(x)x + x^2\right) + 1 \geq 0$. Άρα

$$|f(x) - x| = \frac{1}{2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1}$$

(γ′) Από την υπόθεση θέτοντας όπου $x = 0$ έχουμε ότι $2f^3(0) + 6f(0) = 1$ δηλαδή ότι $2f(0)\left(f^2(0) + 3\right) = 1$. Άρα $f(0) > 0$. Αλλά είναι $f \uparrow$ επομένως για κάθε $x > 0$ θα είναι $f(x) > 0$. Επομένως για $x > 0$ θα ισχύει:

$$|f(x) - x| = \frac{1}{2(f^2(x) + f(x)x + x^2) + 1} < \frac{1}{2x^2 + 1}$$

δηλαδή:

$$-\frac{1}{2x^2 + 1} < f(x) - x < \frac{1}{2x^2 + 1}$$

Αλλά $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2+1}\right) = 0$ και από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικης παράστασης της f για $x \to +\infty$.

3.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

3.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{x}$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 27$.

2. Να βρείτε για ποιά τιμή του λ η ευθεία $x = \lambda$ χωρίζει το παραπάνω χωρίο δύο ισοδύναμα μέρη.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για μία συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_0^x tg(t)\,dt = x^4 + x^6$$

για κάθε x .

1. Να βρείτε το $g(1)$.
2. (α′) Να βρείτε τον τύπο της g.

   (β′) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx = 0$ τότε θα είναι $\alpha = \beta$.

3.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.7 Α2 i).
2. Θα πρέπει $0 < \lambda < 27$ και

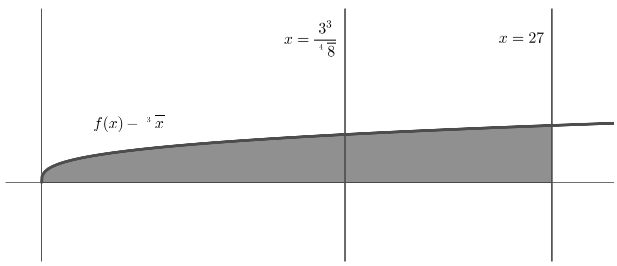
$$\int_0^\lambda \sqrt[3]{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{27} \sqrt[3]{x}dx.$$

Δηλαδή πρέπει:

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{\lambda}^4 = \frac{243}{8},$$

από την οποία διαδοχικά βρίσκουμε $\sqrt[3]{\lambda}^4 = \frac{4}{3}\cdot\frac{243}{8}$, $\sqrt[3]{\lambda}^4 = \frac{81}{2}$, $\lambda = \frac{3^3}{\sqrt[4]{2^3}}$. Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η

$$x = \frac{3^3}{\sqrt[4]{2^3}}.$$



ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.5 Β1.

2. (α′) Έχουμε ότι για $x \neq 0$ είναι $g(x) = \frac{6x^5+4x^3}{x} = 6x^4 + 4x^2$. Λόγω συνεχείας είναι $g(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Επειδή η $6x^4 + 4x^2$ για $x = 0$ μας δίνει το $0 = g(0)$ έχουμε τελικά ότι

$$g(x) = 6x^4 + 4x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(β′) Είναι $g(x) \geq 0$ και το «ίσον» ισχύει μόνο για $x = 0$.

- Αν είναι $\alpha < \beta$ θα είναι $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx > 0$ (άτοπο).
- Αν είναι $\alpha < \beta$ τότε $\int_\beta^\alpha g(x)\,dx > 0$ και επομένως $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx < 0$ (άτοπο).

Άρα $\alpha = \beta$.

3.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

3.6.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω

$$f(x) = x^2 - \ln x$$

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = \ln x$ δεν έχει λύση.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in (0, \beta - \alpha)$ να ισχύει:

$$g(\alpha + x) = g(\beta - x)$$

1. Να αποδείξετε ότι $g(a) = g(\beta)$.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε η γραφική παράσταση της g έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x)\,dx = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x)\,dx$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$$

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την f.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 4$ ισχύει

$$2f(x-1) \leq \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt \leq 2f(x+1)$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2 - e^x$$

και η ευθεία

$$(\varepsilon) \qquad y = -\tfrac{1}{\lambda}x \qquad \text{με } \lambda > 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η (ε) τέμνει την $\mathcal{C}_f$ σε δύο ακριβώς σημεία

$$M_1(x_1, f(x_1)),\ M_2(x_2, f(x_2))$$

με $x_1 < x_2$.

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Για τα x_1, x_2 του προηγουμένου ερωτήματος:

(α΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = e^{\xi} = \frac{1}{\lambda}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β΄) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την (ε) και την $\mathcal{C}_f$ είναι ίσο με

$$E = \frac{(x_2 - x_1)(4\lambda - 2 + x_2 + x_1)}{2\lambda}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Η f είναι συνεχής με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$.

    - Λόγω συνεχείας αν η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο αυτή θα είναι στο 0. Πράγματι είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ επομένως η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.
    - Αν η f έχει πλάγια-οριζόντια ασύπμπτωτη αυτή θα είναι για $x \to +\infty$. Αλλά
    $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty,$$
    αφού
    $$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$
    Επομένως η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

2. Είναι $f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$ με $x > 0$ και επομένως η f' είναι αρνητική στο $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ και θετική στο $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, +\infty\right)$. Στο $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$ είναι f ↧ και στο $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, +\infty\right)$ είναι f ↥. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ τον αριθμό $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$.

3. Η ελάχιστη τιμή της f είναι ο θετικός αριθμός $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$. Επομένως η f παίρνει μόνο θετικές τιμές και δεν έχει ρίζες. Άρα η εξίσωση $x^2 = \ln x$ που είναι ισοδύναμη με την $f(x) = 0$ δεν έχει λύση.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Από την $g(\alpha + x) = g(\beta - x)$ έχουμε:

$$\lim_{x \to +0^+} g(\alpha + x) = \lim_{x \to +0^+} g(\beta - x)$$

   και λόγω συνεχείας ότι $g(\alpha) = g(\beta)$.

2. Από το προηγούμενο ερώτημα εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ συμπεραίνουμε ότι για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$ θα είνα $f'(\xi) = 0$. Η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $(\xi, f(\xi))$ θα είναι παράλληλη στον $x'x$.

3. Έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x)\, dx \underset{x=a+u}{=} \int_{0}^{\frac{\beta-\alpha}{2}} g(u)\, du,$$

$$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x)\, dx \underset{x=\beta-u}{=} -\int_{\frac{\beta-\alpha}{2}}^{0} g(u)\, du = \int_{0}^{\frac{\beta-\alpha}{2}} g(u)\, du,$$

   από τις οποίες προκύπτει η αποδεικτέα.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Η συνάρτηση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι

$$f'(x) = 2\frac{x^2 - 2x - 2}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

   Στα διαστήματα $\left(-\infty, 1 - \sqrt{3}\right)$, $\left(1 + \sqrt{3}, +\infty\right)$ η παράγωγος της είναι θετική και στο $\left(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right)$ είναι αρνητική επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty, 1 - \sqrt{3}\right]$, $\left[1 + \sqrt{3}, +\infty\right)$ και γνησίως φθινουσα στο $\left[1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right]$.

2. Για $x > 4$ είναι $1 + \sqrt{3} < x - 1$ επομένως το διάστημα $[x - 1, x + 1]$ περιέχεται στο $\left[1 + \sqrt{3}, +\infty\right)$ άρα και σε αυτό η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως για κάθε $t \in [x - 1, x + 1]$ είναι

$$f(x - 1) \le f(t) \le f(x + 1).$$

   Άρα

$$\int_{x-1}^{x+1} f(x - 1)\, dt \le \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt \le \int_{x-1}^{x+1} f(x + 1)\, dt,$$

   από την οποία έπεται η αποδεικτέα ανισότητα.

3. Ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty} f(x-1) \underset{x-1=u}{=} \lim_{u\to+\infty} f(u) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1) \underset{x+1=u}{=} \lim_{u\to+\infty} f(u) = 1.$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω και το κριτήριο παρεμβολής στην ανισότητα του ερωτήματος 2. συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt = 2.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία (ε) καθορίζεται από το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$2 - e^x + \frac{1}{\lambda}x = 0,$$

δηλαδή το πλήθος των ριζών της συνάρτησης

$$p(x) = 2 - e^x + \frac{1}{\lambda}x.$$

Είναι $p'(x) = \frac{1-e^x\lambda}{\lambda}$ και επομένως η p είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\ln\lambda]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-\ln\lambda, +\infty)$. Επομένως:

$$p((-\infty, -\ln\lambda]) = \left(\lim_{x\to-\infty} p(x), p(-\ln\lambda)\right] = \left(-\infty, \frac{2\lambda - 1 - \ln\lambda}{\lambda}\right],$$

$$p([-\ln\lambda, +\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} p(x), p(-\ln\lambda)\right] = \left(-\infty, \frac{2\lambda - 1 - \ln\lambda}{\lambda}\right],$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{2}{e^x} - 1 + \frac{1}{\lambda}\frac{x}{e^x}\right) = -\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Αλλά

$$\frac{2\lambda - 1 - \ln\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda + \overbrace{(\lambda - 1 - \ln\lambda)}^{\geq 0}}{\lambda} \geq 1.$$

Επομένως τα $p((-\infty, -\ln\lambda])$, $p([-\ln\lambda, +\infty))$ περιέχουν το 0 άρα υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 < \ln\lambda < x_2$ ώστε $p(x_1) = p(x_2) = 0$. Αυτά τα x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των δύο και μοναδικών κοινών σημείων της ευθείας (ε) με την $\mathcal{C}_f$.

2. (α′) Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την e^x στο διάστημα $[x_1, x_2]$ θα έχουμε ότι

$$\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = e^{\xi}$$

για κάποιο $\xi \in (x_1, x_2)$ το οποίο είναι μοναδικό διότι η παράγωγος e^x της e^x είναι γνησίως αύξουσα και μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$ μία μόνο φορά.

Αλλά

$$2 - e^{x_1} + \frac{1}{\lambda}x_1 = 2 - e^{x_2} + \frac{1}{\lambda}x_2 = 0,$$

επομένως

$$\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\left(2 + \frac{1}{\lambda}x_2\right) - \left(2 + \frac{1}{\lambda}x_1\right)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\lambda},$$

άρα υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} = e^{\xi} = \frac{1}{\lambda}.$$

(β′) Επειδή για την συνάρτηση p του ερωτήματος 1. ισχύει $p(x) > 0$ για εκείνα τα x όπου η $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται πάνω από την (ε) και η $p(x)$ είναι θετική στο (x_1, x_2) έχουμε ότι

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(2 - e^x + \frac{1}{\lambda}x\right)dx = \frac{1}{2}\frac{4\lambda\left(x_2 - x_1\right) + \left(x_2^2 - x_1^2\right) - 2\lambda\left(e^{x_2} - e^{x_1}\right)}{\lambda} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{4\lambda\left(x_2 - x_1\right) + \left(x_2^2 - x_1^2\right) - 2\lambda\left(x_2 - x_1\right)\frac{1}{\lambda}}{\lambda},$$

η οποία συνδυαζόμενη με την

$$e^{x_2} - e^{x_1} = \frac{1}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right),$$

μας δίνει την αποδεικτέα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Σχολικό έτος 2002-2003

4.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

4.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την σχέση:

$$\bar{z} = 2 - z \tag{4.1}$$

2. Να αποδείξετε ότι αν ο z ικανοποιεί την (4.1) τότε η εικόνα του $\frac{1}{z}$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο το $K\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών z_1, z_2 ισχύει

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μη μηδενικών μιγαδικών z_1, z_2 ισχύει

$$\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|^2 + \left|\frac{z_1}{|z_1|} - \frac{z_2}{|z_2|}\right|^2 = 4$$

4.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α12 δ) σελ. 96

2. Προφανώς αν ο z ικανοποιεί την (4.1) τότε είναι διάφορος του μηδενός. Έστω $w = \frac{1}{z}$ οπότε $z = \frac{1}{w}$. Από την υπόθεση θα ισχύει

$$\frac{1}{\bar{w}} = 2 - \frac{1}{w}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$2w\bar{w} - (w + \bar{w}) = 0.$$

Θέτοντας $w = x + yi$ βρίσκουμε ότι

$$x^2 + y^2 - x = 0.$$

Εξίσωση αυτή είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \varGamma = 0$ με

$$A = B = 1,\ \ \varGamma = 0,\ \ A^2 + B^2 - 4\varGamma = 1 > 0$$

άρα πρόκειται για εξίσωση κύκλου με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

και ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\varGamma}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Σε αυτόν τον κύκλο ανήκει η εικόνα του $\frac{1}{z}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α9 σελ. 101

2. Η απόδειξη μπορεί να γίνει και αυτοτελώς αλλά πιο εύκολα μπορεί να προκύψει από το πρώτο ερώτημα. Αν στην σχέση του ερωτήματος 1. στην θέση των z_1, z_2 θέσουμε τα $\frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z_2}{|z_2|}$ θα έχουμε

$$\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|^2 + \left|\frac{z_1}{|z_1|} - \frac{z_2}{|z_2|}\right|^2 = 2\left|\frac{z_1}{|z_1|}\right|^2 + 2\left|\frac{z_2}{|z_2|}\right|^2.$$

Το β′ μέλος της τελευταίας γίνεται

$$2\left(\frac{|z_1|}{||z_1||}\right)^2 + 2\left(\frac{|z_2|}{||z_2||}\right)^2 = 2\left(\frac{|z_1|}{|z_1|}\right)^2 + 2\left(\frac{|z_2|}{|z_2|}\right)^2 = 2 + 2 = 4$$

κσι έχουμε την αποδεικτέα.

4.1.3 Απαντήσεις

4.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

4.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 5x^3 - 2x + 1$.

1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
2. (α΄) Έστω $y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - y)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y)$.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 4}{f(x)} = +\infty$$

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.
2. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x} = 0$$

4.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 1.7 Α1 ii)
2. (α΄) Είναι $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Επομένως και $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - y) = \pm\infty$

   (β΄) Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε $y \in \mathbb{R}$ είναι τιμή της f. Θεωρούμε $y \in \mathbb{R}$ και την συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$. ΑΠό το προηγούμενο ερώτημα το όριο της g στο $-\infty$ είναι $-\infty$ και το όριο της στο $+\infty$ είναι $+\infty$. Επομένως θα υπάρχουν x_1, x_2 τέτοιοι ώστε $g(x_1) > 0, g(x_2) < 0$. Είναι $x_1 \neq x_2$ και αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano στο διάστημα με άκρα x_1, x_2 συνάγουμε ότι η g θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0. Θα είναι $g(x_0) = y$ και επομένως ο y είναι τιμή της f.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 1.6 Β4 i).
2. Είναι $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 1} f(x) \frac{1}{x} = 0 \cdot 1 = 0$

4.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

4.3.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$z^2 - \bar{z}^2 = 4i$$

1. Να εκφράσετε τον $y = \mathrm{Im}(z)$ ως συνάρτηση του $x = \mathrm{Re}(z)$

   15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι $|z| \geq \sqrt{2}$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τον z αν είναι γνωστό ότι ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x είναι $-\frac{1}{4}$.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases} ..$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι ίση με την συνάρτηση $g(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$.

   10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε τα:

   (α′) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) $f'(0)$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$\left|\frac{2z+1}{iz+1}\right| = 2.$$

1. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία με εξίσωση

$$4x + 8y = 3.$$

13 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $\frac{1}{z}$.

12 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$.

1. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο του άξονα $x'x$ διέρχεται ακριβως μία εφαπτομένη της $\mathcal{C}_\varphi$.

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $\nu > 2$ η συνάρτηση

$$\sigma(x) = \varphi(x) + \varphi(x+1) + \ldots + \varphi(x+\nu-1),$$

είναι αντιστρέψιμη και ισχύει

$$\sigma^{-1}(x) = \frac{\ln x + \ln(\alpha-1) - \ln(\alpha^\nu - 1)}{\ln \alpha}$$

Δίνεται ότι: Για κάθε πραγματικό αριθμό λ διάφορο του 1 ισχύει $1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{\nu-1} = \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

4.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Είναι

$$(x+yi)^2 - (x-yi)^2 = 4ixy$$

που συνδυαζόμενη με την υπόθεση δίνει $xy = 1$ δηλαδή

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

2. Είναι
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}},$$
επομένως έχουμε τις ισοδυναμίες:
$$|z| \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0.$$
Η τελευταία σχέση αληθεύει, άρα η πρώτη και έχουμε το αποδεικτέο.

3. Είναι $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ και επομένως $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{4}$ αν και μόνο αν $x = -2$ ή $x = 2$ που μας δίνουν $y = \frac{1}{2}$ ή $y = -\frac{1}{2}$ και $z = 2 + \frac{1}{2}i$ ή $z = -2 - \frac{1}{2}i$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Είναι $\sqrt{1+x+x^2} \geq 0$ επομένως $\sqrt{1+x+x^2} + 1 > 0$ επομένως και η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Άρα οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Για να είναι ίσες πρέπει $f(x) = g(x)$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   - Για $x \neq 0$ είναι
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)} =$$
$$\frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)} = \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = g(x).$$
   - Για $x = 0$ είναι $g(0) = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2} = f(0)$.

   Επομένως οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες.

2. Η $\sqrt{x}$ είναι συνεχής οπότε και η σύνθεση $\sqrt{1+x+x^2}$ είναι συνεχής καθώς και το άθροισμα $\sqrt{1+x+x^2} + 1$. Άρα η g είναι συνεχής. Αφού η f είναι ίση με την g είναι και αυτή συνεχής.

3. (α') Έχουμε:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} =$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+1} \underset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x}\right)} = .1$$

(β′) παραγωγίζοντας την g βρίσκουμε:

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{1+x+x^2}-x+1}{\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)^2\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Επομένως

$$f'(0) = g'(0) = \frac{3}{8}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Θα είναι $z \neq \frac{1}{i} = -i$ και για αυτά τα z έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\left|\frac{2z+1}{iz+1}\right| = 2 \Leftrightarrow |2z+1| = 2\,|iz+1| \Leftrightarrow$$

$$2\left|z+\frac{1}{2}\right| = 2\left|i\left(z+\frac{1}{i}\right)\right| \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{2}\right| = |z-i|\,.$$

Επομένως η εικόνα του z ισαπέχει από τις εικόνες των $-\frac{1}{2}$ και i. Άρα ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ και $(0,1)$. Το τμήμα αυτό έχει μέσο το σημείο $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ και συντελεστή διευθύνσεως 2. Άρα η μεσοκάθετος έχει συντελεστή διευθύνσεως $-\frac{1}{2}$ και εξίσωση

$$y-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\right),$$

που γράφεται και

$$4x+8y = 3.$$

2. Ο $z = 0$ δεν επαληθεύει την $\left|\frac{2z+1}{iz+1}\right| = 2$ επομένως ορίζεται πάντα ο $w = \frac{1}{z}$ της εικόνας του οποίου ζητάμε τον γεωμετρικό τόπο. Είναι $w \neq 0$ και $z = \frac{1}{w}$ άρα

$$\left|\frac{2\frac{1}{w}+1}{i\frac{1}{w}+1}\right| = 2,$$

η οποία ισοδυναμεί με την

$$\left|\frac{w+2}{w+i}\right| = 2.$$

Θέτοντας στην τελευταία $w = x+yi$ βρίσκουμε

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+(y+1)^2},$$

που ισοδυναμεί με την

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}y = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση του κύκλου με κέντρο $\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$ και ακτίνα $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ ο οποίος είναι και ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έστω $(p,0)$ τυχόν σημείο του $x'x$. Η τυχούσα εφαπτομένη της $\mathcal{C}_\varphi$ έχει εξίσωση
$$y - \alpha^{x_0} = \alpha^{x_0}\ln\alpha\,(x - x_0)$$
και διέρχεται από το $(p,0)$ αν και μόνο αν
$$0 - \alpha^{x_0} = \alpha^{x_0}\ln\alpha\,(p - x_0)\,,$$
δηλαδή αν
$$x_0 = \frac{1 + p\ln\alpha}{\ln\alpha}.$$
Επομένως υπάρχει μια μόνο εφαπτομένη της $\mathcal{C}_\varphi$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = \frac{1+p\ln\alpha}{\ln\alpha}$.

2. Είναι
$$\sigma(x) = \varphi(x) + \varphi(x+1) + \ldots + \varphi(x+\nu-1) =$$
$$\alpha^x + \alpha^{x+1} + \ldots + \alpha^{x+\nu-1} = \alpha^x\left(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{\nu-1}\right) = \alpha^x\frac{\alpha^\nu - 1}{\alpha - 1}.$$
Η α^x είναι γνησίως αύξουσα και $\frac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1} > 0$ επομένως η $\sigma(x)$ είνα γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη. Είναι
$$\sigma(x) = y \Leftrightarrow \alpha^x\frac{\alpha^\nu - 1}{\alpha - 1} = y \Leftrightarrow \alpha^x = \frac{(\alpha-1)\,y}{\alpha^\nu - 1} \Leftrightarrow$$
$$x\ln\alpha = \ln(\alpha-1) - \ln(\alpha^\nu - 1) + \ln y \Leftrightarrow x = \frac{\ln y + \ln(\alpha-1) - \ln(\alpha^\nu-1)}{\ln\alpha},$$
από την οποία με εναλλαγή των x, y προκύπτει ο αποδεικτέος τύπος για την σ^{-1}.

4.4 Διαφορικός Λογισμός.

4.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$$
με $\alpha < \beta < \gamma$.

1. Να αποδείξετε ότι η f έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

2. Να βρείτε πόσα σημεία καμπής έχει η f

ΖΗΤΗΜΑ 2

'Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $\mathcal{C}_f$

2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f, \quad f \circ f, \quad f \circ f \circ f, \ldots$$

Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες τους στο $+\infty$ είναι παράλληλες.

4.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 2.7 Β6.

2. Είναι:

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left(3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma\right)$$

Στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής και οι τιμές που παίρνει στα άκρα είναι ίσες με 0. Επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle και θα υπάρχουν ρ_1, ρ_2 με

$$\alpha < \rho_1 < \beta < \rho_2 < \gamma$$

ώστε $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$. Τα ρ_1, ρ_2 είναι αναγακστικά οι ρίζες του παράγοντα $3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ της $f'(x)$ και επομένως

$$3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 3(x-\rho_1)(x-\rho_2)$$

άρα θα είναι

$$f'(x) = 6(x-\alpha)(x-\rho_1)(x-\beta)(x-\rho_2)(x-\gamma)$$

Τώρα η f'', πάλι από το θεώρημα του Rolle θα έχει από μία ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα (α, ρ_1), (ρ_1, β), (β, ρ_2), (ρ_2, γ). Αλλά ή f'' είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού άρα θα έχει το πολύ 4 ρίζες. Επομένως θα έχει ακριβώς 4 ρίζες και θα έχει την μορφή:

$$f''(x) = k(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)(x-t_4)$$

όπου $k \neq 0$ (στην πραγματικότητα $k = 30$ αλλά αυτό δεν έχει σημασία). Η $f''(x)$ έχει ρίζες τα t_1, t_2, t_3, t_4 και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών της. Επομένως η f έχει 4 σημεία καμπής.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 2.9 Α3 iii).

2. Στο πρώτο ερώτημα βρήκαμεότι η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f για $x \to +\infty$. Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$ με πεδίο ορισμού το ίδιο με εκείνο της g. Θα ισχύει:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$
- $f(x) = x + \frac{1}{2} + g(x)$

Προφανώς $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Έχουμε:

$$f(f(x)) = f(x) + \frac{1}{2} + g(f(x)) =$$

$$x + \frac{1}{2} + g(x) + \frac{1}{2} + g(f(x)) = x + 1 + g(x) + g(f(x))$$

Αλλά

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) =_{g(x)=u} \lim_{u\to+\infty} g(u) = 0,$$

επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}(f(f(x)) - (x+1)) = \lim_{x\to+\infty}(g(x) + g(f(x))) = 0 + 0 = 0$$

Άρα η $f \circ f$ έχει ασύμπτωτη την $y = x + 1$. Επομένως

$$(f \circ f)(x) = x + 1 + h(x)$$

με

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.$$

Άρα

$$f(f(f(x))) = (f \circ f)(f(x)) =$$

$$f(x) + 1 + h(x) = x + \frac{1}{2} + g(x) + 1 + h(x) = x + \frac{3}{2} + g(x) + h(x)$$

επομένως αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x) + h(x)) = 0,$$

η ευθεία $y = x + \frac{3}{2}$ είναι ασύμπτωτη της $f(f(f(x)))$. Άρα (μπορεί να χρησιμοποιηθεί και επαγωγή χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο) τελικά οι ασύμπτωτες των

$$f,\ \ f \circ f,\ \ f \circ f \circ f, \ldots$$

είναι οι

$$y = x + \frac{1}{2}, \quad y = x + 1, \quad y = x + \frac{3}{2}, \quad y = x + 2, \ldots.$$

που είναι φυσικά παράλληλες.

4.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

4.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να αποδείξετε ότι
$$\int_1^2 \frac{x^3 + 7x}{x^2 + 5} dx + 2 \int_2^1 \frac{x}{x^2 + 5} dx = \frac{3}{2}.$$
2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα
$$I = \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 5} dx \;\; \text{και} \;\; J = \int_1^2 \frac{x^3 + 7x}{x^2 + 5} dx.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

'Εστω η συνάρτηση

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παραστάση της f και τον άξονα των x.
2. Να λύσετε την εξίσωση:
$$\int_3^t f(x)\, dx = 0.$$

4.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.5 Α2.
2. Από το ερώτημα 1. έχουμε ότι
$$J - 2I = \frac{3}{2}.$$
Επίσης
$$I = \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 5} dx \underset{x^2 = u}{=} \int_1^4 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u + 5} du =$$
$$\frac{1}{2} \left[\ln(u + 5)\right]_1^4 = \frac{1}{2} (\ln 9 - \ln 6) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$
Άρα
$$J = 2I + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \ln \frac{3}{2}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 3.7 Α3.

2. Έχουμε:

$$\int_3^t f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 9t^2 + 27 = 0.$$

Για να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο $2t^3 - 9t^2 + 27$ εργαζόμαστε με το σχήμα Horner. Διαιρέτες του σταθερού όρου 27 είναι ±1, ±3, ±9 και ±27. Διαπιστώνουμε ότι οι ±1 δεν είναι ρίζες. Δοκιμάζοντας τον 3 έχουμε:

2	-9	0	27	**3**
*	6	-9	-27	
2	-3	-9	-0	

Άρα

$$2t^3 - 9t^2 + 27 = (t-3)\left(2t^2 - 3t - 9\right)$$

και παραγοντοποιώντας το τριώνυμο έχουμε

$$2t^2 - 3t - 9 = (2t+3)(t-3)$$

και επομένως η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(2t+3)(t-3)^2 = 0,$$

από την οποία βρίσκουμε ότι $t = -\frac{3}{2}$, $t = 3$

4.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

4.6.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω

$$f(x) = \ln x - x$$

Να βρείτε:

1. Τα διαστήματα μονοτονίας της f.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Τα ακρότατα της f.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Τις ασύμπτωτες της f.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Το σύνολο τιμών της f.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

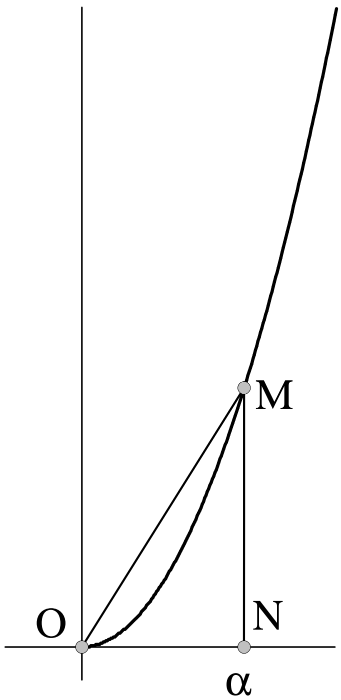
ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.

1. Να βρείτε σημείο της $\mathcal{C}_f$ που απέχει από το σημείο $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ελάχιστη απόσταση.

13 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$, την ευθεία $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$ και τον άξονα $x'x$. Έστω E_2 το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία O, $M(\alpha, f(\alpha))$ και $N(\alpha, 0)$.



Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$E_2 = \frac{3}{2} E_1$$

12 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλα τα x, y να ισχύει:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Έστω α, β με $0 < \alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι:

1. Για κάθε x ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x} f'(1)$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = (\beta - \alpha) f'(\xi)$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Για κάθε x ισχύει

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(tx)\, dt\right)' = \frac{1}{x}(\beta - \alpha) f'(1)$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Ένας πληθυσμός $\Pi(t)$ κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι 10^6 και μεταβάλλεται με ρυθμό μεταβολής

$$\left(2 \cdot 10^6\right) \frac{e^{-t}}{\left(1 + e^{-t}\right)^2}$$

1. Ο πληθυσμός $\Pi(t)$ με την πάροδο του χρόνου αυξάνει. Γιατί;

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το $\Pi(t)$.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε από από ποιά χρονική στιγμή και μετά ο πληθυσμός θα υπερβεί το 1.500.000.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Ποια θα είναι, κατά προσέγγισιν, η τιμή του πληθυσμού μετά πάροδο μεγάλου χρονικού διαστήματος;

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Είναι $\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$. Είναι

$$f'(x) = \frac{1-x}{x}$$

και επομένως η f' είναι θετική στο $(0,1)$ και αρνητική στο $(1,+\infty)$. Είναι επομένως $f \uparrow$ στο $(0,1]$ και $f \downarrow$ στο $[1,+\infty)$.

2. Από την μονοτονία συμπερείνουμε ότι η f έχει (ολικό) μέγιστο στο 1 το $f(1) = -1$.

3. Η f είναι συνεχής επομένως αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη θα είναι στο 0. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

επομένως η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Αν έχει πλάγια-οριζόντια ασύμπτωτη αυτή θα είναι για $\to +\infty$. Αλλά

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x1} = 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (-1)x\right) = +\infty$$

επομένως η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

4. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$$

επομένως λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τη μονοτονία έχουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι

$$f((0,+\infty)) = f((0,1] \cup [1,+\infty)) = f((0,1]) \cup f([1,+\infty)) =$$

$$(-\infty,-1] \cup (-\infty,-1] = (-\infty,-1].$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Η απόσταση του τυχόντος σημείου (x, x^2) της $\mathcal{C}_f$ δίνεται από την συνάρτηση

$$d(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}, \quad x \geq 0.$$

Είναι

$$d'(x) = \frac{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}{4d(x)},$$

και επειδή είναι $4x^2 + 2x + 1 > 0$ για όλα τα x θα είναι

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x, \qquad d'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

Επομένως η d είναι αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα, γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και στο $\frac{1}{2}$ παρουσιάζει ελάχιστο $d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

2. Είναι:

$$E_1 = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} x^2 dx = \frac{1}{3}\alpha^3$$
$$E_2 = \frac{1}{2}\alpha f(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \alpha^2 = \frac{1}{2}\alpha^3$$

από τις οποίες έχουμε το αποδεικτέο.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Για τυχόν x σταθερό παραγωγίζοντας ως προς y βρίσκουμε ότι

$$(xy)' f'(xy) = f'(y)$$

δηλαδή

$$xf'(xy) = f'(y),$$

για κάθε x, y. Θέτοντας $y = 1$ έχουμε το αποδεικτέο.

2. Αν στην ισότητα $f(xy) = f(x) + f(y)$ θέσουμε όπου x το α και όπου y το $\frac{\beta}{\alpha}$ έχουμε:

$$f\left(\alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha}\right) = f(\alpha) + f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = f(\beta) - f(\alpha).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[\alpha, \beta]$ έχουμε το αποδεικτέο.

3. Από την υπόθεση έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(tx)\,dt = \int_\alpha^\beta (f(t)+f(x))\,dt =$$

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_\alpha^\beta f(x)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + f(x)(\beta-\alpha).$$

Παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$$\left(\int_\alpha^\beta f(tx)\,dt\right)' = \left(\int_\alpha^\beta f(t)\,dt + f(x)(\beta-\alpha)\right)' = 0 + f'(x)(\beta-\alpha).$$

Αξιοποιώντας την $f'(x) = \frac{1}{x}f'(1)$ έχουμε το αποδεικτέο.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Είναι

$$\Pi'(t) = \left(2\cdot 10^6\right)\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} > 0,$$

επομένως το $\Pi(t)$ αυξάνει.

2. Το $\Pi(t)$ είναι εκείνη η παράγουσα της $\left(2\cdot 10^6\right)\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$ για η οποία για $t=0$ γίνεται 10^6. Για να την βρούμε αρκεί να βρούμε μια παράγουσα της $\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$. Έχουμε:

$$\int \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt \underset{e^{-t}=u}{=} \int \frac{-1}{(1+u)^2}du \underset{1+u=v}{=}$$

$$\int \frac{-1}{v^2}dv = \frac{1}{v}+c = \frac{1}{1+u}+c = \frac{1}{1+e^{-t}}+c.$$

Άρα

$$\Pi(t) = 2\cdot 10^6\left(\frac{1}{1+e^{-t}}+c\right).$$

Είναι

$$\Pi(0) = 2\cdot 10^6\left(\frac{1}{2}+c\right)$$

και αφού $\Pi(0) = 10^6$ θα είναι $c=0$. Επομένως:

$$\Pi(t) = 2\cdot 10^6\frac{1}{1+e^{-t}}.$$

3. Θέλουμε $\Pi(t) \geq \frac{3}{2}10^6$ δηλαδή

$$2\cdot 10^6\frac{1}{1+e^{-t}} \geq \frac{3}{2}10^6.$$

Καταλήγουμε στην $3e^{-t}\leq 1$ που μας δίνει $t\geq \ln 3$. Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι $\ln 3$.

4. Θέλουμε το $\lim_{t\to+\infty} \Pi(t)$ το οποίο είναι:

$$\lim_{t\to+\infty} 2\cdot 10^6 \frac{1}{1+e^{-t}} = 2\cdot 10^6 \frac{1}{1+0} = 2\cdot 10^6.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σχολικό έτος 2003-2004

5.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

5.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

1. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:
$$\frac{1}{z^2 - z}$$

2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει
$$z\bar{w} + \bar{z}w = 18$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. (α′) Αν $|z| = 1$ να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

   (β′) Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, ..., z_\kappa$ ισχύει
   $$|z_1| = |z_2| = ... = |z_\kappa| = 1$$
   να αποδείξετε ότι:
   $$|z_1 + z_2 + ... + z_\kappa| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_\kappa}\right|$$

2. Έστω ότι για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξετε ότι:
$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$$

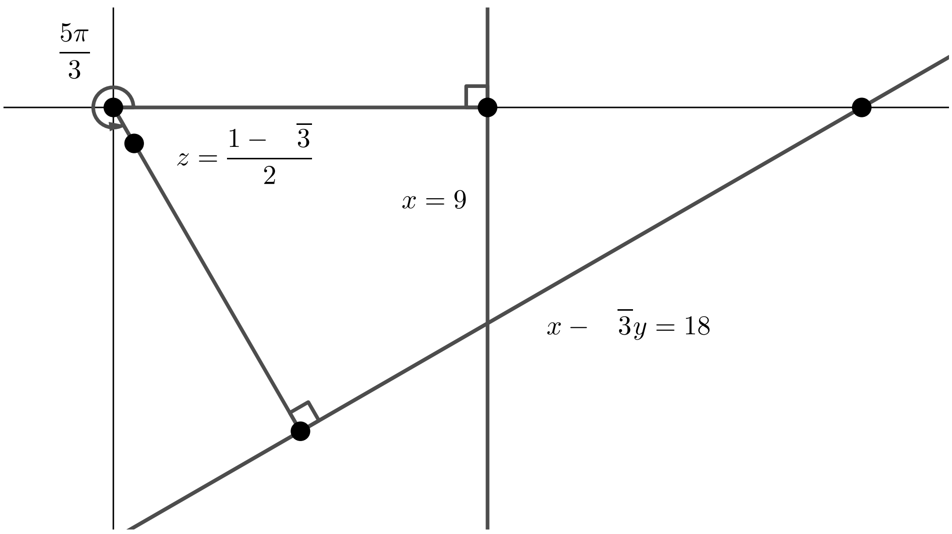
5.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β2 σελ. 96

2. Έστω $w = x + yi$. Αντικαθιστώντας τα z, w στην σχέση $z\bar{w} + \bar{z}w = 18$ βρίσκουμε μετά από τις πράξεις ότι $z\bar{w} + \bar{z}w = x - \sqrt{3}y$ επομένως ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w είναι η ευθεία με εξίσωση $x - \sqrt{3}y = 18$.

ΣΧΟΛΙΟ 2. Η σχέση $z\bar{w} + \bar{z}w = 18$ γράφεται $\mathrm{Re}(\bar{z}w) = 9$. Επομένως η εικόνα του $u = \bar{z}w$ ανήκει στην ευθεία $x = 9$. Είναι τότε $w = \frac{1}{\bar{z}}u = zw$ και επομένως τα w προκύπτουν αν τα σημεία-μιγαδικοί της $x = 9$ πολλαπλασιαστούν επί z ο οποίος έχει μέτρο 1. Άρα τα σημεία της $x = 9$ περιστρέφονται κατά το πρωτεύον όρισμα $\frac{5}{3}\pi$ της $x = 9$ και προκύπτει η ευθεία $x - \sqrt{3}y = 18$.



ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β10 σελ. 102

2. Είναι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ οπότε και

$$|z_1 z_2| = |z_2 z_3| = |z_3 z_1| = 1$$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = \left|\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \frac{1}{z_3 z_1}\right|.$$

Αλλά

$$\left|\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \frac{1}{z_3 z_1}\right| = \left|\frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_1 z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1 + z_2 + z_3|}{|z_1 z_2 z_3|} = |z_1 + z_2 + z_3|$$

και έτσι προκύπτει το αποδεικτέο.

5.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

5.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \beta x - 12 & , \quad x < 1 \\ 5 & , \quad x = 1 \\ \alpha x + \beta & , \quad x > 1 \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
2. Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής και ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ να αποδείξετε η εξίσωση
$$(f(x))^{2003} = \lambda$$
έχει λύση για κάθε λ.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
2. (α′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $g(x) + 1 > 0$.

   (β′) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1+g(x)} + \text{ημ}x\right)$

5.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 1.8 Β2
2. Αφού η f είναι συνεχής από το προηγούμενο ερώτημα θα είναι $\alpha = 4,\ \beta = 1$ ή $\alpha = -3,\ \beta = 8$. Είναι
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha x + \beta) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha x)$$
και επομένως αφού θέλουμε το όριο να είναι $-\infty$ θα πρέπει $\alpha = -3$. Θεωρούμε τώρα $\lambda \in \mathbb{R}$ και την συνάρτηση
$$h(x) = (f(x))^{2003} - \lambda.$$

Αφού η f είναι συνεχής και η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left((f(x))^{2003} - \lambda\right) = +\infty,$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\alpha^2 x^2\right) = +\infty.$$

Επομένως υπάρχει x_1 ώστε $h(x_1) > 0$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}\left((f(x))^{2003} - \lambda\right) = -\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{2003} = -\infty$. Επομένως υπάρχει x_2 ώστε $h(x_2 < 0$. Θα είναι $x_1 \neq x_2$ και επομένως από το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1, x_2 ώστε $h(x_0) = 0$. Αυτό το x_0 θα είναι λύση της εξίσωσης $(f(x))^{2003} = \lambda$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 1.7 Α3, v).

2. (α΄) Είναι

$$g(x) + 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}}$$

και για τον παρονομαστή έχουμε

$$x - \sqrt{x^2-1} > x - \sqrt{x^2} = x - |x| =_{(x>1)} 0$$

άρα πρέπει να δείξουμε ότι ο αριθμητής του κλάσματος είναι θετικός δηλαδή ότι

$$x - \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2-1} > 0.$$

Έχουμε:

$$x - \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$2x > \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow$$

$$4x^2 > \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2 > x^2 + 1 + x^2 - 1 + 2\sqrt{x^4-1} \Leftrightarrow$$

$$2x^2 > 2\sqrt{x^4-1} \Leftrightarrow x^4 > x^4 - 1 \text{ (ισχύει).}$$

(β΄) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)+1) = -1 + 1 = 0$$

αλλά $g(x) + 1 > 0$ για $x > 1$ άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+g(x)} = +\infty.$$

Όμως
$$\frac{1}{1+g(x)}+\etaμx \geq \frac{1}{1+g(x)}-1$$
και αφού
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+g(x)}-1\right)=+\infty$$
θα είναι και
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+g(x)}+\etaμx\right).$$
Αλλος Τροπος Δείχνουμε όπως πριν ότι
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+g(x)}=+\infty$$
και στη συνέχεια γράφουμε
$$\frac{1}{1+g(x)}+\etaμx=\frac{1}{1+g(x)}\left(1+\etaμx\left(1+g(x)\right)\right)$$
και αφού
$$\left|\etaμx\left(1+g(x)\right)\right|=\left|\etaμx\right|\left|\left(1+g(x)\right)\right|\leq\left(1+g(x)\right)$$
συμπεραίνουμε ότι
$$-\left(1+g(x)\right)\leq\etaμx\left(1+g(x)\right)\leq 1+g(x)$$
άρα από το κριτήριο της παρεμβολής αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+1\right)=0$ θα είναι και
$$\lim_{x\to+\infty}\etaμx\left(1+g(x)\right)=0.$$
Επομένως θα είναι
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+g(x)}\left(1+\etaμx\left(1+g(x)\right)\right)=+\infty,$$
οπότε και
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+g(x)}+\etaμx\right)=+\infty.$$

5.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

5.3.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=1$$

1. Αν $\mathrm{Re}(z)=1$ βρείτε τον z .

   15 μοναδεσ

2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

   5 μοναδεσ

3. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο του $\frac{1}{z}$;

   5 μοναδεσ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Τα σημεία A, B κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy και η θέση τους κατά την χρονική στιγμή t είναι $A(x(t), 0)$, $B(0, y(t))$, όπου $x(t)$, $y(t)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Έστω ότι η απόσταση τους κατά την χρονική στιγμή t είναι $d(t)=(AB)$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει

   $$d(t)\,d'(t)=x(t)\,x'(t)+y(t)\,y'(t)$$

   10 μοναδεσ

2. Στην ειδική περίπτωση όπου $x(t)=2t$, $y(t)=t^2$:

   (α′) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή είναι $d(t)=4\sqrt{2}$.

   8 μοναδεσ

   (β′) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του $d(t)$ κατά την χρονική στιγμή του παραπάνω ερωτήματος.

   7 μοναδεσ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f(x)-g(x)=2x^3+3$$

για όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ στα σημεία $A(0, f(0))$, $B(0, g(0))$ δεν έχουν κοινό σημείο.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να λύσετε την εξίσωση $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & , \quad x = -\frac{\pi}{2} \\ f(\text{εφ}x) & , \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \beta & , \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

είναι συνεχής.

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε το σύνολο τιμών της f περιέχεται σε κάποιο κλειστό διάστημα.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

5.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

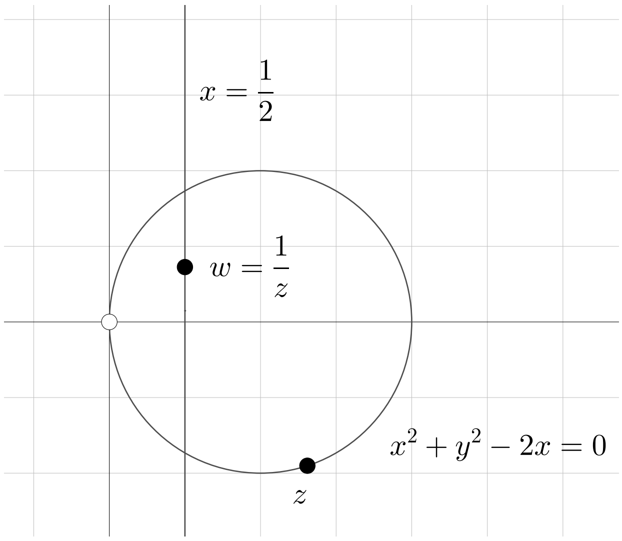
1. Θα έχουμε την σχέση

$$\frac{1}{1+yi} + \frac{1}{1-yi} = 1,$$

από την οποία βρίσκουμε $y = \pm 1$ και επομένως $z = 1 + i$ ή $z = 1 - i$.

2. Η δοθείσα σχέση γίνεται
$$z + \bar{z} = |z|^2,$$
και θέτοντας $z = x + yi$ βρίσκουμε την
$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$
Η τελευταία είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $(1,0)$ και ακτίνα 1.

3. Με $w = \frac{1}{z}, z \neq 0$ έχουμε $z = \frac{1}{w},\ w \neq 0$ και
$$\frac{1}{\frac{1}{w}} + \frac{1}{\frac{1}{\bar{w}}} = 1,$$
από την οποία προκύπτει ότι
$$w + \bar{w} = 1.$$
Απο την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το πραγματικό μέρος του w είναι $\frac{1}{2}$ και επομένως η γεωμετρικός τόπος της εικόνας του $\frac{1}{z}$ είναι η ευθεία $x = \frac{1}{2}$.



ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Είναι
$$d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$
και επομένως
$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$
Άρα το υπόρριζο είναι πάντα θετικό αφού τα $x(t)$, $y(t)$ παίρνουν μόνο θετικές τιμές. Άρα η d είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και παραγωγίζοντας την πρώτη ισότητα βρίσκουμε την αποδεικτέα.

2. (α′) Από την ισότητα $d(t) = 4\sqrt{2}$ βρίσκουμε $d(t) = 4\sqrt{2}$ ή
$$t^4 + 4t^2 - 32 = 0.$$
Λύνοντας έχουμε $t = 2$.

(β′) Είναι
$$d'(t) = 2\frac{2+t^2}{\sqrt{(4+t^2)}},$$
οπότε θέτοντας $t = 2$ βρίσκουμε $d'(2) = 3\sqrt{2}$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Το πλήθος των κοινών σημείων είναι ίσο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ που είναι 1 διότι:
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^3 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}.$$
Άρα έχουμε ένα μόνο κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

2. Είναι $f'(x) - g'(x) = 6x^2$ επομένως $f'(0) = g'(0)$. Άρα οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων στα σημεία A, B έχουν τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως συνεπώς είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Αν συνέπιπταν θα είχαν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως και εκείνο το σημείο που έχει τετμημένη μηδέν. Δηλαδή τα σημεία A, B θα έπρεπε να συμπίπτουν πράγμα αδυνατον αφού αποκλείεται $f(0) = g(0)$.

3. Οι f, g είναι παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς. Επομένως η δοθείσα εξίσωση γίνεται $f(\alpha) = g(\alpha)$ που ανάγεται στην $2\alpha^3 + 3 = 0$ η οποία έχει λύση $\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Στα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η g είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Επίσης

   - $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(\text{εφ}x) \underset{\text{εφ}x=u}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} f(u) = \alpha = g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
   - $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(\text{εφ}x) \underset{\text{εφ}x=u}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} f(u) = \beta = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

2. Η g ως συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ έχει ελάχιστη τιμή έχτ m και μέγιστη τιμή έστω M. Έστω οποιοδήποτε $t \in \mathbb{R}$. Θα υπάρχει $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $t = \text{εφ}x$ και $f(t) = f(\text{εφ}x) = g(x)$ και αφού $m \leq g(x) \leq M$ θα είναι και $m \leq f(t) \leq M$. Επομένως οποιοδήποτε κλειστό διάστημα που περιέχει τα m, M περιέχει και το σύνολο τιμών της f.

5.4 Διαφορικός Λογισμός.

5.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f
2. Να βρείτε τα διαστήματα που ή f είναι κοίλη-κυρτή.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x$$
$$g(x) = -x^2 - x$$

1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ ατο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στην $\mathcal{C}_g$.
2. (α′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

   $$e^x + 2x + 1 = 0$$

   έχει μία μοναδική ρίζα ξ στο διάστημα $(-1,0)$.

   (β′) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) - g(x)$ είναι $\xi^2 - \xi - 1$ όπου ξ είναι ο αριθμός του ερωτήματος α′).

   (γ′) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda > 1$ τότε η εξίσωση $f(x) - g(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

5.4.2 Απαντήσεις

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. ΖΗΤΗΜΑ 1,1: Σχολικό βιβλίο § 2.3 Α5 ii). 256
2. Στο $(-\infty, 2]$ είναι κοίλη και$[2, +\infty)$ στο είναι κυρτή.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο § 2.3 Β4.

   (α′) Έστω $h(x) = e^x + 2x + 1$.

- Είναι $h(-1) \cdot h(0) = \left(\frac{1}{e} - 1\right) \cdot 2 < 0$ και αφού η h είναι συνεχήα από το θέωρημα του Bolzano η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$.
- Είναι $h'(x) = e^x + 2 > 0$ επομένως $h \uparrow$ άρα η h έχει το πολύ μία ρίζα.

Επομένως η h έχει ακριβώς μία ρίζα ξ που ανήκει στο $(-1, 0)$.

(β′) Έστω
$$\varphi(x) = f(x) - g(x).$$
Είναι
$$\varphi'(x) = e^x + 2x + 1$$
και
$$\varphi''(x) = e^x + 2.$$
Επομένως η $\varphi'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Από το προηγούμενο ερώτημα η φ' έχει μοναδική ρίζα το ξ. Λόγω της μονοτονίας είναι

- Αν $x < \xi$ τότε $\varphi'(x) < 0$.
- Αν $x > \xi$ τότε $\varphi'(x) > 0$.

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$. Άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο ξ που είναι το
$$\varphi(\xi) = e^\xi + \xi^2 + \xi = \left(e^\xi + \xi\right) + \xi^2 =_{e^\xi + 2\xi + 1 = 0} (-1 - \xi) + \xi^2 = \xi^2 - \xi - 1.$$

(γ′) Με
$$\omega(x) = f(x) - g(x) - \lambda = \varphi(x) - \lambda$$
η ω έχει την ίδια παράγωγο με την φ και επομένως την ίδια μονοτονία. Άρα έχει ελάχιστο στο ξ που είναι το $m = \xi^2 - \xi - 1 - \lambda$. Παρατηρούμε ότι
$$\lim_{x \to -\infty} \omega(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^x + x^2 + x - \lambda\right) = +\infty$$
και
$$\lim_{x \to +\infty} \omega(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^x + x^2 + x - \lambda\right) = +\infty.$$
Επομένως το πλήθος των ριζών της ω εξαρτάται από την ελάχιστη τιμή της m:

Αν $\mathbf{m < 0}$ τότε η ω έχει δύο ρίζες.

Αν $\mathbf{m = 0}$ τότε η ω έχει μία ρίζα.

Αν $\mathbf{m > 0}$ τότε η ω δεν έχει έχει καμμία ρίζα.

Θέλουμε να ισχύει η πρώτη περίπτωση. Αρκεί να είναι
$$\xi^2 - \xi - 1 < \lambda$$

Επειδή $\lambda > 1$ αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι

$$\xi^2 - \xi - 1 < 1$$

δηλαδή

$$\xi^2 - \xi - 2 < 0 \tag{5.1}$$

Αλλά το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει ρίζες τους $-1,\ 2$.Οι τιμές του τριψνύμου στους αριθμούς μεταξύ των $-1,\ 2$ είναι αρνητικές. Αλλά ο ξ είναι μεταξύ $-1,\ 0$ άρα και μεταξύ των $-1,\ 2$ επομένως πράγματι η (5.1) ισχύει.

5.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

5.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{t+x}}{e^t + 1} dt.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω S το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$ και τον άξονα $x'x$.

1. Να υπολογίσετε το S.

2. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και χωρίζει το S σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

5.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.2 Α3 ii).

2. Έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{t+x}}{e^t + 1} dt = \int_0^x \frac{e^t \cdot e^x}{e^t + 1} dt = e^x \int_0^x \frac{e^t}{e^t + 1} dt.$$

Επομένως:

$$F'(x) = e^x \int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}dt + e^x \frac{e^x}{e^x+1}.$$

Από το ερώτημα 1. έχουμε ότι

$$\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}dt = \ln(e^x+1) - \ln 2$$

επομένως

$$F'(x) = e^x \left(\ln(e^x+1) - \ln 2 + \frac{e^x}{e^x+1}\right).$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 3.7 Α4.

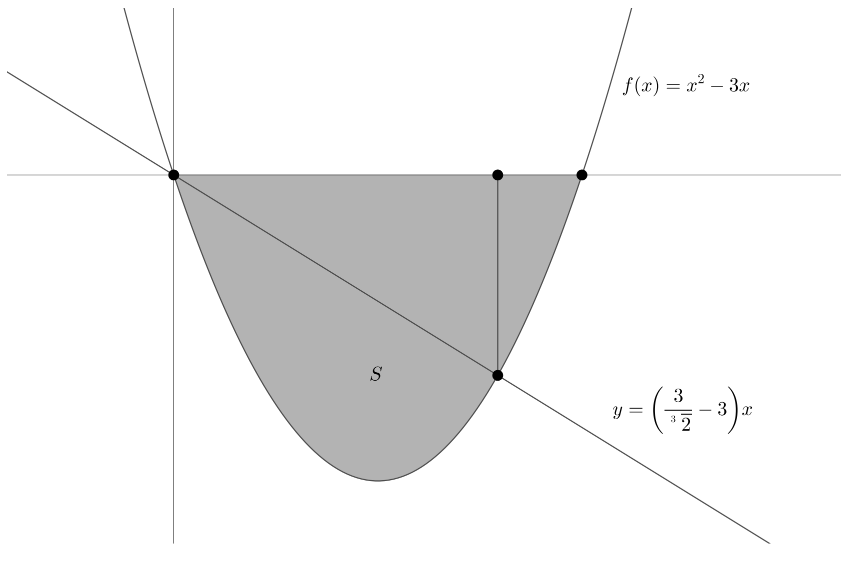
2. Η ευθεία που ζητάμε θα είναι της μορφής $y = ax$ με $a \le 0$. Θα πρέπει το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της ευθείας και της $\mathcal{C}_f$ να είναι ίσο με το το μισό του S. Η $y = ax$ θα τέμνει την $\mathcal{C}_f$ σε σημείο που η τετμημένη του θα είναι η θετική λύση της εξίσωσης $f(x) = ax$ δηλαδή της $x^2 - 3x = xa$ που είναι η $x = a+3$. Επειδή στο διάστημα που μας ενδιαφέρει η ευθεία είναι πάνω από την $\mathcal{C}_f$ θα είναι

$$E(a) = \frac{1}{6}a^3 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{9}{2}a + \frac{9}{2} = \frac{1}{6}(a+3)^3.$$

Θέλουμε

$$\frac{1}{6}(a+3)^3 = \frac{9}{4}$$

άρα πρέπει $(a+3)^3 = \frac{27}{2}$ οπότε $a = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} - 3$.



5.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

5.6.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω

$$g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Να βρείτε:

1. Τα διαστήματα μονοτονίας της g.

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Τα ακρότατα της g.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Το σύνολο τιμών της g.

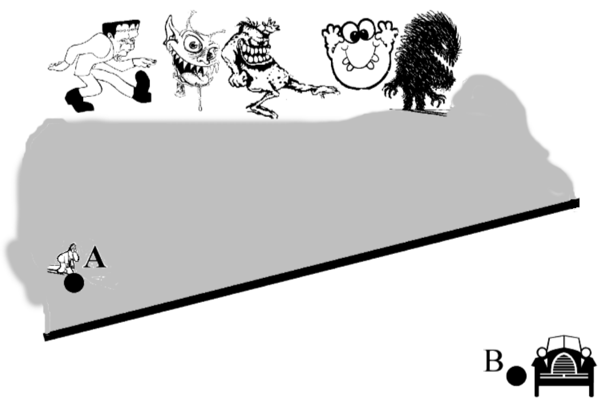
   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Τα διαστήματα που η g είναι κοίλη κυρτή.

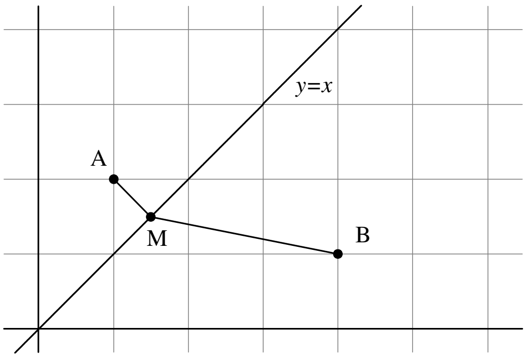
   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Ο κύριος Τρύφων κάνει περίπατο στο δάσος οπότε, αιφνιδίως αντιλαμβάνεται ότι του επιτίθενται διάφορα φοβερά τέρατα. Για να διασωθεί πρέπει από το σημείο $A(1,2)$ που βρίσκεται να φθάσει στο σημείο $B(4,1)$ όπου είναι σταθμευμένο το αυτοκίνητο του.



Πρέπει να διασχίσει ένα λιβάδι στο οποίο κινείται με ταχύτητα 2 και μετά να κινηθεί σε ένα γήπεδο με ταχύτητα 3. Το λιβάδι και το γήπεδο χωρίζονται από την ευθεία $y = x$. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται η ευθεία τα σημεία αλλά όχι ο κ.Τρύφων, το αυτοκίνητο και τα τέρατα.



Έστω $M(x,x)$ τυχόν σημείο της ευθείας $y = x$.

1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος που χρειάζεται ο κ. Τρύφων για να πάει:

   (α′) από το A στο M είναι $g\left(x\right) = \frac{\sqrt{2x^2-6x+5}}{2}$

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) από το M στο B είναι $h\left(x\right) = \frac{\sqrt{2x^2-10x+17}}{3}$

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν ο κ. Τρύφων διανύσει την διαδρομή από το A στο M και από το M στο B στον ελάχιστο δυνατό χρόνο τότε θα πρέπει

   (α′) $h'\left(x\right) = -g'\left(x\right)$

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) $\frac{2x-5}{9h(x)} = \frac{3-2x}{4g(x)}$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε να ισχύει $f\left(x\right) > 0$ και $f'\left(x\right) > 0$ για κάθε x. Να αποδείξετε ότι:

1. Για κάθε x ισχύει

$$\int_x^{x+1} f\left(t\right) dt < \int_{x+1}^{x+2} f\left(t\right) dt$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ τότε ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = +\infty$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι αν η f έχει ασύμπτωτη για $x \to +\infty$ την ευθεία $y = \alpha$ τότε ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \alpha$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $k > 1$ και

$$I(x,k) = \int_{\frac{1}{k}}^{k} e^{-t} t^x\,dt$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$I(x+1,k) = -e^{-k}k^{x+1} + e^{-\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}\right)^{x+1} + (x+1)\,I(x,k)$$

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν $x > 0$ τότε ισχύει

$$\lim_{k \to +\infty} \left(I(x+1,k) - (x+1)\,I(x,k)\right) = 0$$

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

5.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Είναι $\mathcal{D}_g = (0,+\infty)$ και

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x\left(x^2+1\right)},$$

επομένως $g \downarrow$ στο $(0,1]$ και $g \uparrow$ στο $[1,+\infty)$.

2. Η g έχει ένα ακρότατο στο $x = 0$ που είναι θέση ελαχίστου.

3. Είναι $g(1) = ln2$ και

$$\lim_{x\to 0^+} g\left(x\right) = \lim_{x\to +\infty} g\left(x\right) = +\infty.$$

Επομένως:

$$g\left((0,+\infty)\right) = g\left((0,1]\cup[1,+\infty)\right) = g\left((0,1]\right)\cup g([1,+\infty)) = [\ln 2,+\infty).$$

4. Έχουμε:

$$g''\left(x\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{x^4-4x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

και το πρόσημο της g'' είναι αντίθετο από το πρόσημο της x^4-4x^2-1. Είναι

$$x^4-4x^2-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{2+\sqrt{5}}<x,$$

$$x^4-4x^2-1<0 \Leftrightarrow x<\sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

Επομένως η g είναι κυρτή στο $\left(0,\sqrt{2+\sqrt{5}}\right]$ και κοίλη στο $\left[\sqrt{2+\sqrt{5}},+\infty\right)$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Είναι:

(α΄) Είναι

$$AM = \sqrt{\left(1-x\right)^2+\left(2-x\right)^2} = \sqrt{2x^2-6x+5},$$

επομένως ο απαιτούμενος χρόνος για να διανυθεί το AM είναι

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x^2-6x+5}}{2}.$$

(β΄) Όμοια

$$MB = \sqrt{\left(4-x\right)^2+\left(1-x\right)^2} = \sqrt{2x^2-10x+17},$$

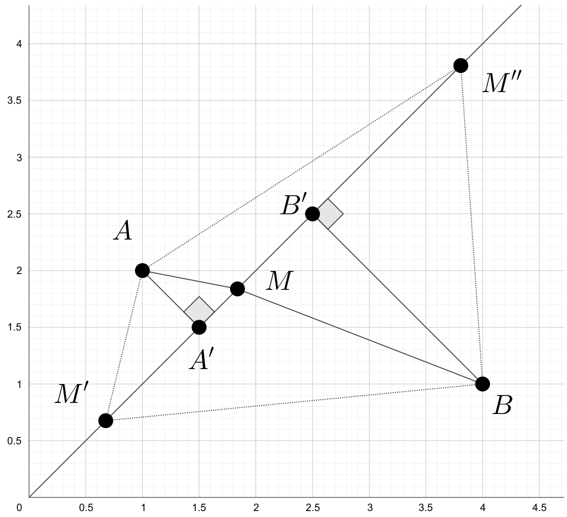
και ο απαιτούμενος χρόνος για το MB είναι

$$h\left(x\right) = \frac{\sqrt{2x^2-10x+17}}{3}.$$

2. Ο συνολικός χρόνος για την διαδρομή είναι:

$$t\left(x\right) = g(x)+h(x)/$$

Ας ονομάσουμε A', B' τις προβολές των A, B στην $y=x$. Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο εσωτερικό του $A'B'$. Βλέπουμε ότι αν ο κ. Τρύφων επιλέξει την διαδρομή $AM'B$ με το M' εξωτερικό του $A'B'$ προς το μέρος του A' η διαδρομή είναι μεγαλύτερη της $AA'B$ λόγω του ότι οι πλάγιες AM', BM' είναι μεγαλύτερες από τις AA', BA'. Άρα απαιτείται περισσότερος χρόνος. Το ίδιο συμβαίνει αν επιλέξει την διαδρομή $AM''B$ με το M'' εξωτερικό του $A'B'$ προς το μέρος του B'. Επομένως ο χρόνος ελαχιστοποιείται αν το M επιλεγεί να είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $A'B'$.



Οι ευθείες AA', BB' έχουν συντελεστή διευθύνσεως -1 και εξισώσεις $y = 3 - x$, $y = 5 - x$ και επομένως είναι $A'\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ και $B'\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Δοκιμάζοντας αυτές τις τιμές στην t καθώς και την τιμή 2 που αντιστοιχεί στο εσωτερικό σημείο $(2, 2)$ του $A'B'$ βρίσκουμε ότι

$$t\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{26}, \quad t\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \; t(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

Προφανώς

$$t\left(\frac{3}{2}\right) > t(2), \quad t\left(\frac{5}{2}\right) > t(2)$$

άρα η ελάχιστη τιμή για την t εμφανίζεται σε κάποιο εσωτερικό σημείο του $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

(α′) Από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι η t ελαχιστοποιείται όταν $t'(x) = 0$ δηλαδή όταν $h'(x) = -g'(x)$.

(β′) Προκύπτει παραγωγίζοντας τις επιμέρους συναρτήσεις.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Έστω F μια παράγουσα της F. Από το θεώρημα μέσης τιμής για την F στα $[x, x+1]$, $[x+1, x+2]$ έχουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $x < \xi_1 < x+1 <$

$\xi_2 < x + 2$ ώστε

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = F(x+1) - F(x) = f(\xi_1),$$

$$\int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt = F(x+2) - F(x+1) = f(\xi_2).$$

Αλλά η f έχει θετική παράγωγο άρα $f \uparrow$ και επομένως $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ από την οποία προκύπτει η αποδεικτέα ανισότητα.

2. Αφού $f \uparrow$ για κάθε $t \in [x+1, x+2]$ είναι $f(x) \leq f(t)$ και το ίσον ισχύει μόνο για $t = x$. Άρα

$$\int_x^{x+1} f(x)\,dt < \int_x^{x+1} f(t)\,dt,$$

που μας δίνει την

$$f(x) < \int_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

Παίρνοντας όρια για $x \to +\infty$ έχουμε το αποδεικτέο.

3. Από την υπόθεση έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha.$$

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1) \underset{x+1=u}{=} \lim_{u\to+\infty} f(u) = \alpha.$$

Από την μονοτονία της f έχουμε

$$\int_x^{x+1} f(x)\,dt < \int_x^{x+1} f(t)\,dt < \int_x^{x+1} f(x+1)\,dt,$$

δηλαδή

$$f(x) < \int_x^{x+1} f(t)\,dt < f(x+1).$$

Παίρνοντας όρια για $x \to \infty$ έχουμε το αποδεικτέο.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Εφαρμόζοντας την τεχνική της ολοκληρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$I(x+1,k) = \int_{\frac{1}{k}}^{k} e^{-t}t^{x+1}dt = \int_{\frac{1}{k}}^{k} \left(-e^{-t}\right)' t^{x+1}dt =$$

$$\left[-e^{-t}t^{x+1}\right]_{\frac{1}{k}}^{k} - \int_{\frac{1}{k}}^{k} \left(-e^{-t}\right)\left(t^{x+1}\right)' dt =$$

$$-e^{-k}k^{x+1} + e^{-\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}\right)^{x+1} + (x+1)\int_{\frac{1}{k}}^{k} -e^{-t}t^{x}dt =$$

$$-e^{-k}k^{x+1} + e^{-\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}\right)^{x+1} + (x+1)\,I(x,k).$$

2. Ισχύει: $I(x+1,k) - (x+1)I(x,k) = -e^{-k}k^{x+1} + e^{-\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}\right)^{x+1}$. Προφανώς

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}\right)^{x+1} = 1\cdot 0 = 0.$$

Για να βρούμε το $\lim\limits_{k\to+\infty} e^{-k}k^{x+1}$ βρίσκουμε πρώτα το $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln\left(e^{-k}k^{x+1}\right)$. Είναι

$$\lim_{k\to+\infty} \ln\left(e^{-k}k^{x+1}\right) = \lim_{k\to+\infty} \left(-k + (\ln k)(x+1)\right) =$$

$$\lim_{k\to+\infty} k\left(-1 + \frac{\ln k}{k}(x+1)\right) = -\infty,$$

αφού $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln k}{k} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k}}{1} = 0$. Άρα

$$\lim_{k\to+\infty} e^{-k}k^{x+1} = \lim_{k\to+\infty} e^{\ln\left(e^{-k}k^{x+1}\right)} \underset{u=\ln\left(e^{-k}k^{x+1}\right)}{=} \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0$$

. Τελικά:

$$\lim_{k\to+\infty} \left(I(x+1,k) - (x+1)I(x,k)\right) = 0 + 0 = 0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Σχολικό έτος 2004-2005

6.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

6.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $z \neq 0$.

1. Να δείξετε ότι ο $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και ότι

$$-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$$

2. Να εξετάσετε πότε στην παραπάνω ανισότητα ισχύει το ίσον (Δύο περιπτώσεις).

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $A = A(z) = |1 + z|^2 + |1 - z|^2$.

1. Αν $|z| = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.
2. Έστω S το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$A\,(z - 5 - 3i) = 10$$

Να βρείτε ποιος μιγαδικός από το S, έχει ελάχιστο μέτρο.

6.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β6 σελ. 96
2. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

(α′) Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$-2 = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \Leftrightarrow -2z\bar{z} = z^2 + \bar{z}^2 \Leftrightarrow (z + \bar{z})^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z.$$

Επομένως η πρώτη ισότητα ισχύει αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

(β′) Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + 2 \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = 2z\bar{z} = \Leftrightarrow (z - \bar{z})^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z.$$

Επομένως η πρώτη ισότητα ισχύει αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός.

ΖΗΤΗΜΑ 2

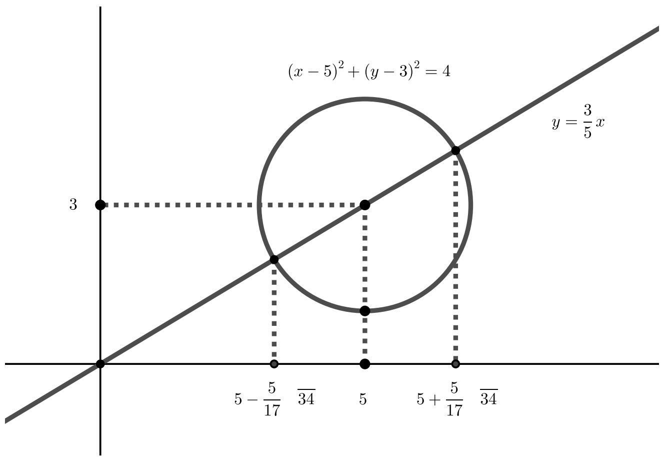
1. Σχολικό βιβλίο Β7 σελ. 102

2. Ισχύει $A(z) = 2 + 2|z|^2$ και επομένως αφού

$$z \in S \Leftrightarrow A(z - 5 - 3i) = 10 \Leftrightarrow$$

$$2 + 2|z - 5 - 3i|^2 = 10 \Leftrightarrow |z - 5 - 3i| = 2,$$

οι εικόνες των μιγαδικών του S είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο το $K(5,3)$ και ακτίνα 2.



Ο μιγαδικός του S με το ελάχιστο μέτρο αντιστοιχεί στο εγγύτατο, προς την αρχή των αξόνων, σημείο του κύκλου

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4 \quad (*).$$

Το σημείο αυτό είναι εκείνο το κοινό σημείο της ευθείας OK με τον κύκλο που η τετμημένη του έχει την μικρότερη απόλυτη τιμή. Η OK έχει εξίσωση

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{3-0}{5-0},$$

δηλαδή $y = \frac{3}{5}x$. Αντικαθιστούμε στην $(*)$ το y και έχουμε την εξίσωση

$$(x-5)^2 + \left(\frac{3}{5}x - 3\right)^2 = 4,$$

από την επίλυση της οποίας βρίσκουμε

$$x = 5 - \frac{5}{17}\sqrt{34} \quad \text{ή} \quad x = 5 + \frac{5}{17}\sqrt{34}.$$

Η ζητούμενη τιμή είναι η $x = 5 - \frac{5}{17}\sqrt{34}$, το αντίστοιχο y είναι το $y = 3 - \frac{3}{17}\sqrt{34}$ και ο ζητούμενος μιγαδικός του S με ελάχιστο μέτρο είναι ο

$$5 - \frac{5}{17}\sqrt{34} + \left(3 - \frac{3}{17}\sqrt{34}\right)i = \left(1 - \frac{\sqrt{34}}{17}\right)(5+3i)\ /$$

6.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

6.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & , \quad |x| \leqslant 1 \\ \frac{2}{x} & , \quad |x| > 1 \end{cases}.$$

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την f.
2. (α΄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) = \text{συν}x$
   (β΄) Ισχύει προφανώς $f\left(-\frac{1}{2}\right) f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$. Έχει η f ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ οι οποίες συνδέονται με την σχέση :

$$g(x) = \frac{|2f(x) - 11|}{f^2(x) + 1}$$

Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ και ότι $\lim_{x\to 2} g(x) = L \in \mathbb{R}$

1. Αν $\ell = 4$ να βρείτε το L.
2. Να αποδείξετε ότι θα είναι $|L| \leq \frac{5\sqrt{5}+11}{2}$.

6.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 1.8, Α3 i)

2. (α′) Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g : (0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{1}{x} -$ συνx. Έχουμε ότι $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ οπότε υπάρχει κάποιο x_1 τέτοιο ώστε $g(x_1) > 0$. Επίσης $g(2\pi) = \frac{1}{2\pi} - 1 < 0$. Φυσικά τα x_1 και 2π είναι διάφορα. Από το θεώρημα του Βολζανο στο διάστημα με άκρα τα x_1 και 2π έχουμε ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε να είναι $g(x_0 = 0$. Αυτό το x_0 θα είναι και λύση της εξίσωσης $f(x) =$ συνx.

   (β′) Είναι:

$$f(x) = 0, \;\; x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0, \;\; x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \\ \text{ή} \\ f(x) = 0, \;\; x \in \left[-1, -\frac{3}{2}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = 0, \;\; x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \\ \text{ή} \\ x^2 = 0, \;\; x \in \left[-1, -\frac{3}{2}\right) \end{array} \right\}$$

   Βλέπουμε ότι και οι δύο εξισώσεις $\frac{1}{x} = 0, \; x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ και $x^2 = 0, \; x \in \left[-1, -\frac{3}{2}\right)$ είναι αδύνατες. Επομένως η f δεν έχει ρίζα στο διάστημα $x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
   ΣΧΟΛΙΟ: Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα του Bolzano διότι η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 1.5 Α2, ii)

2. Αφού

$$g(x) = \frac{|2f(x) - 11|}{f^2(x) + 1},$$

   παίρνοτας όρια και στα δύο μέλη έχουμε

$$L = \frac{|2l - 11|}{l^2 + 1}$$

   και επομένως

$$|2l - 11| = L\left(l^2 + 1\right)$$

   δηλαδή ή

$$2l - 11 = L\left(l^2 + 1\right) \tag{6.1}$$

είτε

$$-2l + 11 = L\left(l^2 + 1\right) \tag{6.2}$$

Η πρώτη εξίσωση έχει λύση αν $-L^2 - 11L + 1 \geq 0$ ενώ η δεύτερη αν $-L^2 + 11L + 1 \geq 0$. Είναι

$$-L^2 - 11L + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5} \leq L \leq -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

και

$$-L^2 + 11L + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5} \leq L \leq \frac{11}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

Επειδή κάποια από τις εξισώσεις (1), (2) έχει λύση ο L ανήκει σε κάποιο από τα διαστήματα $\left[-\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5}, -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}\right]$ και $\left[\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5}, \frac{11}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}\right]$. Επομένως σε κάθε περίπτωση

$$-\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5} \leq L \leq \frac{11}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$|L| \leq \frac{5\sqrt{5} + 11}{2}.$$

6.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

6.3.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

   3 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f παραγωγίζεται.

   4 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 2.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το όριο της f στο $+\infty$.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ με $x \neq 0$ ισχύει

$$f(x) - \sqrt{x^3} f\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x^3} = 1$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύει

$$z_1 \bar{z}_2 \neq 1 \tag{6.3}$$

$$z_3 = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \bar{z}_2} \tag{6.4}$$

1. Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ τότε ισχύει και $|z_3| < 1$.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν ο z_3 έχει μέτρο 1 τότε κάποιος από τους z_1, z_2 έχει μέτρο 1.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Αν $|z_1| = 1$ και $z_2 = -i$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z_3.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω α, β θετικοί πραγματικοί και η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\alpha x} + \frac{1}{\beta(x-1)}$$

ορισμένη στο $(0,1)$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

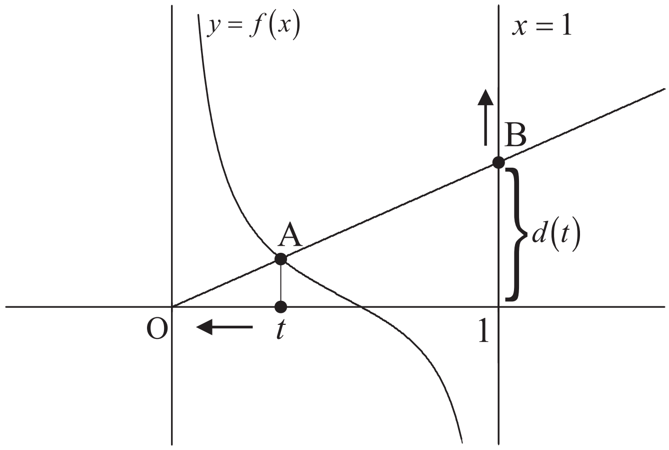
2. Να αποδείξετε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι τιμή της f.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(0) = \frac{\beta}{\beta + \alpha}$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Έστω $t \in (0,1)$, το σημείο $A(t, f(t))$ και B το σημείο τομής της ευθείας OA με την ευθεία $x = 1$.



Έστω $d(t)$ η απόσταση του B από τον άξονα $x'x$. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της $d(t)$, ως προς t, όταν $t = \frac{\beta}{\beta+\alpha}$ είναι ίσος με $-\frac{(\beta+\alpha)^4}{\alpha^2\beta^3}$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής και $p, q \in \Delta$ με $p < q$ και $f(p) \neq f(q)$.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα $A(p, f(p))$, $B(q, f(q))$ είναι

$$y = f(p) + \frac{f(q) - f(p)}{q - p}(x - p)$$

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω

$$g(x) = f(p) + \frac{f(q) - f(p)}{q - p}(x - p)$$

Δείξτε ότι αν $\eta \in (p,q)$ τότε υπάρχει $\xi \in (p,q)$ ώστε $f(\xi) = g(\eta)$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Δείξτε ότι αν για κάθε $x \in (p,q)$ είναι $f(x) \neq g(x)$ τοτε για κάθε $x_1, x_2 \in (p,q)$ θα είναι

$$f(x_1) f(x_2) + g(x_1) g(x_2) > f(x_1) g(x_2) + g(x_1) f(x_2)$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

6.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Το πεδίο ορισμού της f περιλαμβάνει τα x για τα οποία $x^3 + 1 \geq 0$ και $x^3 \geq 0$. Τελικά $x^3 \geq 0$ δηλαδή $x \geq 0$. Άρα $\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$.

2. Η $\sqrt{x}$ ορίζετα στα $x > 0$ αλλά παραγωγίζεται μόνο στα $x > 0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη οπωσδήποτε στα x όπου τα υπόρριζα είναι θετικά. Η τιμή $x = 0$ στην οποία μηδενίζεται το δεύτερο υπόρριζο θα εξεταστεί χωριστά. Έχουμε

   - Η $\sqrt{x^3+1}$ παραγωγίζεται σε όλα τα $x \in \mathcal{D}_f$ και $\left(\sqrt{x^3+1}\right)' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$ άρα η παράγωγος της στο 0 είναι 0.
   - Η $\sqrt{x^3}$ έχει στο μηδέν παράγωγο ίση με $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^3}-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = 0$.

   Επομένως η f παραγωγίζεται στο 0 και $f'(0) = 0 - 0 = 0$.

3. Για $x > 0$ είναι
$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}},$$
επομένως $f'(2) = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2$. Επίσης $f(2) = 3 - 2\sqrt{2}$ επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ είναι η
$$y = \left(-\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\right)x + \sqrt{2} - 1.$$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3}\right)\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3}\right)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3}} = 0$

5. Έχουμε:
$$f(x) - \sqrt{x^3} f\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x^3} =$$
$$\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3} - \sqrt{x^3}\left(\sqrt{\frac{1}{x^3}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^3}}\right) + \sqrt{x^3} =$$
$$\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3} - \sqrt{x^3+1} + 1 + \sqrt{x^3} = 1.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Είναι $|z_3| < 1$ αν και μόνο αν $|z_3|^2 < 1$. Αλλά
$$|z_3|^2 = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2} \cdot \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} = \frac{\overbrace{z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2}^{A}}{\underbrace{1 - \bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2\bar{z}_1 z_2}_{B}},$$

με τα A, B να είναι οι πραγματικοί αριθμοί $|z_1 - z_2|^2 \geq 0$, $|1 - z_1\bar{z}_2|^2 > 0$. Επομένως

$$|z_3|^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 < 1 - \bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2\bar{z}_1 z_2 \Leftrightarrow$$

$$z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - \left(1 - \bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2\bar{z}_1 z_2\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - 1 - z_1\bar{z}_2\bar{z}_1 z_2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - 1 - |z_1|^2 |z_2|^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - |z_2|^2\right)\left(|z_1|^2 - 1\right) < 0.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει από τις υποθέσεις και επομένως ισχύει $|z_3| < 1$.

2. Από την προηγούμενη επεξεργασία φαίνεται ότι

$$|z_3|^2 = 1 \Leftrightarrow \left(1 - |z_2|^2\right)\left(|z_1|^2 - 1\right) = 0 \quad (*)$$

απο την οποία προκύπτει το αποδεικτέο.

3. Θα πρέπει κατ΄ αρχάς να είναι $z_1\bar{z}_2 \neq 1$ που δίνει $z_1 \neq -i$. Από τα δεδομένα και την $(*)$ έχουμε ότι $|z_3| = 1$. Άρα η εικόνα του z_3 ανήκει στον κύκλο κέντρου O και ακτίνας 1. Θα εξετάσουμε αν ο γεωμετρικός τόπος είναι ολόκληρος ο κύκλος. Τα z_1, z_3 συνδέονται με την σχέση

$$z_3 = \frac{z_1 + i}{1 - z_1 i} \quad (**),$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$z_1 = \frac{z_3 - i}{iz_3 + 1}.$$

για $z_i \neq i$. Αν υποτεθεί ότι $|z_3| = 1$ τότε

$$|z_1|^2 = \frac{z_3 - i}{iz_3 + 1} \cdot \frac{\bar{z}_3 + i}{-i\bar{z}_3 + 1} = \frac{1 + iz_3 - i\bar{z}_3 + 1}{1 + iz_3 - i\bar{z}_3 + 1} = 1$$

επομένως κάθε μιγαδικός μέτρου 1 διάφορος του i είναι της μορφής $(**)$ για κάποιο μιγαδικό $z_1 \neq -i$. Άρα ο τόπος είναι ο μοναδιαίος κύκλος εκτός από το σημείο του $(0, 1)$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Ισχύει

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1)\frac{(\alpha+\beta)x_1x_2 - \beta(x_1+x_2)+\beta}{\alpha\beta x_1x_2(x_1-1)(x_2-1)} \quad (\#)$$

και

$$(\alpha+\beta)x_1x_2 - \beta(x_1+x_2)+\beta > \beta x_1x_2 - \beta(x_1+x_2)+\beta = \beta(x_2-1)(x_1-1) > 0.$$

Επομένως το β′ μέλος της (#) γίνεται μηδέν μόνο αν $x_1 = x_2$. Άρα αν $f(x_1) = f(x_2)$ θα είναι $x_1 = x_2$ και η f είναι $1-1$.

2. Έστω οποιοσδήποτε πραγματικός y και η συνεχής συνάρτηση $g(x) + f(x) - y$ με πεδίο ορισμού το ίδιο με της f. Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$$

επομένως θα υπάχουν $a, b \in (0,1)$ ώστε $g(a) > 0$, $g(b) < 0$. Από το θεώρημα του Bolzano η g έχει ρίζα r στο διάστημα με άκρα a, b άρα και στο $(0,1)$. Θα είναι $f(r) = y$ και επομένως ο τυχών y είναι τιμή της f.

3. Η f είναι $1-1$ άρα και αντιστρέψιμη. Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha x} + \frac{1}{\beta(x-1)} = 0$$

και λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς x βρίσκουμε $x = \frac{\beta}{\beta+\alpha}$ που είναι η τιμή του $f^{-1}(0)$.

4. Η ευθεία OA έχει εξίσωση

$$y - 0 = \frac{f(t) - 0}{t - 0}(x - 0),$$

δηλαδή:

$$y = \frac{f(t)}{t}x.$$

Θέτοντας $x = 1$ βρίσκουμε $d(t) = \frac{f(t)}{t}$ επομένως

$$d'(t) = \frac{-2\beta t^2 + 4\beta t - 2\beta - 2\alpha t^2 + \alpha t}{\alpha\beta t^3 (t-1)^2},$$

$$d'\left(\frac{\beta}{\beta+\alpha}\right) = -\frac{(\alpha+\beta)^4}{\alpha^2\beta^3}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Προκύπτει εύκολα από τον υπολογισμό του συντελεστή διευθύνσεως του AB.

2. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(\eta),$$

ορισμένη στο Δ. Είναι

$$h(p)\,h(q) = -\underbrace{\frac{(f(q) - f(p))^2}{(q-p)^2}}_{>0}\underbrace{(\eta - p)(q-\eta)}_{>0}$$

και από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\xi \in (p,q)$ ώστε $h(\xi) = 0$ δηλαδή $f(\xi) = g(\eta)$.

3. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $r(x) = f(x) - g(x)$ η οποία δεν θα έχει ρίζα στο (p,q) επομένως θα διατηρεί πρόσημο. Η αποδεικτέα ανισότητα ισοδυναμεί με την

$$f(x_1)\,f(x_2) + g(x_1)\,g(x_2) > f(x_1)\,g(x_2) + g(x_1)\,f(x_2)$$

και την

$$(f(x_1) - g(x_1))(f(x_2) - g(x_2)) > 0.$$

Αφού η r διατηρεί πρόσημο οι διαφορές στις δύο παρενθέσεις της παραπάνω ανισότητας ή θα είναι και οι δύο θετικές, ή και οι δύο αρνητικές. Άρα η ανισότητα αληθεύει επομένως και η αποδεικτέα.

6.4 Διαφορικός Λογισμός.

6.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \text{ημ}x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}.$$

1. Να βρείτε, όπου ορίζεται την παράγωγο της f.

2. (α΄) Έχει η f σημεία καμπής;

   (β΄) Έχει η f κατακόρυφες ασυμπτώτους;

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f.

2. (α′) Να αποδείξετε ότι για κάθε $t \in (0, +\infty)$ η εξίσωση

$$f(x) = tx + 1 \tag{6.5}$$

έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

(β′) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}, \quad x > 0$$

είναι γνησίως αύξουσα.

(γ′) Έστω φ η συνάρτηση που αντιστοιχίζει στο $t \in (0, +\infty)$ τη μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης (1). Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα.

6.4.2 Απαντήσεις

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 2.3 Α2 ii).

2. (α′) Είναι

$$f'(x) = \begin{cases} \text{συν}x & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Η παράγωγος αλλάζει μονοτονία, όπου, αλλάζει μονοτονία η συνx, $\quad x < 0$ δηλαδή στα $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\quad k < 0$ τα οποία αντιστοιχούν σε σημεία καμπής της f.

(β′) Η f είναι συνεχής και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασυμπτώτες.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 2.7 Α4 i).

2. (α′) Η εξίσωση (6.5) γράφεται $f(x) - tx - 1 = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - tx - 1$, $x \geq 0$. Έχουμε $h'(x) = e^x - 1 - t$ και

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln(1 + t)$$

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \ln(1+t)]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln(1+t), +\infty)$. Είναι $h(\ln(1+t)) = 0$ και επομένως η h αφού είναι γνησίως φθίνουσα παίρνει μόνο αρνητικές τιμές στο διάστημα $(0, \ln(1+t)]$. Ειδικότερα $h(\ln(1+t)) < 0$. Έχουμε α-κόμη

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x - tx - 1\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{tx}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty,$$

(διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} =_{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$) επομένως υπάρχει κάποιο x_1 στο διάστημα $\left[\ln(1+t), +\infty\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) > 0$. Από το θέωρημα του Bolzano έχουμε ότι η h έχει ρίζα στο $(\ln(1+t), +\infty)$ που λόγω μονοτονίας είναι μοναδική.

(β′) Είναι $g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}$ και επομένως $g'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$. Έστω

$$r(x) = xe^x - e^x + 1, \quad x \geq 0.$$

Είναι $r'(x) = xe^x > 0$. Άρα $r \uparrow$. Αφού $r(0) = 0$ θα είναι $r(x) > 0$ για $x > 0$. Επομένως και $q(x) > 0$ για $x > 0$. Άρα Άρα $g \uparrow$.

(γ′) Θεωρούμε $t_1 < t_2$. Θέλουμε $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Ονομάζουμε $x_1 = \varphi(t_1)$ και $x_2 = \varphi(t_2)$. Τότε $f(x_1) = t_1 x_1 + 1$ και $f(x_2) = t_1 x_2 + 1$. Άρα $t_1 = \frac{f(x_1)-1}{x_1}$ και $t_2 = \frac{f(x_2)-1}{x2}$. Υπάρχουν 3 περιπτώσεις:

α) $\mathbf{x_1 = x_2}$. Τότε θα είναι $t_1 = t_2$ (άτοπο).

β) $\mathbf{x_1 > x_2}$. Τότε θα είναι $g(x_1) > g(x_2)$ οπότε $t_1 > t_2$ (άτοπο).

γ) $\mathbf{x_1 < x_2}$. Ισχύει αναγκαστικά αφού οι υπόλοιπες περιπτώσεις α-πορρίφθηκαν.

Επομένως $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$.

6.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

6.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

2. Έστω $\alpha > 1$ και $S(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha$.

   (α′) Να εκφράσετε το $S(\alpha)$ συναρτήσει του α.

   (β′) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S(\alpha) = 1$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{1} \frac{\text{συν}\theta}{\theta} d\theta$$

1. Να βρείτε την παράγωγο της F.

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό k ισχύει

$$\int_{1}^{x} \frac{\text{συν}k\theta}{\theta} d\theta = F\left(k^2\right) - F\left(k^2x^2\right)$$

6.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.2 Α1 vi).

2. Επειδή για $x \geq 1$ είναι $\frac{\ln x}{x^2} \geq 0$ για το εμβαδόν $S(\alpha)$ θα είναι

$$S(\alpha) = \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

(α′) Από το ερώτημα 1. έχουμε

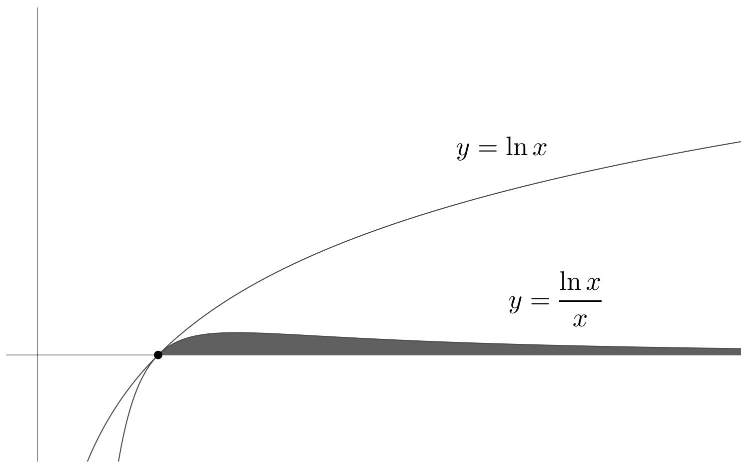
$$\int_{1}^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{\alpha} = -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1.$$

(β′) Προφανώς $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$. Επίσης:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\ln \alpha}{\alpha} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\frac{1}{\alpha}}{1} = 0.$$

Επομένως

$$\lim_{\alpha \to +\infty} S(a) = \lim_{\alpha \to +\infty} \left(-\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1\right) = 1.$$



ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.5 Α5 ii).

2. Θέτοντας $k\theta = u$, $du = kd\theta$ θα έχουμε τις μετατροπές

$$d\theta = \frac{1}{k}du \quad \boxed{\begin{array}{cc} \theta & u \\ 1 & k \\ x & kx \end{array}}$$

Άρα

$$F\left(k^2\right) - F\left(k^2x^2\right)$$

$$\int_k^1 \frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}du + \int_1^{kx} \frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}du = \int_k^1 \frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}du - \int_{kx}^1 \frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}du =$$

$$\int_{\sqrt{k^2}}^1 \frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}du - \int_{\sqrt{(kx)^2}}^1 \frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}du = F\left(k^2\right) - F\left(k^2x^2\right)$$

6.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

6.6.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1$

1. Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της φ.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών $\varphi([0,5])$ της φ στο διάστημα $[0,5]$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2$.

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κυρτά προς τα κάτω σε όλο το $\mathbb{R}$.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x^4}\right)$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Έστω $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και τέτοια ώστε $g(x) \geq 0$ για όλα τα $x \in [\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\int_\alpha^\beta g(x)\,dx = 0$ τότε θα ισχύει $g(x) = 0$ για όλα τα $x \in [\alpha,\beta]$.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

   - $\int_0^1 \left(f^2(x) - 1\right)^2 dx = 0$
   - Υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) > 0$.

   (α′) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

   10 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για όλα τα $x \in [\alpha,\beta]$.

1. Έστω $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ με $x_1 < x_2$ και $y = \lambda x + \kappa$ η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία $M_1(x_1, f(x_1))$ και $M_2(x_2, f(x_2))$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ ισχύει $f(x) \leq \lambda x + \kappa$.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω (ε_1) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη (ε_2) της C_f η οποία είναι παράλληλη στην (ε_1).

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Με (ε_1) και (ε_2) να είναι οι ευθείες του προηγουμένου ερωτήματος ονομάζουμε:

    - E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες (ε_1), $x = \alpha$, $x = \beta$ και την $\mathcal{C}_f$.
    - E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες (ε_2), $x = \alpha$, $x = \beta$ και την $\mathcal{C}_f$.

    Να αποδείξετε ότι $E_1 \geq E_2$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

6.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Έχουμε $\varphi'(x) = 6(x-1)(x-4)$ η οποία είναι αρνητική μεταξύ των 1 και 4 και θετική εκτός. Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[4, +\infty)$. Στα $-\infty$, $+\infty$ έχει αντιστοίχως όρια $-\infty$, $+\infty$. Επομένως παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 το $\varphi(1) = 12$ και τοπικό ελάχιστο στο 4 το $\varphi(4) = -15$.

2. Έχουμε
$$\varphi((-\infty, 1]) = (-\infty, 12], \quad \varphi([1,4]) = [-15, 12], \quad \varphi([4, +\infty))\,[-15, +\infty).$$
Επομένως η φ έχει 3 ρίζες.

3. Ισχύει:
$$\varphi([0,5]) = \varphi([0,1] \cup [1,4] \cup [4,5]) = \varphi([0,1]) \cup \varphi([1,4]) \cup \varphi([4,5]).$$
Επομένως
$$\varphi([0,5]) = [1, 12] \cup [-15, 12] \cup [-15, -4] = [-15, 12].$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Έχουμε
$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \quad f''(x) = e^x + e^{-x} - 2.$$
Τώρα
$$f''(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{e^x} \geq 0$$
και το «ίσον» ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και η f στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ στρέφει τα κυρτά προς τα κάτω.

2. Είναι
$$\frac{f(x)}{x^4} = \frac{e^x}{x^4} + \frac{1}{x^4 e^x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}$$
και για $x \to +\infty$ οι τρεις τελευταίοι προσθετέοι τείνουν στο 0. Για τον πρώτο προσθετέο έχουμε:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^4} \underset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{4x^3} \underset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{12x^2} \underset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{24x} \underset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{24} = +$$
Επομένως το ζητούμενο όριο είναι $+\infty$.

3. Υπολογίζοντας τις παράγουσες των επιμέρους προσθετέων βρίσκουμε ότι:
$$\int f(x)\,dx = e^x - e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - 2x + c.$$

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Έστω η συνάρτηση
$$G(x) = \int_\alpha^x g(x)\,dx \ , \quad x \in [\alpha, \beta].$$
Είναι $G'(x) = g(x) \geq 0$ επομένως είναι αύξουσα. Άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $G(\alpha) \leq G(x) \leq G(\beta)$ και αφού $G(\alpha) = G(\beta) = 0$ είναι $G(x)$ για όλα τα x. Αλλά τότε και $g(x) = G'(x) = 0$ για όλα τα x και έχουμε το αποδεικτέο.

2. (α′) Αν εφαρμόσουμε το ερώτημα 1. στην $g(x) = \left(f^2(x) - 1\right)^2$ για το διάστημα $[\alpha, \beta] = [0, 1]$ συνάγουμε ότι $g(x) = 0$ για όλα τα x. Άρα για κάθε x θα είναι $f^2(x) = 1$. Επομένως η f δεν έχει ρίζες και ως συνεχής θα διατηρεί πρόσημο. Άρα ή θα είναι $f(x) = -1$ για όλα τα x είτε θα είναι $f(x) = 1$. Η πρώτη περίπτωση αποκλείεται αφού η f παίρνει μια τουλάχιστον θετική τιμή επομένως μένει η δεύτερη.

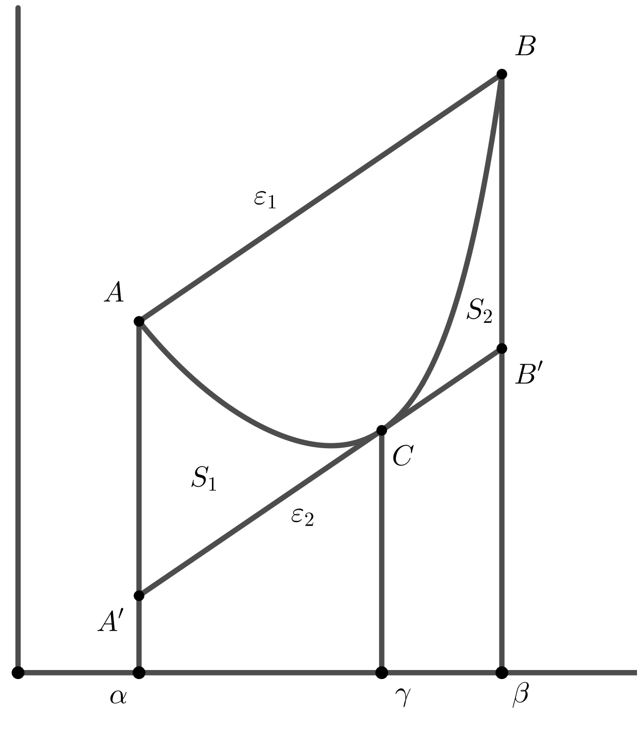
   (β′) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1dx = 1$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - (\lambda x + \kappa)$ η οποία έχει πεδίο ορισμού εκείνο της f. Αφού η $y = \lambda x + \kappa$ διέρχεται από τα M_1, M_2 θα είναι $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Είναι για όλα τα x, $g''(x) = f''(x) > 0$ επομένως η g' αίναι γνησίως αύξουσα. Από το θεώρημα του Rolle είναι $g'(x_3) = 0$ για κάποιο x_3 με $x_1 < x_3 < x_2$. Από την μονοτονία της g' συνάγουμε ότι $g'(x) < 0$ για $x < x_3$ και $g'(x) > 0$ για $x > x_3$. Επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_3, \beta]$. Άρα για $x_1 > x \geq x_3$ θα είναι $g(x_1) > g(x)$ δηλαδή $g(x) < 0$. Η ανισόητα $g(x) < 0$ θα ισχύει και για τα x με $x_3 \leq x < x_2$. Επομένως στο (x_1, x_2) είναι $g(x) < 0$ και στο $[x_1, x_2]$ είναι $g(x) \leq 0$. Από αυτήν έπεται το αποδεικτέο.

2. Η f' είναι γνησίως αύξουσα επομένως παίρνει μια τιμή της ακριβώς μία φορά. Δύο εφαπτομένες της $\mathcal{C}_f$ σε διαφορετικά σημεία θα έχουν διαφορετικό συντελεστή διευθύνσεως'. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ παράλληλη στην (ε_1) η οποία αφού θα είναι μοναδική αφού κάθε άλλη εφαπτομένη θα έχει διαφορετικός συντελεστή διευθύνσεως άρα δεν θα είναι παράλληλη στην (ε_1).

3. Έστω C το σημείο επαφής της (ε_2) με την $\mathcal{C}_f$. Ας ονομάσουμε γ την τετμημένη του. Έστω A', B' τα σημεία τομής της (ε_2) με τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.



Ονομάζουμε:

- S_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ την (ε_2) και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \gamma$.
- S_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ την (ε_2) και τις ευθείες $x = \beta$, $x = \gamma$.

Εφαρμόζοντας το ερώτημα 1. για τις χοδες AC, BC που θα είναι πάνω από τα αντίστοιχα τόξα της $\mathcal{C}_f$ έχουμε

$$E_2 = S_1 + S_2 \leq \left(AA'C\right) + \left(BB'C\right)$$

καθώς επίσης και

$$E_1 \geq (ABC)\,.$$

Αλλά στο παραλληλόγραμμο $ABB'A'$ το τρίγωνο ABC έχει εμβαδόν το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου επομένως

$$(ABC) = \left(AA'C\right) + \left(BB'C\right).$$

Άρα

$$E_1 \geq (ABC) = \left(AA'C\right) + \left(BB'C\right) \geq S_1 + S_2 = E_2,$$

από την οποία προκύπτει το αποδεικτέο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Σχολικό έτος 2005-2006

7.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

7.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η εξίσωση

$$x + \frac{1}{x} = 1 \tag{7.1}$$

1. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση (1).
2. Έστω z μία οποαδήποτε ρίζα της την εξίσωσης (1).
   (α΄) Να αποδείξετε ότι ισχύει $z^3 = -1$.
   (β΄) Να υπολογίσετε την παράσταση:
   $$z^0 + z^9 + z^{18}$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να δείξετε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει:
   $$\sqrt{2}\,|z| \geq |\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)| \tag{7.2}$$
2. Έστω $\mathcal{S}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους η σχεση (7.2) ισχύει σαν ισότητα.
   (α΄) Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών $z \in \mathcal{S}$.
   (β΄) Έστω $z \in \mathcal{S}$ διάφορος του 0. Να αποδείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $\bar{z}$ και $\frac{1}{z}$ επίσης ανήκουν στο $\mathcal{S}$.

7.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α13 γ) σελ. 96

2. (α΄) Για τον z θα ισχύει $z + \frac{1}{z} = 1$ άρα και $z^2 - z + 1 = 0$. Αλλά τότε

$$z^3 + 1 = (z+1)\left(z^2 - z + 1\right) = 0,$$

από την οποία προκύπτει ότι $z^3 = -1$.

(β΄) Έχουμε:

$$z^0 + z^9 + z^{18} = z^0 + \left(z^3\right)^3 + \left(z^3\right)^6 = 1 + (-1)^3 + (-1)^6 = 1.$$

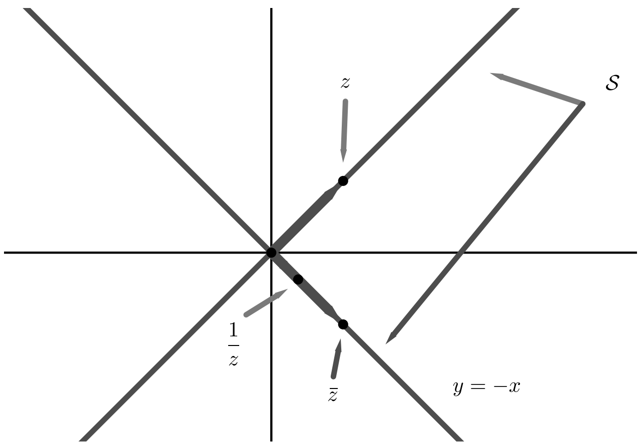
ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β1 σελ. 101

2. (α΄) Έστω $z = x + yi$. Αφού η (7.2) ισχύει σαν ισότητα έχουμε ότι $\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = |x| + |y|$. Από τις ισοδυναμίες

$$\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} = |x| + |y| \Leftrightarrow$$
$$2\left(x^2+y^2\right) = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \Leftrightarrow$$
$$|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| = 0 \Leftrightarrow$$
$$(|x| - |y|)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$|x| = |y| \Leftrightarrow$$
$$y = \pm x$$

συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{S}$ απαρτίζεται τους μιγαδικούς που οι εικόνες τους είναι σημεία των ευθειών $y = 1$, $y = -x$.



(β′) Α Τροπος Αν $z \in \mathcal{S}$ τότε η εικόνα του ανήκει σε κάποια από τις $y = \pm x$ και επομένως το συμμετρικό της ως προς $x'x$, που είναι η εικόνα του $\bar{z}$ ανήκει σε κάποια από τις $y = \mp x$ άρα ο $\bar{z}$ ανήκει στο $\mathcal{S}$. Επίσης από την ισότητα $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$ συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα που αντιστοιχεί στον $\frac{1}{z}$ είναι ομόρροπο προς το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\bar{z}$. Επομένως το πέρας του, δηλαδή η εικόνα του $\frac{1}{z}$ ανήκει σε κάποια από τις $y = \mp x$, σε εκείνη που ανήκει η εικόνα του $\bar{z}$, άρα ο $\frac{1}{z}$ ανήκει στο $\mathcal{S}$.
Β Τροπος Αν $z \in \mathcal{S}$ θα ισχύει:

$$\sqrt{2}\,|z| = |\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)|$$

- Από τις ισότητες $\mathrm{Re}\,(\bar{z}) = \mathrm{Re}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(\bar{z}) = -\mathrm{Im}\,(z)$ και $|\bar{z}| = |z|$ συμπεραίνουμε ότι

$$\sqrt{2}\,|\bar{z}| = |\mathrm{Re}\,(\bar{z})| + |\mathrm{Im}\,(\bar{z})|$$

  επομένως $\bar{z} \in \mathcal{S}$.
- Από την ισότητα $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$ έχουμε

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{|z|^2}\,(\bar{z})\right) = \frac{1}{|z|^2}\mathrm{Re}\,(\bar{z}) = \frac{1}{|z|^2}\mathrm{Re}\,(z)$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{|z|^2}\,(\bar{z})\right) = \frac{1}{|z|^2}\mathrm{Im}\,(\bar{z}) = -\frac{1}{|z|^2}\mathrm{Re}\,(z)$$

  Επομένως αν η (7.2) ισχύει σαν ισότητα τότε διαιρώντας με $|z|^2$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{|z|^2}\sqrt{2}\,|z| = \frac{1}{|z|^2}\,|\mathrm{Re}\,(z)| + \frac{1}{|z|^2}\,|\mathrm{Im}\,(z)|$$

  δηλαδή

$$\sqrt{2}\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\mathrm{Pε}\left(\frac{1}{z}\right)\right| + \left|\mathrm{Iμ}\left(\frac{1}{z}\right)\right|$$

  που σημαίνει ότι και $\frac{1}{z} \in \mathcal{S}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

ΖΗΤΗΜΑ
ΖΗΤΗΜΑ 2,1:

7.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

7.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x - 1$, $x \in [1, e]$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
2. (α΄) Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της f.
   (β΄) Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν κοινά σημεία.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για την συνάρτηση f είναι γνωστό ότι ισχύει

$$1 - x^2 \le f(x) \le 1 + x^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
2. (α΄) Να βρείτε το λ έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \lambda}{\eta\mu x} = 0$$

   (β΄) Έστω ότι η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι υπάρχει x έτσι ώστε

$$f(x) = x^{2005}$$

7.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 1.8 Α10 i)
2. (α΄) Η f είναι γνησίως αύρξουσα και επομένως 1-1 άρα και αντιστρέψιμη. Θα είναι $f(x) = y \Leftrightarrow lnx - 1 = y \Leftrightarrow lnx = 1 + y \Leftrightarrow x = e^{1+y}$. Επομένως $f^{-1}(y) = e^{1+y}$ και αυτό για κάθε y από το σύνολο τιμών της f δηλαδή το $[-1, 0]$. Άρα η αντίστροφη της f ορίζεται στο $[-1, 0]$ και έχει τύπο $f^{-1}(x) = e^{x+1}$.
   (β΄) Παρατηρούμε ότι οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδία ορισμού $[1, e]$ και $[-1, 0]$ τα οποία είναι δύο ξένα σύνολα. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις τους δεν έχουν κοινά σημεία.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 1.5 Α8 i).

2. (α′) Έστω $g(x) = \frac{f(x)-\lambda}{ημx}$ ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Λύνοντας ως προς f βρίσκουμε ότι $f(x) = g(x)\,ημx + \lambda$. Παίρνοντας όρια για $x \to 0$ βρίσκουμε ότι $1 = 0\cdot 0 + \lambda$. Επομένως πρέπει $\lambda = 1$. Θα πρέπει τώρα να επαληθεύουμε αν για την τιμή $\lambda = 1$ πράγματι ισχύει ότι $g(x) = \frac{f(x)-\lambda}{ημx}$. Δηλαδή ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{ημx} = 0$. Από την υπόθεση
$$1 - x^2 \le f(x) \le 1 + x^2$$
έχουμε ότι $-x^2 \le f(x) - 1 \le x^2$. Επειδή μας ενδιαφέρουν τιμές κοντά στο 0 θα εργασθούμε με τιμές του x στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

   - Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι $ημx < 0$ οπότε
   $$\frac{-x^2}{ημx} \ge \frac{f(x)-1}{ημx} \ge \frac{x^2}{ημx}$$
   δηλαδή
   $$-x\left(\frac{x}{ημx}\right) \ge \frac{f(x)-1}{ημx} \ge x\left(\frac{x}{ημx}\right).$$
   Αλλά
   $$\lim_{x\to 0^-} x\left(\frac{x}{ημx}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(-x\left(\frac{x}{ημx}\right)\right) = 0\cdot 1 = 0.$$
   Επομένως απο το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι
   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-1}{ημx} = 0.$$
   - Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $ημx > 0$ οπότε $\frac{-x^2}{ημx} \le \frac{f(x)-1}{ημx} \le \frac{x^2}{ημx}$ και εργαζόμενοι όπως πριν βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{ημx}$

   Άρα πράγματι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{ημx}$

   (β′) Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^{2005}$. Απο την υπόθεση έχουμε ότι για όλα τα x θα ισχύει $1 - x^2 - x^{2005} \le f(x) - x^{2005} \le 1 + x^2 - x^{2005}$ δηλαδή
   $$1 - x^2 - x^{2005} \le g(x) \le 1 + x^2 - x^{2005}$$

   - Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + x^2 - x^{2005}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^{2005}\right) = -\infty$ και αφού για όλα τα x είναι $g(x) \le 1 + x^2 - x^{2005}$ θα ειναι και $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$. Επομένως θα υπάρχει x_1 ώστε $g(x_1) < 0$.

- Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+x^2-x^{2005}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^{2005}\right)=+\infty$ και αφού για όλα τα x είναι $1-x^2-x^{2005}\le g(x)$ θα ειναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. Επομένως θα υπάρχει x_2 ώστε $g(x_2)>0$.

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής η συνεχής συνάρτηση g θα πάρει την τιμή μηδέν σε κάποιο x_0 μεταξύ των x_1, x_2 το οποίο θα είναι και λύση της εξίσωσης $f(x)=x^{2005}$.

7.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

Διδάσκοντες: ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΑΜΟΥΡΓΗΣ, ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ ΚΟΥΤΣΑΝΔΡΕΑΣ, Ν.Σ. ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗΣ

7.3.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha x^3+3\beta x-5}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}\qquad \text{με } \alpha<0$$

1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής.

   (α′) Να βρείτε τα α,β.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+yi$ και $w=\frac{z-2i}{z+1}$, $z\neq-1$.

1. (α′) Να λύσετε ως προς z την εξίσωση $w=1+2i$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Έστω A, B και M οι εικόνες των μιγαδικών -1, $2i$ και z στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι

$$|w|=\frac{(MB)}{(MA)}$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στον κύκλο με κέντρο $A(-1,0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{5}}{2}$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(2x+1) - 7}{x-1} = 10$$

1. Να αποδείξετε ότι:

   (α′) $f(3) = 7$

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) $f'(3) = 5$

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3, f(3))$.

   (α′) Να αποδείξετε ότι η ε έχει εξίσωση $y = 5x - 8$.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Ένα σημείο Σ, που εχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία ε. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 $m/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής περιττή συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

1. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

$$f(x) = \alpha$$

έχει λύση.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της f;

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Υποθέτουμε ότι για μία συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1.

   (α′) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

7.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\alpha x^3+3\beta x-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\alpha x^3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \alpha x^2 \underset{\alpha<0}{=} -\infty$

2. (α′) Έχουμε:

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\alpha x^3 + 3\beta x - 5}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(5-3\beta)x^3 + 3\beta x - 5}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to1} \frac{(x-1)\big((5-3\beta)x^2 + (5-3\beta)x + 5\big)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to1} \big((5-3\beta)x^2 + (5-3\beta)x + 5\big) = 15 - 6\beta.$$

Λόγω συνεχείας θα είναι $15 - 6\beta = f(1) = 3$ και επομένως $\beta = 2$. Άρα $\alpha = 5 - 3 \cdot 2 = -1$. Καταλήγουμε στο ότι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^3+6x-5}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

(β′) Η f στα $x \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη ως ρητή. Για την παράγωγο στο 1 έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{-x^3+6x-5}{x-1}-3}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x^3+6x-5-3(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x\to 1}(-(x+2)) = -3.$$

Επομένως είναι παραγωγίσιμη και στο 1.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Λύνουμε την $\frac{z-2i}{z+1} = 1+2i$ και βρίσκουμε $z = -2+\frac{1}{2}i$.

   (α′) $\frac{(MB)}{(MA)} = \frac{|z-2i|}{|z+1|} = \left|\frac{z-2i}{z+1}\right| = |w|$

2. Θα είναι $|z+1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Αφού $\frac{z-2i}{z+1} = w$ είναι $z = -\frac{-w-2i}{w-1}$, $w \neq 1$. Επομένως

$$\left|\frac{-w-2i}{w-1}+1\right| = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

από την οποία βρίκουμε

$$\left|\frac{-1-2i}{w-1}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Από την τελευταία έχουμε $|w-1| = 2$ και ο τόπος της εικόνας του w είναι ο κύκλος μέ κέντρο το $(1,0)$ και ακτίνα 2.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(2x+1)-7}{x-1}$, $x \neq 1$. ϑα είναι $\lim_{x\to 1} g(x) = 10$. Ισχύει

$$f(2x+1) = g(x)(x-1)+7,$$

και ϑέτοντας όπου x το $\frac{x-1}{2}$ έχουμε:

$$f(x) = g\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)+7 \ \ (*)$$

(α′) Από την $(*)$ παίρνοντας όρια για $x \to 3$ βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \left(\lim_{x\to 3} g\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)\right)+7 = 10\cdot 0+7 = 7.$$

και λόγω συνεχείας είναι $f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) = 7$.

(β′) Έχουμε

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{g\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)+7-7}{x-3}=\frac{1}{2}g\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

και παίρνοντας όρια για $x\to 3$ βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2}g\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{10}{2}=5,$$

επομένως $f'(3)=5$.

2. (α′) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ ή αλλιώς $y=5(x-3)+7$ που γίνεται $y=5x-8$.

   (β′) Αν είναι $x(t)$ η τετμημένη του M η τεταγμένη του θα είναι $5x(t)-8$ και το εμβαδόν $E(t)$ του μεταβλητού τριγώνου ΟΜΣ είναι

$$E(t)=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc} x(t) & 5x(t)-8 \\ 3 & 7 \end{array}\right\|=\frac{1}{2}\left|-8x(t)+24\right|=4\left|x(t)-3\right|=4x(t)-12.$$

   Επομένως

$$E'(t)=4x'(t)=8$$

.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\underset{x=-u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}f(-u)=-\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=-\infty$

2. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g(x)=f(x)-\alpha$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ επομένως υπάρχουν p, q ώστε $f(p)>0$ και $f(q)<0$. Από το θεώρημα του Bolzano η g θα έχει κάποια ρίζα r μεταξύ p, q η οποία είναι και λύση της $f(x)=\alpha$.

3. Από το προηγούμενο ερώτημα για κάθε πραγματικό αριθμό α υπάρχει r ώστε $f(r)=\alpha$. Άρα κάθε πραγματικος αριθμός είναι τιμή της f και επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

   (α′) Έστω ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ δηλαδή $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$. Αφού η $g\circ f$ είναι $1-1$ θα είναι $x_1=x_2$. Άρα η υπόθεση $f(x_1)=f(x_2)$ μας οδηγεί στο ότι $x_1=x_2$. Άρα η f είναι $1-1$.

   (β′) Έστω ότι $g(x_1)=g(x_2)$. Θα δείξουμε ότι $x_1=x_2$. Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ τα x_1,x_2 είναι τιμές της άρα υπάρχουν t_1, t_2 ώστε $f(t_1)=x_1$ και $f(t_2)=x_2$. Τότε και $g(f(t_1))=g(f(t_2))$ και αφού η $g\circ f$ είναι $1-1$ θα είναι $t_1=t_2$ άρα $f(t_1)=f(t_2)$ δηλαδή $x_1=x_2$.

7.4 Διαφορικός Λογισμός.

7.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^x$.

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την f.
2. Να λύσετε την εξίσωση $ex^{ex} = 1$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω f μία συνάρτηση, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ για την οποία, για όλα τα x, ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$$

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.
2. (α′) Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει

   $$f''(x)(1 - f(x)) = 1 + \left(f'(x)\right)^2$$

   (β′) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι συνεχής.

   (γ′) Υποθέτουμε ότι η f εχει μία τουλάχιστον ρίζα.

   i. Να εξετάσετε αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) > 1$.

   ii. Να βρείτε την f.

7.4.2 Απαντήσεις

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^x$.

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 2.7 Α4 ii).
2. Έχουμε τις ισοδυναμίες:
   $ex^{ex} = 1 \Leftrightarrow x^{ex} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow (x^x)^e = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x^x = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{e}\right)$
   Αλλά $f\left(\frac{1}{e}\right)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f που επιτυγχάνεται μόνο για $x = \frac{1}{e}$.
   Άρα λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{1}{e}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 2.8 Β5 i).

2. (α′) Προκύπτει εύκολα αν παραγωγίσουμε δύο φορές την δοθείσα σχέση της υπόθεσης.

   (β′) Από την σχέση $f''(x)(1-f(x)) = 1+(f'(x))^2$ έχουμε ότι δε μπορεί για κάποιο x να είναι $f(x)=1$. Άρα για όλα τα x είναι

   $$f''(x) = \frac{1+(f'(x))^2}{1-f(x)} \quad (*)$$

   Αλλά η $f'(x)$ είναι συνεχής αφού παραγωγίζεται επομένως και η $\frac{1+(f'(x))^2}{1-f(x)}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Άρα και η $f''(x)$ είναι συνεχής.

   (γ′) i. Η f'' δεν μηδενίζεται και αφού είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο x_0 ισχύει $f(x_0) > 1$. Τότε από την $(*)$ είναι $f''(x_0) < 0$ και επομένως η f'' είναι πάντα αρνητική. Αλλά από την υπόθεση η f έχει ρίζα ας την πούμε ρ. Τότε $f''(\rho) = \frac{1+(f'(\rho))^2}{1-f(\rho)} = \frac{1+(f'(\rho))^2}{1-0} > 0$ (άτοπο). Επομένως δεν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) > 1$.

   ii. Λύνουμε την σχέση $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ ως προς $f(x)$ και βρίσκουμε ότι για δοθέν $x \in (-2,2)$ θα είναι

   $$f(x) = 1+\sqrt{4-x^2} \qquad \text{ή} \qquad f(x) = 1-\sqrt{4-x^2}$$

   Η πρώτη περίπτωση αποκλείετα αφού δε μπορεί να είναι $f(x) > 1$ επομένως απομένει η δεύτερη. Άρα

   $$f(x) = 1-\sqrt{4-x^2} \text{ για όλα τα } \quad x$$

7.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

7.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$$

2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$\varphi(x) = \frac{\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

και τις ευθείες $x = \frac{1}{4\pi}$, $x = \frac{1}{2\pi}$ και $y = 0$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και

$$F(x) = \int_0^x x f(t)\, dt$$

1. Να βρείτε την $F'(x)$.
2. Να αποδείξετε ότι αν η F έχει μία θετική ρίζα m τότε η f έχει μία τουλάχιστο θετική ρίζα μικρότερη της m.

7.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 3.2 Α3 v).
2. Όταν $\frac{1}{4\pi} \le x \le \frac{1}{2\pi}$ είναι $2\pi \le \frac{1}{x} \le 4\pi$ οπότε το $\text{ημ}\frac{1}{x}$ αλλάζει πρόσημο. Για αυτά τα x έχουμε:

   - $\text{ημ}\frac{1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 2\pi \le \frac{1}{x} \le 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3\pi} \le x \le \frac{1}{2\pi}$
   - $\text{ημ}\frac{1}{x} \le 0 \Leftrightarrow 3\pi \le \frac{1}{x} \le 4\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi} \le x \le \frac{1}{3\pi}$

   Άρα το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E = \int_{\frac{1}{4\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \left| \frac{\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \right| dx = -\int_{\frac{1}{4\pi}}^{\frac{1}{3\pi}} \frac{\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx + \int_{\frac{1}{3\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \frac{\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx \underset{\text{Ερώτημα 1.}}{=}$$

$$-\left[\text{συν}\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{4\pi}}^{\frac{1}{3\pi}} + \left[\text{συν}\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{3\pi}}^{\frac{1}{3\pi}} = -\left(\text{συν}3\pi - \text{συν}4\pi\right) + \left(\text{συν}2\pi - \text{συν}3\pi\right) = 4$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 3.5 Β4.
2. Έστω ρ μια θετική ρίζα της F. Αν στο $(0, \rho)$ η f δεν έχει ρίζα τότε θα διατηρεί πρόσημο και

   - ή $f(t) > 0$ για κάθε $t \in (0, \rho)$
   - είτε $f(t) < 0$ για κάθε $t \in (0, \rho)$

   Λόγω συνεχείας της f θα ισχύει αντιστοίχως

   - $f(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) \ge 0, \quad f(\rho) = \lim\limits_{t \to \rho^-} f(t) \ge 0$
   - $f(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t) \le 0, \quad f(\rho) = \lim\limits_{t \to \rho^-} f(t) \le 0$

Άρα κατά περίπτωση:

- ή $tf(t) \geq 0$ στο $[0,\rho]$ χωρίς να είναι παντού 0
- είτε $tf(t) \leq 0$ στο $[0,\rho]$ χωρίς να είναι παντού 0

Άρα αντιστοίχως $F(\rho) = \int_0^\rho tf(t)\,dt > 0$ ή $F(\rho) = \int_0^\rho tf(t)\,dt < 0$. Αδύνατον αφού η ρ ειναι ρίζα της F. Επομένως η f θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\rho)$.

7.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

Διδάσκοντες: ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΑΜΟΥΡΓΗΣ, ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΘΕΟΧΑΡΗΣ, ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ ΚΟΥΤΣΑΝΔΡΕΑΣ, Ν.Σ. ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗΣ

7.6.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 2\ln x$$

1. Να βρείτε το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής για τη συνάρτηση $g'(x)$ στο διάστημα $[1,2]$.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2.
   - Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
   - Να μελετήσετε την g ως προ τα κοίλα-κυρτά και τα σημεία καμπής.

   και να συνοψίσετε τα συμπεράσματά σας σε ένα κατάλληλο πίνακα.

15 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 3^x \ , \ g(x) = x$$

και έστω φ η διαφορά τους

$$\varphi(x) = 3^x - x$$

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να υπολογίσετε το το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση
$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}$$
έχει ασύμπτωτη για $x \to +\infty$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$$f(x) = 1 + \int_{x+1}^{2x} \frac{f(t-x)}{x} dt$$
για κάθε $x > 0$.
Να αποδείξετε ότι:

1. Η f είναι παραγωγίσιμη.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Ο τύπος της f είναι
$$f(x) = \ln x + 1$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Για κάθε τριάδα αριθμών α, β, γ με $0 < \alpha < \beta < \gamma$ ισχύει:
$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- Για κάθε $x > 0$, $y > 0$ ισχύει

$$f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $f'(1) = 1$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\lim_{h \to 1} \frac{f(xh) - f(x)}{xh - x} = \frac{2f(x)}{x} + x$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) = x^2 \ln x$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

7.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Είναι $\mathcal{D}_g = (0, +\infty)$ στο οποίο η g είναι παραγωγίσιμη. Άρα $\mathcal{D}_{g'} = (0, +\infty)$ και

$$g'(x) = \frac{(x-2)(x-1)^2}{x}.$$

Ζητάμε $\xi \in (1, 2)$ ώστε

$$g''(\xi) = \frac{g'(2) - g'(1)}{2 - 1}.$$

Αφού

$$g''(x) = \frac{2(x-1)\left(x^2 - x - 1\right)}{x^2}$$

και $\frac{g'(2)-g'(1)}{2-1} = 0$ ζητάμε τις ρίζες της

$$\frac{2(x-1)\left(x^2-x-1\right)}{x^2} = 0,$$

τ που ανήκουν στο $(1,2)$. Οι ρίζες της είναι οι

$$1,\ \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

και στο $(1,2)$ ανήκει μόνο η δεύτερη. Άρα $\xi = \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$.

2. • Η g' έχει ρίζες 1 και 2 αλλά το πρόσημο της καθορίζεται από την θέση του x ως προς την δεύτερη ρίζα. Ισχύει:

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 < x.$$

Επομένως έχουμε ότι $g \downarrow$ στο $(0,2]$ και $g \uparrow$ στο $[2,+\infty)$. Στο 2 έχει ελάχιστο.

• Η g'' έχει ρίζες $1, \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$ και ισχύει

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ ή } \frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2} < x.$$

Επομένως η g είναι κυρτή στα $(0,1]$, $\left[\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2},+\infty\right)$ κοίλη στο $\left[1,\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right]$ ενώ στις δύο ρίζες της παρουσιάζει καμπή.

x	0		1		$\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			σκ		σκ		ελ		

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Είναι $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ και :

$$\varphi'(x) = 3^x \ln 3 - 1.$$

Αφού $\ln 3 > 1$ είναι

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{\ln(\ln 3)}{\ln 3},$$

η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{\ln(\ln 3)}{\ln 3}]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\ln(\ln 3)}{\ln 3}, +\infty\right)$ Επίσης:

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty \quad , \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3^x}{x} - 1\right) = +\infty$$

όπου για το δεύτερο όριο λαμβάνουμε υπ΄ όψιν ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\ln 3}{1} = +\infty.$$

Επομένως το σύνολο τιμών της φ είναι το $[\varphi(m), +\infty)$ όπου $m = -\frac{\ln(\ln 3)}{\ln 3}$.

2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\int_0^1 |3^x - x|\,dx$. Για να το υπολογίσουμε χρειαζόμαστε το πρόσημο της $3^x - x$ δηλαδή της φ.

   Από το ερώτημα 1. έχουμε ότι η φ έχει ελάχιστη τιμή $\varphi(m) = 3^m - m$. Παρατηρούμε ότι $\ln(\ln 3) > 0$ και αφού $\ln 3 > 0$ είναι $m < 0$. Άρα $\varphi(m) > 0$ που σημαίνει ότι η ελάχιστη τιμή της φ είναι θετική. Άρα $3^x - x > 0$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\int_0^1 |3^x - x|\,dx = \int_0^1 (3^x - x)\,dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{2}.$$

3. Εξετάζουμε πρώτα αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3^{x+1}-x-1}{3^x-x}}{x}.$$

   Αλλά:

$$\frac{3^{x+1}-x-1}{3^x-x} = \frac{3^x\left(3-\frac{x}{3^x}-\frac{1}{3^x}\right)}{3^x\left(1-\frac{x}{3^x}\right)} = \frac{3-\frac{x}{3^x}-\frac{1}{3^x}}{1-\frac{x}{3^x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 3,$$

   αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{3^x} = 0$. Επομένως υπάρχει το

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}}{x}$$

   και είναι μηδέν. Επίσης υπάρχει και το

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}}{x} - \alpha x\right)$$

   και είναι 1. Επομένως η συνάρτηση $\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$ έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t - x = u$ βρίσκουμε ότι

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(u)\,du \quad (*).$$

Το β′ μέλος της $(*)$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη άρα το αυτό ισχύει και για το α′ μέλος.

2. Παραγωγίζοντας την $(*)$ βρίσκουμε ότι

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_1^x f(u)\,du + \frac{f(x)}{x} \quad (**).$$

Από την $(*)$ έχουμε ότι $\int_1^x f(u)\,du = xf(x) - x$ οπότε αντικάθιστώντας στην $(**)$ βρίσκουμε ότι $f'(x) = \frac{1}{x}$. Επομένως $f(x) = \ln x + C$. Θέτοντας στην $(*)$ όπου x το 1 βρίσκουμε $f(1) = 1$ και επομένως $C = 1$ άρα

$$f(x) = \ln x + 1.$$

3. Είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ και το συμπέρασμα έπεται.

4. Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $\alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma$ ώστε

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} = f'(\xi_2).$$

Θέλουμε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$. Το τελευταίο ισχύει διότι $\xi_1 < \xi_2$ και $f' \downarrow$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Από την $f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$ θέτοντας $x = y = 1$ βρίσκουμε ότι $f(1) = 0$. Ισχύει:

$$\lim_{h\to 1}\frac{f(xh) - f(x)}{xh - x} = \lim_{h\to 1}\frac{x^2 f(h) + h^2 f(x) - f(x)}{xh - x} =$$

$$\lim_{h\to 1}\left(\frac{x^2 f(h) - x^2 f(1)}{xh - x} + \frac{f(x)}{x}\frac{h^2 - 1}{h - 1}\right) =$$

$$\lim_{h\to 1}\left(x\frac{f(h) - f(1)}{h - 1} + \frac{f(x)}{x}\frac{h^2 - 1}{h - 1}\right) =$$

$$xf'(1) + \frac{f(x)}{x}\cdot 2 = \frac{2f(x)}{x} + x$$

και έχουμε την αποδεικτέα.

2. Είναι
$$f'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \underset{u=hx}{=} \lim_{h\to 1} \frac{f(xh) - f(x)}{xh - x}$$
οπότε από το ερώτημα 1. βρίσκουμε ότι
$$f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + x.$$
Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με x^2 έχουμε την αποδεικτέα.

3. Από την $x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3$ βρίσκουμε ότι
$$\frac{f'(x)\cdot x^2 - f(x)\cdot \left(x^2\right)'}{x^4} = \frac{1}{x}.$$
Επομένως
$$\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = \frac{1}{x}.$$
Άρα $\frac{f(x)}{x^2} = \ln x + C$. Θέτοντας $x = 1$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $f(1) = 0$ έχουμε το αποδεικτέο.

4. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{h\to 0} x\ln x = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Σχολικό έτος 2006-2007

8.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

8.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω ν φυσικός αριθμός.

1. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση $i^{\nu} + i^{-\nu}$;
2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$(i^{\nu} + i^{-\nu})(i^{\nu+1} + i^{-\nu-1})$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z της μορφής

$$z = \frac{1 + xi}{x + i}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$

Έστω $\mathcal{M}$ ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z.

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο $\mathcal{M}$.
2. (α΄) Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο του $\mathcal{M}$ είναι εικόνα ενός μιγαδικού της μορφής (1).

   (β΄) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \pm 1$. Έστω ότι η εικόνα του μιγαδικού $w \neq \frac{a-i}{1-ai}$ ανήκει στο $\mathcal{M}$. Να αποδείξετε ότι και η εικόνα του μιγαδικού $\frac{w-\alpha}{\alpha w-1}$ ανήκει στο $\mathcal{M}$.

8.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β4 σελ. 96

2. Α′ ΤΡΟΠΟΣ Η παράσταση $(i^\nu + i^{-\nu})(i^{\nu+1} + i^{-\nu-1})$ είναι γινόμενο δύο διαδοχικών τιμών της παράστασης $i^\nu + i^{-\nu}$ που όπως είδαμε στο ερώτημα 1. θα είναι -2 και 0 ή 0 και 2 ή 2 και 0. Άρα το γινόμενο σε κάθε περίπτωση είναι 0.
Β′ ΤΡΟΠΟΣ Μια αυτοτελής απάντηση ανεξάρτηση του πρώτου ερωτήματος είναι η ακόλουθη:

$$(i^\nu + i^{-\nu})(i^{\nu+1} + i^{-\nu-1}) = (i^\nu + \frac{1}{i^\nu})(i^{\nu+1} + \frac{1}{i^{\nu+1}}) =$$

$$\frac{\left(i^{2\nu+1} + 1\right)\left(i^{2\nu+2} + 1\right)}{i^{2\nu+1}} = \frac{i^{4\nu+2} + i^{2\nu} + i^{2\nu+2} + 1}{i^{2\nu+1}} = \frac{i^2 + i^{2\nu} + i^{2\nu+2} + 1}{i^{2\nu+1}} =$$

$$\frac{-1 + i^{2\nu} + i^{2\nu+2} + 1}{i^{2\nu+1}} = \frac{i^{2\nu}\left(i^2 + 1\right)}{i^{2\nu+1}} = 0.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Πρόκειται για την άσκηση του σχολικού βιβλίου Α6 της § 2.3. Η διαφορά στην εκφώνηση είναι ότι ζητείται ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z. Επομένως στην λύση του σχολικού, που με το επιχείρημα ότι

$$|z| = \frac{|1 + xi|}{|x + i|} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{x^2 1}} = 1,$$

καταλήγει ότι η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1 πρέπει να προστεθεί και ο έλεγχος αν κάθε σημείο του κύκλου είναι και σημείο του τόπου. Δηλαδή να προστεθεί το παρακάτω:

> Εξετάζουμε αν κάθε μιγαδικός z του οποίου η εικόνα ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο είναι της μορφής
>
> $$z = \frac{1 + xi}{x + i}, x \in \mathbb{R} \quad (*).$$
>
> Η εξίσωση $z = \frac{1+xi}{x+i}$ ως προς x έχει λύση αν και μόνο αν $z \neq i$. Στην περίπτωση αυτή η λύση είναι $x = \frac{-iz+1}{z-i}$. Ο x είναι πραγματικός αν και μόνο αν
>
> $$\overline{\left(\frac{-iz + 1}{z - i}\right)} = \frac{-iz + 1}{z - i}.$$

Έχουμε τις ισοδυναμίες

$$\overline{\left(\frac{-iz+1}{z-i}\right)} = \frac{-iz+1}{z-i} \Leftrightarrow$$

$$\frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i} = \frac{-iz+1}{z-i} \Leftrightarrow$$

$$(i\bar{z}+1)(z-i) = (-iz+1)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow$$

$$i|z|^2 + \bar{z} + z - i = -i|z|^2 + z\bar{z} + i \Leftrightarrow$$

$$2i|z|^2 = 2i \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Επομένως για κάθε z με $z \neq i$ και $|z| = 1$ υπάρχει πραγματικός αριθμός x ώστε να ισχύει η $(*)$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο μοναδιαίος κύκλος από τον οποίο εξαιρείται το σημείο $(0,1)$.

2. (α΄) Αν η απάντηση στο 1. περιλαμβάνει και την προσθήκη στην λύση του σχολικού το ερώτημα έχει απαντηθεί. Αν αποτελείται μόνο από την λύση του σχολικού τότη στο ερώτημα αυτό η απάντηση είναι η προσθήκη.

   (β΄) Θέλουμε κατ΄ αρχάς

$$\left|\frac{w-a}{aw-1}\right| = 1 \quad (**).$$

   Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$(**) \Leftrightarrow \frac{w-a}{aw-1} \cdot \frac{\bar{w}-a}{a\bar{w}-1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$w\bar{w} - aw - a\bar{w} + a^2 = aw\bar{w} - aw - a\bar{w} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(1-a^2\right) w\bar{w} = 1 - a^2 \Leftrightarrow w\bar{w} = 1.$$

   Η τελευταία ισότητα ισχύει αφού $w \in \mathcal{M}$.
   Επίσης θέλουμε να είναι $\frac{w-a}{aw-1} \neq i$. Αυτό ισχύει διότι αν υποτεθεί ότι $\frac{w-a}{aw-1} = i$ λύνοντας ως προς w καταλήγουμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι $w = \frac{a-i}{1-ia}$
   Επομένως $\frac{w-a}{aw-1}\mathcal{M}$.

8.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

8.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$.

1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) \right)$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x + 1$.

1. Να βρείτε έναν ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(\alpha, \alpha + 1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

2. Να αποδείξετε ότι:

   (α′) Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

   (β′) Η f είναι αντιστρέψιμη.

   (γ′) Ισχύει $-1 < f^{-1}(0) < 0$.

   (δ′) Για κάθε x, x_0 ισχύει $\left| f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \right| \le \frac{1}{2} |x - x_0|$.

   (ε′) Η f^{-1} είναι συνεχής.

8.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 1.2 Α11 i).

2. Οι $f \circ g$ και $g \circ f$ ορίζονται κοντά στο $+\infty$ και το αυτό ισχύει και για τη διαφορά τους. Είναι $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = x - 1 - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{\left(x-1-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-1+\sqrt{x^2-1}\right)}{x-1+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-2x+2}{x-1+\sqrt{x^2-1}} =_{(x>0)} \frac{x\left(-2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$

   Άρα:

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 1.8 Α7 ii) σελ. 198

2. (α′) Η f είναι συνεχής ως πολυώνυμο. Θεωρούμε τυχόντα πραγματικό αριθμό y. Ευκολα διαπιστώνουμε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - y) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - y) = +\infty$ και επομένως υπάρχουν x_1, x_2 έτσι ώστε $f(x_1) < 0$ και $f(x_2) > 0$. Ασφαλώς x_1, x_2 διάφορα και η συνεχής $f(x) - y$ έχει ρίζα t στο διάστημα με άκρα x_1, x_2. Αρα $f(t) = y$ και το y είναι τιμή της. Επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι $\mathbb{R}$

   (β′) Ευκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, επομένως και αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$, (γ΄) Από το ερώτημα 1. Η f έχει μία ρίζα ρ στο διάστημα $(-1,0)$ η οποία είναι, λόγω της μονοτονίας, και μοναδική. Θα είναι $f(\rho)=0$ και επομένως $f^{-1}(0)=\rho$. Αλλά $-1<\rho<0$. Άρα $-1<f^{-1}(0)<0$.

(δ΄) Έστω ότι $f^{-1}(x)=y$ και $f^{-1}(x_0)=y_0$. Θα είναι $f(y)=x$ και $f(y_0)=x_0$. Άρα

$$x = y^5 + 2y + 1$$
$$x_0 = y_0^5 + 2y_0 + 1$$

Αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$x - x_0 = y^5 - y_0^5 + 2(y - y_0) \tag{8.2}$$

Στη γνωστή ταυτότητα

$$y^5 - y_0^5 = (y - y_0)\left(y^4 + y^3 y_0 + y^2 y_0^2 + y y_0^3 + y_0^4\right) \tag{8.3}$$

παρατηρούμε ότι αν είναι $y \geq y_0$ θα είναι και $y^5 \geq y_0^5$ ενώ αν είναι $y<y_0$ θα είναι και $y<y_0$. Άρα οι αριθμοί $y^5-y_0^5$, $y-y_0$ έχουν το ίδιο πρόσημο επομένως ο αριθμός $A=y^4+y^3y_0+y^2y_0^2+yy_0^3+y_0^4 \geq 0$ είναι μη αρνητικός. Λόγω της (10.1) η (8.2) γίνεται

$$x - x_0 = (y - y_0)(A + 2)$$

όπου $A \geq 0$. Άρα $|g(x)-g(x_0)| = \frac{|x-x_0|}{A+2} \leq \frac{|x-x_0|}{2}$

$$\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)\right| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \tag{8.4}$$

(ε΄) Η συνέχεια της f^{-1} προκύπτει από την (8.4) όπως ακριβώς στην άσκηση 183 του φυλλαδίου «Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων».

8.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

Διδάσκοντες: Σπυριδων Αμουργης, Γεωργιος Θεοχαρης, Κωνσταντινος Λαμπροπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιαννης

8.3.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 + 2x + \lambda \leq f(x) \leq 2x^2 + 1 + \lambda,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε το $f(1)$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f'(1) = 4$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $\mathrm{A}(1, \mathrm{f}(1))$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία (ε) του ερωτήματος 3. σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 2 τμ.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{1 - iz}{z - i}$$
με $z \in \mathbb{C} - \{i\}$. Συμβολίζουμε με A, B, M, M′ τις εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών αριθμών $i, -i, z, f(z)$ αντιστοίχως.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C} - \{i\}$:

   (α′) Ισχύει
   $$f(z) = -i + \frac{2}{z - i}$$

   4 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Το γινόμενο των μηκών AM και BM′ είναι σταθερό.

   4 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Στις ακόλουθες περιπτώσεις να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του M′. Σε κάθε περίπτωση να εξετάσετε αν κάθε σημείο της γραμμής που θα αναφέρετε στην απάντηση σας είναι και σημείο του τόπου.

   (α′) Αν το σημείο M ανήκει στον κύκλο με κέντρο το σημείο A και ακτίνα 4 .

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Αν ο $z - i$ είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

   9 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f^2(x) - 2xf(x) = 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για την οποία είναι $f(0) > 0$.

1. Να βρείτε την f.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να προσδιορίσετε το είδος μονοτονίας της f^{-1}.

5 Μονάδες

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) f(-x) = 1$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να αποδείξετε ότι αν

$$\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right)\left(-\beta - \sqrt{1+\beta^2}\right) = -1$$

τότε θα ισχύει $\alpha + \beta = 0$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων Α, Β της $\mathcal{C}_f$ υπάρχει σημείο Γ της $\mathcal{C}_f$ τέτοιο ώστε $A\Gamma = B\Gamma$.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$:

   (α′) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό c με $c < f(x_0)$ η εξίσωση

   $$f(x) = c$$

   έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο (α, β).

   10 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $f(x) = f(x_0)$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β) τότε

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0)} = -\infty$$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

8.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Για να βρούμε το $f(1)$ αρκεί να αντικαταστήσουμε την τιμή $x = 1$ στη δοθείσα ανισότητα. Θα βρούμε ότι $1^2 + 2 \cdot 1 + \lambda \le f(1) \le 2 \cdot 1^2 + 1 + \lambda$ δηλαδή $3 + \lambda \le f(1) \le 3 + \lambda$. Άρα $\boxed{f(1) = 3 + \lambda}$

2. **1ος τρόπος**. Η απόδειξη του ότι η f είναι παραγωγίσιμη και η εύρεση της παραγώγου της f θα γίνουν συγχρόνως. Σχηματίζουμε πρώτα το λόγο μεταβολής $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ της f στο 1. Αφαιρούμε πρώτα το $f(1) = 3+\lambda$ από τα μέλη της δοθείσας ανισότητας και βρίσκουμε: $x^2+2x+\lambda-f(1) \le f(x) - f(1) \le 2x^2+1+\lambda-f(1)$ ή $x^2+2x+\lambda-(3+\lambda) \le f(x)-f(1) \le 2x^2+1+\lambda-(3+\lambda)$ δηλαδή

$$x^2 + 2x - 3 \le f(x) - f(1) \le 2x^2 - 2$$

Για να σχηματίσουμε το $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ πρέπει να διαιρέσουμε με $x - 1 \ne 0$. Επειδή δεν ξέρουμε ποιό είναι το πρόσημο του $x - 1$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περιπτωση 1. $x - 1 > 0$ δηλαδή $x > 1$. Τότε θα έχουμε

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \le \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \le \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$$

Απλοποιώντας τα κλάσματα βρίσκουμε $\frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = x + 3$ και $\frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2(x+1)$. Επομένως έχουμε

$$x + 3 \le \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \le 2x + 2$$

Παίρνοντας όρια για $x \to 1^+$ βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x\to 1^+} (x + 3) = 4, \quad \lim_{x\to 1^+} (2x + 2) = 4$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής συνάγουμε ότι θα είναι και $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$.

Περιπτωση 2. $x - 1 < 0$ δηλαδή $x < 1$. Τώρα διαιρούμε με τον αρνητικό αριθμό $x - 1$ και η ανισότητα μας θα αλλάξει φορά. Θα βρούμε ότι

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} \le \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \le \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

που μετά τις απλοποιήσεις θα δώσει

$$2(x + 1) \le \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \le x + 3$$

Παίρνοντας όρια αυτή τη φορά για $x \to 2^-$ και εφαρμόζοντας το κριτήριο της παρεμβολής βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$.
Αρα $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$ και η f είναι παραγωγίσιμη με $\boxed{f'(1) = 4}$.
2ος τρόπος. Ονομάζουμε $h(x) = x^2 + 2x + \lambda$ και $g(x) = 2x^2 + 1 + \lambda$. Για όλα τα x ισχύει $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και επομένως $0 \leq f(x) - h(x) \leq g(x) - h(x)$ άρα $|f(x) - h(x)| \leq |g(x) - h(x)|$. Για $x \neq 1$ είναι $|x-1| > 0$ και επομένως

$$\frac{|f(x) - h(x)|}{|x-1|} \leq \frac{|g(x) - h(x)|}{|x-1|}$$

Το α′ μέλος της παραπάνω σχέσης γράφεται και $\left|\frac{f(x)-h(x)}{x-1}\right| = \left|\frac{f(x)-f(1)-(h(x)-h(1))}{x-1}\right| = \left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \frac{h(x)-h(1)}{x-1}\right|$ διότι $f(1) = h(1)$. Το β′ μέλος μετά από εύκολες πράξεις γίνεται $|x-1|$. Άρα

$$\left|\frac{f(x) - f(1)}{x-1} - \frac{h(x) - h(1)}{x-1}\right| \leq |x-1|$$

Από τη γνωστή ιδιότητα $|x| \leq A \Leftrightarrow -A \leq x \leq A$ έχουμε

$$-|x-1| \leq \frac{f(x) - f(1)}{x-1} - \frac{h(x) - h(1)}{x-1} \leq |x-1|$$

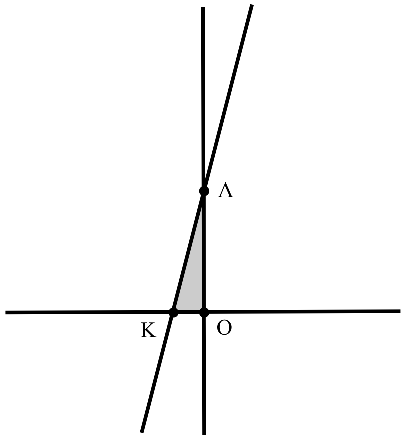
και

$$\frac{h(x) - h(1)}{x-1} - |x-1| \leq \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \leq \frac{h(x) - h(1)}{x-1} + |x-1|$$

Όταν $x \to 1$ έχουμε $\frac{h(x)-h(1)}{x-1} \to h'(1) = 4$ αφού $h'(x) = 2x + 2$ και $|x-1| \to 0$. Το α′ μέλος και το γ′ μέλος της διπλής ανισότητας έχουν για $x \to 1$ όριο το 4. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$.
ΔΕΙΤΕ: Τις ασκήσεις 5 και 6 σελίδα 221 του σχολικού βιβλίου.

3. Εφαρμόζοντας το γνωστό τύπο που μας δίνει την εξίσωση εφαπτομένης βρίσκουμε ότι αυτή θα είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ δηλαδή $y - (3 + \lambda) = 4(x-1)$. Άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι $\boxed{y = 4x + \lambda - 1}$.

4. Τα σημεία που η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες βρίσκονται θέτοντας στην εξίσωση $y = 4x + \lambda - 1$ διαδοχικά $y = 0$, $x = 0$. Θα βρούμε τα σημεία $\mathrm{K}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda, 0\right)$ και $\Lambda(0, \lambda - 1)$. Το τρίγωνο που σχηματίζει η ε με τους άξονες είναι το ΟΚΛ.



Το εμβαδόν του μπορεί να υπολογισθεί με δύο τρόπους:

1ος τρόπος Το ΟΚΛ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές ΟΚ και ΟΛ. Το εμβαδόν του είναι $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OK}\cdot \mathrm{O\Lambda}$ όπου τα μήκη ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα με $\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda\right|$ και $|\lambda-1|$. Επομένως πρέπει να ισχύει $\frac{1}{2}\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda\right|\cdot|\lambda-1|=2$. Η εξίσωση αυτή γράφεται $\frac{1}{8}(\lambda-1)^2=2$ και λύνοντας την βρίκουμε $\boxed{\lambda=-3}$ και $\boxed{\lambda=5}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Είναι ουσιώδες να πάρουμε απόλυτες τιμές για να έχουμε τα μήκη. Τα $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda$ και $\lambda-1$ είναι ετερόσημα.

2ος τρόπος Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό τύπο με την ορίζουσα οπότε το εμβαδόν είναι $\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{O\Lambda}\right)\right|$ δηλαδή

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc}\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda & 0\\ 0 & \lambda-1\end{array}\right\|=\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{4}(\lambda-1)^2\right|=\frac{1}{8}(\lambda-1)^2$$

Θα καταλήξουμε στην ίδια εξίσωση με πριν και βέβαια στις ίδιες τιμές του λ.

ΖΗΤΗΜΑ 2

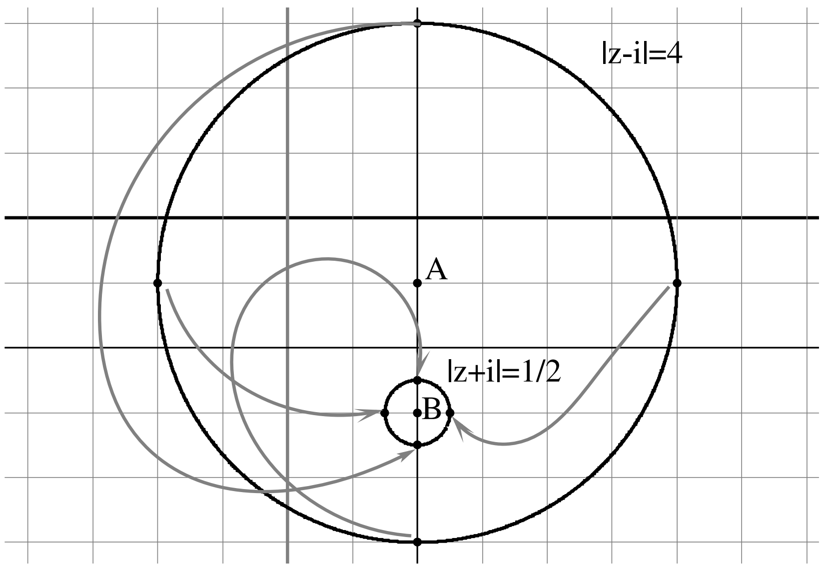
1. (α′) Η αποδεικτέα επαληθεύεται με απλό έλεγχο: $f(z)=-i+\frac{2}{z-i}\Leftrightarrow \frac{1-iz}{z-i}=-i+\frac{2}{z-i}\Leftrightarrow 1-iz=-i(z-i)+2\Leftrightarrow 1-iz=1-iz$ (ισχύει)

   (β′) Η απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών αριθμών είναι το μέτρο της διαφοράς των δύο μιγαδικών (η σειρά δεν παίζει ρόλο). Έτσι $\mathrm{AM}=|\mathrm{i}-\mathrm{z}|$ και $\mathrm{BM}'=|-\mathrm{i}-\mathrm{f}(\mathrm{z})|$. Αξιοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε $BM'=|-i-f(z)|=\left|-i-\left(-i+\frac{2}{z-i}\right)\right|=\left|-\frac{2}{z-i}\right|=\frac{2}{|z-i|}$. Επομένως

$$\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}'=|\mathrm{i}-\mathrm{z}|\cdot\frac{2}{|\mathrm{z}-\mathrm{i}|}=2$$

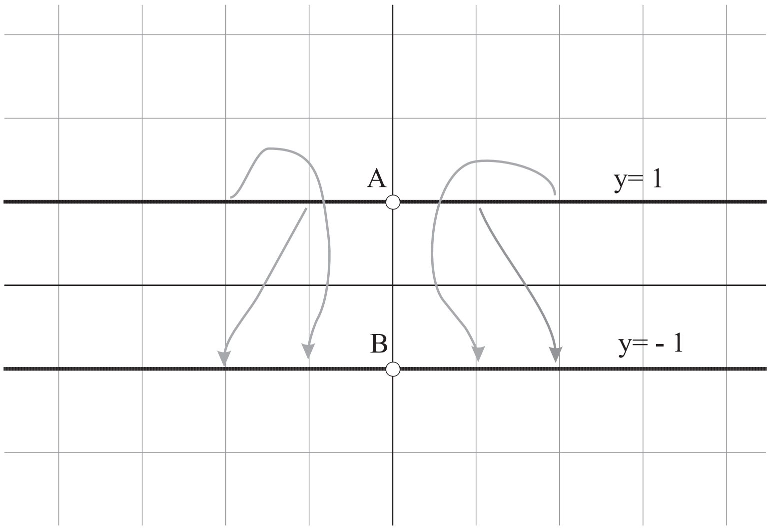
2. (α′) **1ος τρόπος.** Το σημείο M ανήκει στον κύκλο με κέντρο A και ακτίνα 4 αν και μόνο αν AM = 4. Αλλά AM · BM′ = 2 επομένως θα είναι AM = 4 αν και μόνο αν $\mathrm{AM} = \frac{2}{\mathrm{BM}'} = 4$ δηλαδή αν και μόνο αν $\mathrm{BM}' = \frac{1}{2}$ ισοδύναμα αν το M′ ανήκει στον κύκλο με κέντρο B ακτίνα $\frac{1}{2}$. Λόγω των ισοδυναμιών ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ολόκληρος ο κύκλος $\left(\mathrm{B}, \frac{1}{2}\right)$.

2ος τρόπος. Στον πρώτο τρόπο χρησιμοποιήσαμε το ερώτημα 1.(β′). Μπορεί το πρόβλημα να λυθεί και αυτοτελώς. Ξέρουμε ότι $|z-i| = 4$ και ζητάμε τον γεωμετρικό τόπο του $w = f(z) = \frac{1-iz}{z-i}$. Είναι $w = \frac{1-iz}{z-i},\ z \neq i \Leftrightarrow z(w+i) = iw+1,\quad z \neq i \Leftrightarrow z = \frac{iw+1}{w+i},\ w \neq -i$. Αν τώρα είναι $|z-i| = 4$ τότε ασφαλώς είναι $z \neq i$ και $w \neq -i$ και ακόμη $|z-i| = 4 \Leftrightarrow \left|\frac{iw+1}{w+i} - i\right| = 4 \Leftrightarrow \left|\frac{iw+1-i(w+i)}{w+i}\right| = 4 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{w+i}\right| = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{|w+i|} = 4 \Leftrightarrow |w+i| = \frac{1}{2}$. Η τελευταία σχέση μας πληροφορεί ότι $|w-(-i)| = \frac{1}{2}$ και επομένως κατλήγουμε πάλι στο συμπέρασμα ότι ο τόπος του M′ είναι ο κύκλος $\left(\mathrm{B}', \frac{1}{2}\right)$ (ολόκληρος λόγω των ισοδυναμιών) .



(β′) **1ος τρόπος.** Είναι $f(z) = -i + \frac{2}{z-i}$. Αν ο $z-i$ είναι μη μηδενικός πραγματικός τότε και ο $\frac{2}{z-i}$ είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός. Αν δε $t = \frac{2}{z-i}$ και ο $z-i$ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}^*$ τότε και ο $t = \frac{2}{z-i}$ μεταβάλεται σε όλο το $\mathbb{R}^*$. Επομένως είναι $f(z) = -i+t,\ t \in \mathbb{R}^*$. Άρα η τετμημένη της εικόνα του M′ είναι μη μηδενικός πραγματικός και η τεταγμένη -1. Άρα το M′ ανήκει στην ευθεία $y = -1$ από την οποία έχει εξαιρεθεί το σημείο της B.

2ος τρόπος. Είναι $z-i \in \mathbb{R}^*$. Κατ′ αρχήν λοιπόν θα είναι $\overline{z-i} = z-i$. Από τον δεύτερο τρόπο του προηγουμένου ερωτήματος έχουμε με $w = f(z)$ ότι $z = \frac{iw+1}{w+i}$ και $w \neq -i$. Από την σχέση $\overline{z-i} = z-i$ αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι θα ισχύει $\overline{\frac{iw+1}{w+i} - i} = \frac{iw+1}{w+i} - i$. Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε $\overline{\left(\frac{2}{w+i}\right)} = \frac{2}{w+i}$ και επομένως $\overline{w+i} = w+i$ δηλαδή $\bar{w} - w = 2i$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $\mathrm{Im}(z) = -1$ και το σημείο M' που αντιστοιχεί στο w ανήκει στην ευθεία $y = -1$. Αφού $w \neq -i$ από την ευθεία αυτή θα εξαιρεθεί το αντίστοιχο σημείο που είναι το B.



ΖΗΤΗΜΑ 3

1. **1ος τρόπος.** Έστω τυχών πραγματικός αριθμός x. Γι' αυτόν τον x θα ισχύει $f^2(x) - 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 1 + x^2$ και επομένως από την τελευταία ισότητα ή θα είναι ή $f(x) - x = \sqrt{1+x^2}$ είτε $f(x) - x = \sqrt{1+x^2}$. Και επομένως *γιαυτόν* τον x θα είναι:

   - ή $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$
   - είτε $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$

   Δεν ξέρουμε όμως κάθε φορά για ένα x ποιός τύπος εφαρμόζεται. Αν δεν χρησιμοποιήσουμε άλλη υπόθεση παρά μόνο το ότι $f^2(x) - 2xf(x) = 1$ ενδέχεται για άλλα x να ισχύει ότι $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ και για άλλα ότι $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$. Η υπόθεση όμως $f^2(x) - 2xf(x) = 1$ μας πληροφορεί ότι η f δεν έχει ρίζες. Πράγματι αν υποτεθεί ότι για κάποιο x ισχύει $f(x) = 0$ τότε θα έχουμε ότι $0^2 - 2x \cdot 0 = 1$ πράγμα αδύνατο. Η f δεν έχει ρίζες και είναι μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε *διάστημα*, το $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Επομένως θα διατηρεί σταθερό πρόσημο δηλαδή

   - ή θα είναι $f(x) > 0$ για όλα τα x

- είτε θα είναι $f(x) < 0$ για όλα τα x

Η επιπλέον υπόθεση ότι $f(0) > 0$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει $f(x) > 0$ για όλα τα x. Με αυτό το στοιχείο μπορούμε να αποκλείσουμε τον τύπο $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$ διότι δίνει αρνητικές τιμές στην f. Πράγματι $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ και επομένως $x - \sqrt{1+x^2} < 0$. Άρα τελικά ο τύπος της f είναι $\boxed{f(x) = x + \sqrt{1+x^2}}$.

2. **2ος τρόπος.** Για δοθέν x ζητάμε το $f(x)$ που μπορούμε να το δούμε ώς κάποιο άγνωστο $f(x) = y$. Θα είναι $y^2 - 2xy = 1$ δηλαδή $y^2 - 2xy - 1 = 0$. Έχουμε μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x. Την λύνουμε και βρίσκουμε $f(x) = y = x + \sqrt{1+x^2}$ ή $f(x) = y = x - \sqrt{1+x^2}$. Κατόπιν επιχειρηματολογούμε όπως στον προηγούμενο τρόπο.

3. **1ος τρόπος.** Αν έχουμε βρεί τον τύπο της f μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη:

   (α′) Δείχνοντας ότι είναι 1-1:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + \sqrt{1+x_1^2} = x_2 + \sqrt{1+x_2^2} \Rightarrow x_1 - x_2 = \sqrt{1+x_2^2} - \sqrt{1+x_1^2} \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = \left(\sqrt{1+x_2^2} - \sqrt{1+x_1^2}\right)^2 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 2 + x_2^2 + x_1^2 - 2\sqrt{1+x_2^2}\sqrt{1+x_1^2} \Rightarrow x_1x_2 + 1 = \sqrt{1+x_2^2}\sqrt{1+x_1^2} \Rightarrow (x_1x_2+1)^2 = \left(1+x_2^2\right)\left(1+x_1^2\right) \Rightarrow x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2 + 1 = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

   (β′) Δείχνοντας πρώτα ότι είναι γνησίως μονότονη συγκεκριμένα γνησίως αύξουσα χρησιμοποιώντας πράγματα που, επί του παρόντος, ξέρουμε από τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας. Είναι $f'(x) = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} > \frac{x+\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+|x|}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ και επομένως $f'(x) > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα

Στη συνέχεια μπορούμε να μάθουμε τον τύπο της αντίστροφης λύνοντας τον τύπο $y = x + \sqrt{1+x^2}$ ως προς x. Θα βρούμε $x = \frac{y^2-1}{2y}$ και επομένως $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2x}}$. Εξίσου καλά μπορούμε να μάθουμε την f^{-1} από την $f^2(x) - 2xf(x) = 1$ που γράφεται $y^2 - 2xy - 1 = 0$ και μας δίνει τα ίδια αποτελέσματα αν λύσουμε ως προς x.
2ος τρόπος. Αν δεν έχουμε βρεί τον τύπο της f ή τον έχουμε βρεί αλλά δεν θέλουμε να τον χησιμοποιήσουμε μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η f είναι 1-1 υποθέτοντας ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε αφού $f^2(x_1) - 2x_1f(x_1) = 1 = f^2(x_2) - 2x_2f(x_2)$ θα έχουμε $-2x_1f(x_1) = -2x_2f(x_1)$ δηλαδή $x_1f(x_1) = x_2f(x_1)$. Προσέχοντας ότι η σχέση $f^2(x_1) - 2x_1f(x_1) = 1$ μας εξασφαλίζει ότι το $f(x_1)$ δε μπορεί να είναι 0 απλοποιώντας βρίσκουμε $x_1 = x_2$. Ο τύπος της f^{-1} βρίκεται όπως πριν από την $y^2 - 2xy - 1 = 0$.

4. Ανεξάρτητα από το αν έχουμε βρεί τον τύπο της f στηριζόμενοι στο προηγούμενο ερώτημα μπορούμε να έχουμε ως δεδομένο ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρούμε $f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2x}$. Η f παίρνει μόνο θετικές τιμές. Η μονοτονία της μπορεί να βρεθεί αφενός από τον ορισμό: Αν $0 < x_1 < x_2$ τότε $f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2) = \frac{1}{2}(x_1x_2+1)\frac{x_1-x_2}{x_1x_2} < 0$. Άρα $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$ και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

5. **1ος τρόπος.** Χρησιμοποιώντας τον τύπο της f:

$$f(x)f(-x) = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right) =$$

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) = \sqrt{1+x^2}^2 - x^2 = 1$$

2ος τρόπος. Χωρίς τον τύπο της f απλώς χρησιμοποιώντας την αρχική υπόθεση ότι $f^2(x) - 2xf(x) = 1$ και την παρατήρηση ότι η f παίρνει θετικές τιμές. Ονομάζουμε $y_1 = f(x)$ και $y_2 = f(-x)$. Ισχύει $y_1^2 - 2xy_1 = 1$ και $y_2^2 + 2xy_2 = 1$. Λύνοντας τις σχέσεις αυτές ως προς x βρίσκουμε $x = \frac{y_1^2-1}{2y_1}$ και $x = -\frac{y_2^2-1}{2y_2}$. Άρα $\frac{y_1^2-1}{2y_1} = -\frac{y_2^2-1}{2y_2} \Rightarrow 2y_2\left(y_1^2-1\right) + 2y_1\left(y_2^2-1\right) = 0 \Rightarrow 2(y_1+y_2)(y_1y_2-1) = 0 \Rightarrow_{(y_1+y_2>0)} y_1y_2 = 1$.

6. Εδώ *χρειάζεται* να ξέρουμε ποιά είναι η f. Έχουμε

$$\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)\left(-\beta-\sqrt{1+\beta^2}\right) = -1 \Rightarrow$$

$$\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)\left(\beta+\sqrt{1+\beta^2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$f(\alpha)f(\beta) = 1 \Rightarrow$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{f(\beta)} \Rightarrow$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{f(-\beta)}} \Rightarrow f(\alpha) = f(-\beta) \Rightarrow$$

$$\alpha = -\beta \Rightarrow$$

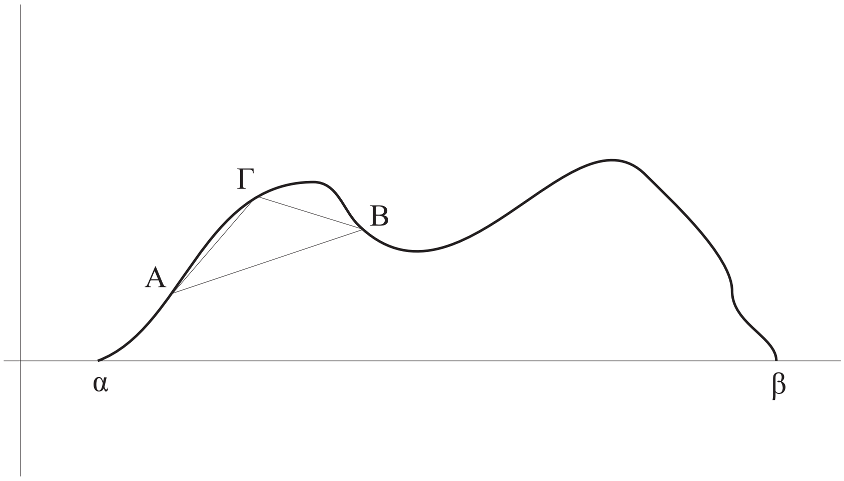
$$\alpha + \beta = 0$$

οπου χρησιμοποιήσαμε ότι η f είναι 1-1.
ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το τελευταίο ερώτημα μπορεί να αποδειχθεί και αυτοτελώς ώς άσκηση που εμπίπτει στην ύλη της Α′ Λυκείου.

ΔΕΙΤΕ: Την άσκηση 7 σελ. 200 του βιβλίου και την άσκηση 221 από το φυλλάδιο «Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων».

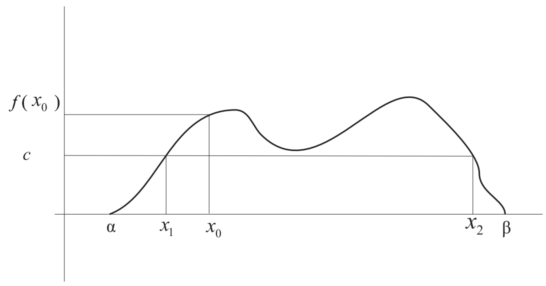
ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει σημείο $\Gamma(x, f(x))$ που ισαπέχει από τα A, B.



Αρκεί η εξίσωση $\sqrt{(x_1 - x)^2 + (f(x_1) - f(x))^2} = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (f(x_2) - f(x))^2}$ ή ισοδύναμα η $(x_1 - x)^2 + (f(x_1) - f(x))^2 = (x_2 - x)^2 + (f(x_2) - f(x))^2$ να έχει λύση. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $h(x) = (x_1 - x)^2 + (f(x_1) - f(x))^2 - (x_2 - x)^2 - (f(x_2) - f(x))^2$ και αρκεί να δείξουμε ότι έχει ρίζα. Αφού A, B είναι διαφορετικά θα είναι $x_1 \neq x_2$. Έχουμε $h(x_1) = -\left[(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2\right] < 0$ και $h(x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - f(x_2))^2 > 0$ επομένως από το θεώρημα του Bolzano η h θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα με άκρα x_1, x_2.

2. (α΄) Η f στο διάστημα $[\alpha, x_0]$ παίρνει σίγουρα τις τιμές $f(\alpha) = 0$ και $f(x_0)$.



Επειδή $0 < c < f(x_0)$ από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και ο c είναι τιμή της f δηλαδή θα υπάρχει x_1 με $\alpha < x_1 < x_0$ ώστε $f(x_1) = c$. Επιχειρηματολογώντας με τον ίδιο τρόπο συνάγουμε ότι υπάρχει x_2 ώστε $x_0 < x_2 < \beta$ και $f(x_2) = c$. Η $f(x) = c$ λοιπόν έχει τουλάχιστον δύο ρίζες $x_1 < x_2$.

(β΄) Στο προηγούμενο ερώτημα αυτό που αποδείξαμε ουσιαστικά είναι ότι αν κάποιος θετικός αριθμό c είναι μικρότερος από μία τιμή τς f

τότε η εξίσωση $f(x) = c$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις. Αν λοιπόν συμβαίνει η εξίσωση $f(x) = f(x_0)$ να έχει μία μόνο λύση (που φυσικά θα είναι η x_0) ο θετικός αριθμός $f(x_0)$ δε μπορεί να είναι μικρότερος από κάποια τιμή της f. 'Αρα για όλα τα x θα είναι $f(x) \le f(x_0)$ και το ίσον θα ισχύει μόνο όταν $x = x_0$. Συνεπώς για $x \ne x_0$ είναι $f(x) - f(x_0) < 0$. Επομένως αφού λόγω συνεχείας της f είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} = \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{1}{y} = -\infty$ έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \frac{1}{f(x)-f(x_0)} = -\infty$.

8.4 Διαφορικός Λογισμός.

8.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

1. Να βρείτε τις τιμές των α, β και να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

2. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε στο ερώτημα 1. και για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ισχύει

- $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1, 1)$
- $f(-1) = -1$
- $f(1) = 1$

1. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$, $[0, 1]$, ή με άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

2. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

8.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 2.7 Α5.

2. Από τον πίνακα μεταβολής βρίσκουμε ότι $f((-\infty,-1]) = (-\infty,3]$, $f([-1,1]) = [-1,3]$ και $f([1,+\infty)) = [-1,+\infty)$. Επομένως:

   - Για $\lambda < -1$ η εξίσωση έχει 1 λύση
   - Για $\lambda = -1$ η εξίσωση έχει 2 λύσεις
   - Για $-1 < \lambda < 3$ η εξίσωση έχει 3 λύσεις
   - Για $\lambda = 3$ η εξίσωση έχει 2 λύσεις
   - Για $\lambda > 3$ η εξίσωση έχει 1 λύση

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 2.5 Β6.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0$. Αποδεικνύεται ότι αφού $g'(x) \leq 0$ η g είναι φθίνουσα. Η απόδειξη γίνεται με το θεώρημα μέσης τιμής όπως ακριβώς γίνεται και για την περίπτωση όπου η παράγωγος είναι αρνητική. Άρα για κάθε x με $-1 \leq x \leq 1$ θα είναι $g(-1) \leq g(x) \leq g(1)$ δηλαδή $0 \leq g(x) \leq 0$. Άρα $g(x) = 0$ γιά κάθε x και επομένως είναι
$$f(x) = x, \quad \text{για κάθε } x$$

8.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

8.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}.$$

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες $x = \frac{5}{4}$, $x = \frac{7}{4}$ και την ευθεία $y = 0$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για την οποία ισχύει
$$\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right) \eta\mu x\,dx = 2, \qquad f(\pi) = 1$$

1. Με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, ή με άλλο τρόπο να υπολογίσετε το $f(0)$.

2. Έστω $g(x) = f(\pi - x)$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\pi \big(g(x) + g''(x)\big)\,\text{ημ}x\,dx = 2$$

8.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β μέρος § 3.2 Α7 i).

2. Ο πίνακας μεταβολής του προσήμου της f είναι:

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-3x+2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Αφού $1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2} < \frac{7}{4} < 2$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}} |f(x)|\,dx = \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{4}} f(x)\,dx \underset{\text{Ερώτημα 1.}}{=}$$

$$\left[\ln\left|x^2-3x+2\right|\right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}} - \left[\ln\left|x^2-3x+2\right|\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{4}} =$$

$$\left(\ln\frac{1}{4} - \ln\frac{3}{16}\right) - \left(\ln\frac{3}{16} + \ln 4\right) = 4\ln 2 - 2\ln 3.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β μέρος §3.5 Β11.

2. (α′) Από την υπόθεση έχουμε:

$$\int_0^\pi f(x)\,\text{ημ}x\,dx + \int_0^\pi f''(x)\,\text{ημ}x\,dx = 2 \quad (*)$$

Επίσης:

$$\int_0^\pi f(x)\,\text{ημ}x\,dx = \int_0^\pi f(x)\,(-\text{συν}x)'\,dx =$$

$$[f(x)\,\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$[f(x)\,\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\,(\eta\mu x)'\,dx =$$

$$[f(x)\,\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} + [f(x)\,\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f''(x)\,\eta\mu x dx =$$

$$-f(\pi) - f(0) - \int_0^{\pi} f''(x)\,\eta\mu x\,dx.$$

Επομένως

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\eta\mu x dx = -1 - f(0) - \int_0^{\pi} f''(x)\,\eta\mu x\,dx \quad (**)$$

Συνδυάζοντας τις $(*)$, $(**)$ βρίσκουμε ότι $f(0) = -3$.

(β') Θέλουμε

$$\int_0^{\pi} \big(g(x) + g''(x)\big)\,\eta\mu x dx = 2$$

όταν $g(x) = f(\pi - x)$ οπότε $g'(x) = -f'(\pi - x)$ και $g''(x) = f''(\pi - x)$. Έχουμε:

$$\int_0^{\pi} \big(g(x) + g''(x)\big)\,\eta\mu x dx = \int_0^{\pi} \big(f(\pi - x) + f''(\pi - x)\big)\,\eta\mu x dx \underset{u=\pi-x}{=}$$

$$\int_{\pi}^{0} \big(f(u) + f''(u)\big)\,\eta\mu(\pi - u)\,(-du) =$$

$$\int_0^{\pi} \big(f(u) + f''(u)\big)\,\eta\mu(u)\,du \underset{\text{Ερώτημα 1.}}{=} 2$$

8.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

Διδάκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Γεώργιος Θεοχάρης, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

8.6.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 8x + 12}{9}$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία:

   (α') Η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

10 Μονάδες

(β′) Η f είναι κυρτή ή κοίλη.

10 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι αν $x > 4$ τότε είναι $f(x) > -4$.

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt \quad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

9 Μοναδες

2. Να μελετήσετε ως προς το πρόσημο την f.

8 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό x ισχύει:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

8 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Για τις συναρτήσεις u, g, f που είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ είναι $u(0) = 2$, $f(0) = \frac{1}{2}$ και για κάθε x ισχύει

- $u'(x) + u(x) = 1$
- $g(x) = u(x)e^x - e^x$
- $-f'(x) + f(x) = f^2(x)$
- $f(x) \neq 0$

1. Να αποδείξετε ότι g είναι σταθερή.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει

$$u(x) = \frac{1+e^x}{e^x}$$

5 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' + \left(\frac{1}{f(x)}\right) = 1$$

5 Μοναδες

4. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

5 Μοναδες

5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(0) = 1$$

5 Μοναδες

3. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}(0, \mathrm{f}(0))$, $\mathrm{B}(1, \mathrm{f}(1))$ και ονομάζουμε:

   - (ε) την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της A.
   - (ζ) την ευθεία που διέρχεται από τα A, B.

   Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της $\mathcal{C}_f$ του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(0,1)$ βρίσκεται κάτω από την (ε) και πάνω από την (ζ).

10 Μοναδες

4. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\ln 2}{2} < E < \frac{1}{2}$$

5 Μοναδες

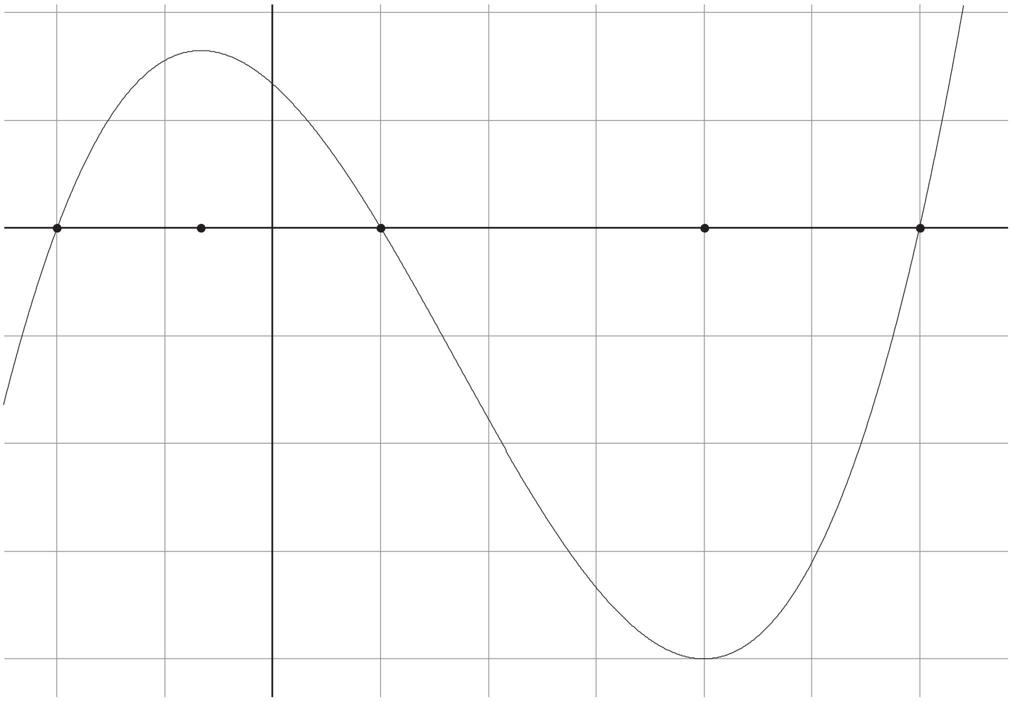
8.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. (α′) Είναι $f'(x) = \frac{1}{9}(3x+2)(x-4)$ και επομένως $(-\infty, -\frac{2}{3}]$ η f είναι γνησίως αύξουσα, στο $\left[-\frac{2}{3}, 4\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[4, +\infty)$ γνησίως αύξουσα.

   (β′) Είναι $f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{10}{9}$ και επομένως στο $(-\infty, \frac{5}{3}]$ η f είναι κοίλη και στο $[\frac{5}{3}, +\infty)$ η f είναι κυρτή.

2. Είδαμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4, +\infty)$ και επομένως αν είναι $x > 4$ θα είναι και $f(x) > f(4) = -4$.



ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Με

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

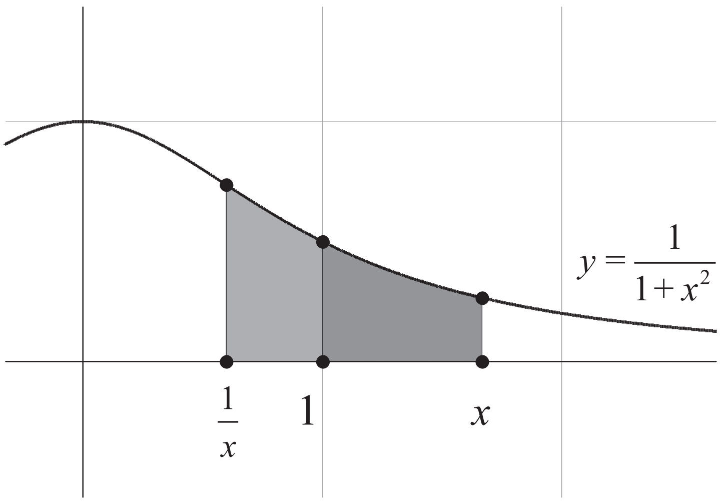
είναι

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1. Είναι $f(1) = 0$ και ο 1 είνα μοναδική ρίζα της f.

2. Απο τη μονοτονία της f έχουμε ότι αν $x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$ και για $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$.

3. Έστω η συνάρτηση
$$h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right).$$
Είναι
$$h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0.$$
Άρα η h είναι σταθερή. Αλλά $h(1) = f(1) + f(1) = 0$. Άρα $h(x) = 0$ γιά κάθε x.



ΖΗΤΗΜΑ 3

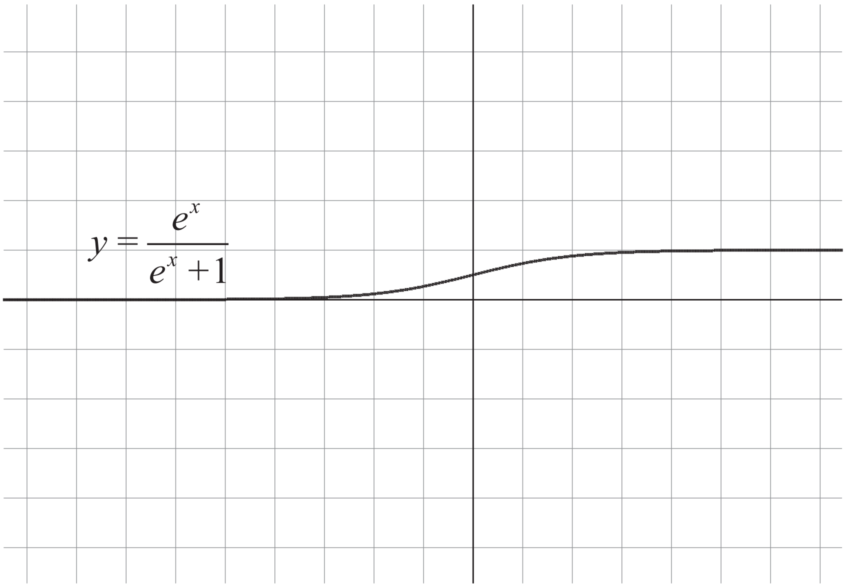
1. Έχουμε $g'(x) = u'(x)e^x + u(x)e^x - e^x = e^x(u'(x) + u(x) - 1) = 0$. Επομένως η g είναι σταθερή.

2. Είδαμε ότι η g είναι σταθερή και επομένως $g(x) = g(0) = u(0)e^0 - e^0 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$. Άρα $u(x)e^x - e^x = 1$ και λύνοντας ως προς $u(x)$ βρίσκουμε $u(x) = \frac{e^x+1}{e^x}$.

3. Είναι
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' + \left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)} = \frac{-f'(x) + f(x)}{f^2(x)} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)} = 1.$$

4. Ονομάζουμε $u(x) = \frac{1}{f(x)}$. Τότε $u'(x) + u(x) = 1$ και $u(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Άρα από το ερώτημα 2. είναι $\frac{1}{f(x)} = \frac{e^x+1}{e^x}$ και επομένως $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

5. Η f είναι συνεχής και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασυμτώτους. Τώρα: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1$ και $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0$ επομένως στο $-\infty$ η συνάρτηση έχει ασύμπτωτο την $y = 0$ και στο $+\infty$ έχει ασύμπτωτο την $y = 1$.



ΖΗΤΗΜΑ 4

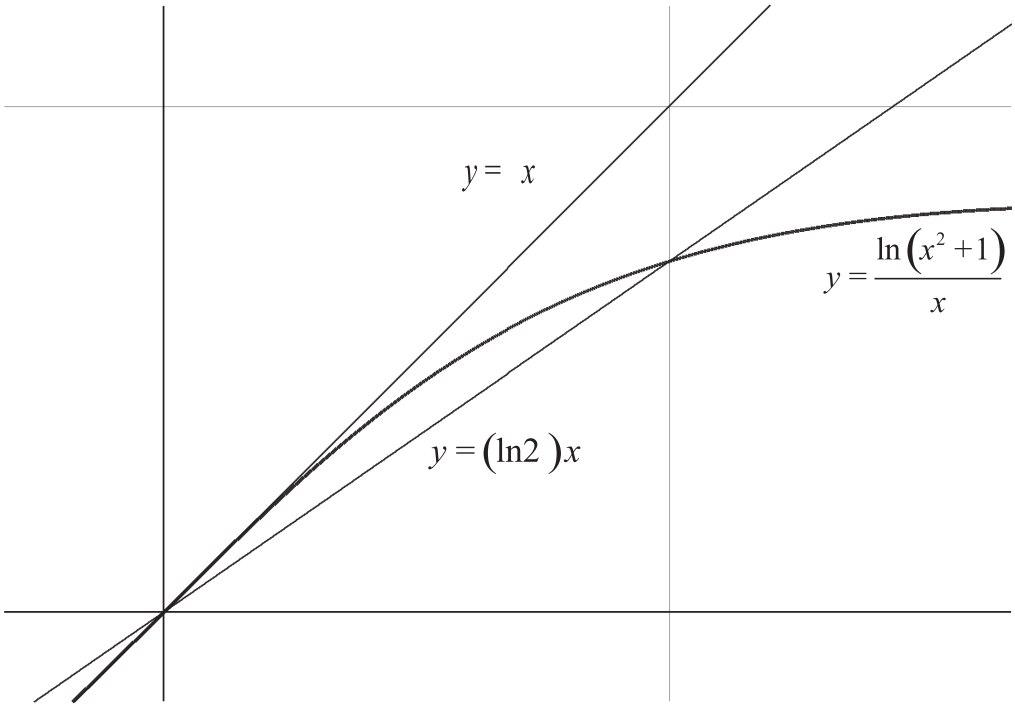
1. Είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} =_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{x}{x^2+1}}{1} = 0 = f(0)$$

2. Είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x^2} =_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{x}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+1} = 1.$$



3. Εύκολα βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη στο A είναι η $y = x$ και ότι η ευθεία AB είναι η $y = (\ln 2)\, x$. Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει $(\ln 2)\, x < f(x) < x$ δηλαδή $(\ln 2)\, x < \frac{\ln(x^2+1)}{x} < x$ ή ισοδύναμα ότι

$$(\ln 2)\, x^2 < \ln\left(x^2 + 1\right) < x^2$$

Η δεύτερη ανισότητα $\ln\left(x^2 + 1\right) < x^2$ προκύπτει από την γνωστή ανισότητα $\ln x \le x - 1$ διότι $\ln\left(x^2 + 1\right) \le x^2 + 1 - 1 = x^2$.

Η πρώτη ανισότητα $(\ln 2)\, x^2 < \ln\left(x^2 + 1\right)$ ισοδυναμεί με την $\ln\left(x^2 + 1\right) - (\ln 2)\, x^2 < 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$q(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) - (\ln 2)\, x^2, \quad x \in [0, 1]$$

Είναι

$$q'(x) = 2x\frac{1 - (\ln 2)\, x^2 - \ln 2}{x^2 + 1}.$$

Το πρόσημο της $q'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $1 - (\ln 2)\, x^2 - \ln 2$. Είναι $1 - (\ln 2)\, x^2 - \ln 2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{1}{\ln 2} - 1}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\sqrt{\frac{1}{\ln 2} - 1}$ ορίζεται (αφού $\frac{1}{\ln 2} - 1 > 0$) και ανήκει στο $(0, 1)$ διότι

$$\sqrt{\frac{1}{\ln 2} - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} < 2 \Leftrightarrow \ln 2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln 2} > \sqrt{e} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{e} \Leftrightarrow 4 > e \text{ (ισχύει)}.$$

Με $\rho = \sqrt{\frac{1}{\ln 2} - 1}$ είναι $f \uparrow$ στο $[0, \rho]$ και $f \downarrow$ στο $[\rho, 1]$. Επειδή $q(0) = 0 = q(1)$ είναι $q(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Επομένως και η πρώτη ανισότητα ισχύει.

4. Το εμβαδόν E είναι ίσο με $\int_0^1 f(x)\,dx$. Έχουμε $x - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και στο ανοικτό ισχύει σαν γνήσια ανισότητα άρα $\int_0^1 (x - f(x))\,dx > 0$ από την οποία προκύπτει ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Όμοια

$$\int_0^1 (f(x) - (\ln 2)\,x)\,dx > 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 (\ln 2)\,x dx = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Άρα

$$\frac{1}{2}\ln 2 < E < \frac{1}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Σχολικό έτος 2007-2008

9.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

9.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι
$$(\alpha + \beta i)^{10} + (\beta - \alpha i)^{10} = 0$$

2. Αν $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ να βρείτε για ποιές τιμές του θετικού ακεραίου n ισχύει
$$(\alpha + \beta i)^{n} + (\beta - \alpha i)^{n} = 0$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να βρείτε πού ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει
$$|z - i| > |z + 1|$$

2. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, v είναι γνωστό ότι
$$|z - i| > |z + 1|, \qquad |v - i| > |v + 1|$$

   (α΄) Να αποδείξετε ότι $|z + v - i| > |z + v + 1|$

   (β΄) Να βρείτε που ανήκει η εικόνα του
$$w = \frac{1}{z + 1}$$

9.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Μέρος Α′ § 2.2 Β7

2. Έχουμε

   $$(\alpha+\beta i)^n+(\beta-\alpha i)^n=(\alpha+\beta i)^n+(-i(\beta i+\alpha))^n=(\alpha+\beta i)^n\left(1+(-i)^n\right).$$

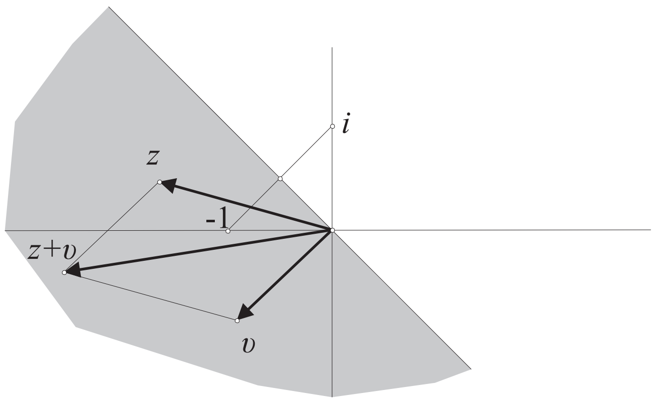
   Επομένως θα είναι $(\alpha+\beta i)^n+(\beta-\alpha i)^n=0$ αν και μόνο αν $(\alpha+\beta i)^n\left(1+(-i)^n\right)=0$. Αλλά $(\alpha+\beta i)^n\neq 0$ επομένως θα είναι $\left(1+(-i)^n\right)=0$. Με $n=4k+\upsilon,\quad 0\leq\upsilon<4$ βρίσκουμε ότι $1+(-i)^n=1+(-i)^\upsilon$ το οποίο γίνεται μηδέν όταν $\upsilon=2$. Άρα οι ζητούμενε τιμές του n είναι $n=4k+2$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α′ Μέρος §2.3 Α6

2. (α′) Α ΤΡΟΠΟΣ Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι ένας μιγαδικός $z=x+yi$ θα ικανοποιεί την σχέση $|z-i|>|z+1|$ αν και μόνο αν $y<-x$. Άρα αν είναι $z=x+yi$ και $\upsilon=\kappa+\lambda i$ θα είναι από την υπόθεση $y<-x,\quad \kappa<-\lambda$. Άρα για τον μιγαδικό $z+\upsilon=(x+\kappa)+(y+\lambda)i$ θα ισχύει $x+\kappa<-(y+\lambda)$. Άρα ισχύει $|z+\upsilon-i|>|z+\upsilon+1|$

   Β ΤΡΟΠΟΣ Αν κάποιος έχει περιγράψει το σύνολο των z που ικανοποιούν την $|z-i|>|z+1|$ ως το σύνολο που προκύπτει αν πάρουμε εκείνο από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η μεσοκάθετος των εικόνων των -1 και i το οποίο περιέχει την εικόνα του -1 και του αφαιρέσουμε την αρχή του, δηλαδή τη μεσοκάθετο, τότε μπορεί να κάνει την απόδειξη διανυσματικά: Το πέρας του διανύσματος που αντιστοιχεί στο $z+\upsilon$ περιέχεται σε αυτό το σύνολο και επομένως ο $z+\upsilon$ έχει την ιδιότητα που θέλουμε.



   (β′) Από την σχέση $w=\frac{1}{z+1}$ βρίσκουμε ότι είναι $z=\frac{1-w}{w}$. Για $z\neq -1$ και $w\neq 0$ έχουμε τις ισοδυναμίες

   $$|z-i|>|z+1|\Leftrightarrow\left|\frac{1-w}{w}-i\right|>\left|\frac{1-w}{w}+1\right|\Leftrightarrow\left|\frac{1-w}{w}-i\right|>\left|\frac{1-w}{w}+1\right|\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{1-w-iw}{w}\right| > \left|\frac{1}{w}\right| \Leftrightarrow |1-w-iw| > 1 \Leftrightarrow$$

$$|(-1-i)\,w+1| > 1 \Leftrightarrow \left|(-1-i)\left(w-\frac{1}{1+i}\right)\right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$|-1-i|\left|\left(w-\frac{1}{1+i}\right)\right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|\left(w-\frac{1}{1+i}\right)\right| > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left|\left(w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)\right| > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η τελευταία σχέση μας πληροφορεί ότι η εικόνα του w ανήκει στο εξωτερικό του κυκλικού δίσκου που γράφεται με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

9.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-e^x)$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
2. (α΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

   (β΄) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f^{-1} = f$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 1}(4f(x)+2-4x) = -10$$

1. Να βρείτε το $\lim_{x\to 1} f(x)$.
2. (α΄) Να βρείτε το $\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-4}{f(x)+2}$

   (β΄) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη. Έστω:

   - $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x)(f(x)+2)^2 = 1$ για κάθε $x \neq 1$.
   - $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής τέτοια ώστε: $h(0) > g(0)$.

   i. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την συνάρτηση g.

   ii. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0,1)$.

9.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 1.2 Α1 iv).

2. (α′) Άν x_1, x_2 είναι από το πεδίο ορισμού της f τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} > e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2} \Rightarrow 1-e^{x_1} > 1-e^{x_2} \Rightarrow \ln(1-e^{x_1}) < \ln(1-e^{x_2}) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα. Ακόμη είναι και συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Αφού το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, 0)$ το σύνολο τιμών της είναι το $f((-\infty,0)) = \left(\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = (-\infty, 0)$.

   (β′) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και επομένως 1-1 άρα είναι αντιστρέψιμη. Έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow \ln(1-e^x) = y \Leftrightarrow e^{\ln(1-e^x)} = e^y \Leftrightarrow 1 - e^x = e^y \Leftrightarrow e^x = 1 - e^y \Leftrightarrow_{(\text{για } y<0)} x = \ln(1-e^y)$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο το x έχει λύση για $y \in (-\infty, 0)$ την $x = \ln(1-e^y)$. Άρα $f^{-1}(y) = \ln(1-e^y)$ για $y \in (-\infty, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι η f^{-1} ορίζεται στο $(-\infty, 0)$ και $f^{-1}(x) = \ln(1-e^x)$. Άρα $f^{-1} = f$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 1.5 Β4 i).

2. (α′) Είναι $\frac{f^2(x)-4}{f(x)-2} = \frac{(f(x)-2)(f(x)+2)}{f(x)-2} = f(x)+2$. Επομένως $\lim_{x\to 1} \frac{f^2(x)-4}{f(x)-2} = \lim_{x\to 1}(f(x)+2) = -2+2 = 0$.

   (β′) i. Παρατηρούμε ότι για $x \neq 1$ λόγω της $g(x)(f(x)+2)^2 = 1$ έχουμε ότι $(f(x)+2)^2 \neq 0$. Άρα για κάθε $x \neq 1$ έχουμε $g(x) = \frac{1}{(f(x)+2)^2}$ και επομένως στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ η g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Την περίπτωση όπου $x_0 = 1$ πρέπει να την δούμε χωριστά. Το όριο της g στο 1 είναι $+\infty$ αφού $\lim_{x\to 1}(f(x)+2)^2 = 0$ και κοντά στο 1 είναι $(f(x)+2)^2 > 0$. Επομένως το όριο της g στο 1 δε μπορεί να είναι ίσο με την τιμή της στο 1 που είναι πραγματικός αριθμός. Άρα η g είναι ασυνεχής στο 1. Τελικά η g είναι συνεχής σε κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του 1 στον οποίο είναι ασυνεχής.

   ii. Θεωρούμε την διαφορά $s = g - h$. Αυτή είναι συνεχής στο $(0,1)$ διότι τόσο η g όσο και η h είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του $(0,1)$. Είναι

   - $\lim_{x\to 0} s(x) = \lim_{x\to 0}(g(x) - h(x)) = g(1) - h(1) < 0$. Επομένως έχουμε ότι υπάρχει x_1 στο $(0,1)$ ώστε $s(x_1) < 0$.

- $\lim\limits_{x \to 1} s(x) = \lim\limits_{x \to 0} (g(x) - h(x)) = +\infty$ αφού το όριο της g στο 1 είναι $+\infty$ ενώ της h είναι ο πραγματικός αριθμός $h(1)$. Επομένως υπάρχει x_2 στο $(0,1)$ ώστε $s(x_2) > 0$.

Τα x_1, x_2 είναι δύο διαφορετικά στοιχεία του διαστήματος $(0,1)$ διότι οι τιμές της s σε αυτά είναι διαφορετικές αφού είναι ετερόσημες. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bolzano για την συνεχή συνάρτηση s στο διάστημα με άκρα x_1, x_2 συνάγουμε ότι υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1, x_2,άρα και στο διάστημα $(0,1)$ τέτοιο ώστε $s(x_0) = 0$. Το σημείο των $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ που αντιστοιχεί στο x_0 είναι κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

9.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

Διδάκοντες: Σπυριδων Αμουργης, Ν.Σ. Μαυρογιαννης, Βασιλειος Τσιτσος

9.3.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = -2 - i, \qquad z_2 = 4 + 2i$$

1. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = |z_1 \bar{z}_2 + z_2|$.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$(z_1 + z_2)^{2008} + (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^{2008}$$

είναι πραγματικός.

10 Μοναδες

3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει:

$$|z - z_1| = 2\,|z - z_2|$$

10 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 - \ln x \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

1. Ορίσετε την συνάρτηση $f+g$.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

5 Μοναδες

3. Να βρείτε την συνάρτηση g^{-1}.

5 Μονάδες

4. Να ορίσετε την συνάρτηση $g^{-1}\circ f$.

5 Μονάδες

5. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της $g^{-1}\circ f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x\le 1\\ |x-2|\sqrt{x} & x>1\end{cases}$$

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια την f.

10 Μοναδες

2. Να βρείτε την παράγωγο της f.

10 Μοναδες

3. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi : (0, +\infty] \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

1. Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα.

5 Μοναδες

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ.

5 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι η φ έχει μοναδική ρίζα.

5 Μοναδες

4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = e^x \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο A της $\mathcal{C}_f$ και σημείο B της $\mathcal{C}_g$ ώστε οι εφαπτόμενες των $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ στα A, B να είναι παράλληλες.

10 Μοναδες

9.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. $A = |z_1\bar{z}_2 + z_2| = |(-2-i)(4-2i) + (4+2i)| = |-6+2i| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

2. Ονομάζουμε $w = (z_1 + z_2)^{2008} + (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)^{2008}$. Αν είναι $w = \kappa + \lambda i$ τότε $\bar{w} = \kappa - \lambda i$ και $w - \bar{w} = 2\lambda i$ άρα $\lambda = \frac{w-\bar{w}}{2i}$. Θα είναι $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow \bar{w} = w$. Επομένως για να δείξουμε ότι είναι $w \in \mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $\bar{w} = w$. Πράγματι εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του συζυγούς βρίσκουμε: $\overline{w} = (\overline{z}_1 + \overline{z}_2)^{2008} + \left(\overline{\overline{z}}_1 + \overline{\overline{z}}_2\right)^{2008} = w$

3. Ονομάζουμε $z = x + yi$ και έχουμε τις ισοδυναμίες: $|z - z_1| = 2|z - z_2| \Leftrightarrow$
$|x + iy + 2 + i| = 2|x + iy - 4 - 2i| \Leftrightarrow$
$|x + 2 + (y+1)i| = 2|(x-4) + (y-2)i| \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2}^2 = \left(2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$
$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4\left((x-4)^2 + (y-2)^2\right) \Leftrightarrow$

$(x+2)^2+(y+1)^2-4\left((x-4)^2+(y-2)^2\right)=0 \Leftrightarrow$
$(x-1)^2+(y+1)^2-4\left((x-3)^2+(y-2)^2\right)=0 \Leftrightarrow$
$-3x^2-3y^2+36x+18y-75=0 \Leftrightarrow$
$\frac{-3x^2+36x-75-3y^2+18y}{-3}=0 \Leftrightarrow$
$x^2+y^2-12x-6y+25=0$
Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

με $A=-12$, $B=-6$, $\Gamma=25$. Είναι: $A^2+B^2-4\Gamma=(-12)^2+(-6)^2-4\cdot 25=80>0$ επομένως η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή το σημείο $K(6,3)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{80}}{2}=2\sqrt{5}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Τα πεδία ορισμού των f, g είναι $\mathcal{D}_f=(0,+\infty)$, $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$. Το άθροισμα τους θα έχει πεσίο ορισμού την τομή τους δηλαδή $\mathcal{D}_{f+g}=\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g=(0,+\infty)\cap\mathbb{R}=(0,+\infty)$. Θα είναι δε $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=1-\ln x+\frac{e^x}{1+e^x}$.

2. Έχουμε:
[1]$g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow$
$\frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}}=\frac{e^{x_2}}{1+e^{x_2}}\Rightarrow$
$e^{x_1}\left(1+e^{x_2}\right)=e^{x_2}\left(1+e^{x_1}\right)\Rightarrow$
$e^{x_1}+e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_2}+e^{x_1}e^{x_2}\Rightarrow$
$e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow$
$x_1=x_2$

3. Είναι $g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ και επομένως για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της g είναι $y=\frac{e^x}{1+e^x}$. Λύνοντας ως προς x βρίσκουμε ότι:

   - Η εξίσωση $y=\frac{e^x}{1+e^x}$ έχει λύση ως προς x αν και μόνο αν είναι $0<y<1$. Επομένως το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $(0,1)$.
   - Για $y\in(0,1)$ η εξίσωση $y=\frac{e^x}{1+e^x}$ έχει λύση $x=\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$ και επομένως $g^{-1}(y)=\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

   Συνοψίζοντας έχουμε ότι:

$$g^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right),\quad x\in(0,1)$$

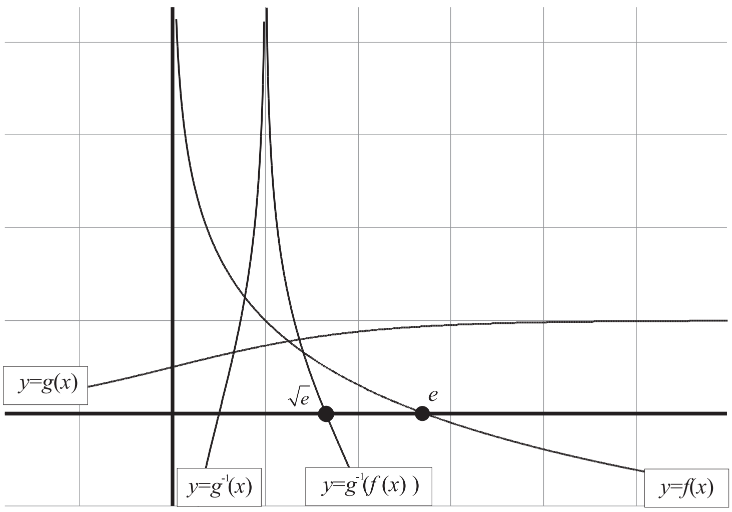
[1]Μπορεί να διαπιστωθεί και με απλή παραγώγιση ότι $g'(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$ και επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1

4. Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g^{-1} \circ f$ απαρτίζεται από τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει ανήκει στο πεδίο ορισμού της g^{-1}. Αναζητούμε τις λύσεις του συστήματος:

$$x \in (0,+\infty) \text{ και } f(x) \in (0,1)$$

Έχουμε τις ισοδυναμίες:
$x \in (0,+\infty)\, 0, \text{ και } f(x) \in (0,1) \Leftrightarrow$
$x > 0,, \text{ και}, \text{ και } 0 < 1 - \ln x < 1 \Leftrightarrow$
$x > 0, \text{ και } \ln x < 1, \text{ και } \ln x > 0 \Leftrightarrow$
$x > 0, \text{ και } x < e, \text{ και } x > 1$
Τελικά το πεδίο ορισμού της $g^{-1} \circ f$ είναι το διάστημα $(1,e)$. Ο τύπος της $g^{-1} \circ f$ είναι $\left(g^{-1} \circ f\right)(x) = g^{-1}(f(x)) = \ln\left(\frac{f(x)}{1-f(x)}\right) = \ln\left(\frac{1-\ln x}{\ln x}\right)$

5. Έχουμε:
$\left(g^{-1} \circ f\right)(x) > 0 \Leftrightarrow$
$\ln\left(\frac{1-\ln x}{\ln x}\right) > 0 \Leftrightarrow$
$\frac{1-\ln x}{\ln x} > 1 \Leftrightarrow$
$\frac{1-\ln x}{\ln x} - 1 > 0 \Leftrightarrow$
$\frac{1-2\ln x}{\ln x} > 0 \Leftrightarrow$
$(1 - 2\ln x)\ln x > 0$
Ονομάζουμε $t = \ln x$ και η τελευταία ανίσωση γίνεται $(1-2t)\,t > 0$ η οποία έχει λύσεις $0 < t < \frac{1}{2}$. Πρέπει λοιπόν $0 < \ln x < \frac{1}{2}$ δηλαδή $1 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
Τελικά η γραφική παράσταση της $g^{-1} \circ f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για τα $x \in \left(1, \sqrt{e}\right)$.



ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Η συνάρτηση είναι ορισμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$. Στο διάστημα $[0,1)$ η συνάρτηση είναι συνεχής αφού συμπίπτει με την συνεχή συνάρτηση

$\sqrt{x}$. Επίσης στο διάστημα $(0,+\infty)$ είναι συνεχής διότι συμπίπτει με την συνάρτηση $|x-2|\sqrt{x}$ η οποία είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Ελέγχουμε την συνέχεια στο σημείο $x_0=1$. Είναι:

- $f(1)=\sqrt{1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}|x-2|\sqrt{x}=1$

Επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής και στο σημείο $x_0=1$ άρα είναι συνεχής.

2. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $|x|$ αν και συνεχής στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επομένως πρέπει να ασχοληθούμε και με το σημείο $x_0=2$ όπου η $|x-2|$ μηδενίζεται. Για να δούμε λοιπόν που παραγωγίζεται η f αναπτύσσουμε περαιτέρω την γραφή της f, απαλείφοντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x\le 1\\ (2-x)\sqrt{x} & 1<x<2\\ (x-2)\sqrt{x} & x\ge 2\end{cases}$$

Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$ η f παραγωγίζεται και η παράγωγός της βρίσκεται εφαμόζοντας τους κανόνες παραγώγισης. Είναι αντιστοίχως: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $-\frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$, $\frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$. Κοιτάμε χωριστά την παραγωγισιμότητα στα σημεία 0, 1 και 2.

$\boxed{\mathbf{x=0}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}}=+\infty$. Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο 0 διότι το όριο του λόγου μεταβολής της υπάρχει μεν αλλά δεν είναι πραγματικός αριθμός αλλά $+\infty$.

$\boxed{\mathbf{x=1}}$ Εδώ επειδή η f έχει διαφορετικό τύπο εκατέρωθεν του 1 θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής της στο 1. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(2-x)\sqrt{x}-1}{x-1}=$
$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{((2-x)\sqrt{x}-1)((2-x)\sqrt{x}+1)}{(x-1)((2-x)\sqrt{x}+1)}$
$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(2-x)^2\sqrt{x}^2-1}{(x-1)((2-x)\sqrt{x}+1)}$
$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-4x^2+4x-1}{(x-1)((2-x)\sqrt{x}+1)}=$
$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2-3x+1)}{(x-1)((2-x)\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+1}{((2-x)\sqrt{x}+1)}=-\frac{1}{2}$. Επομένως η f δεν

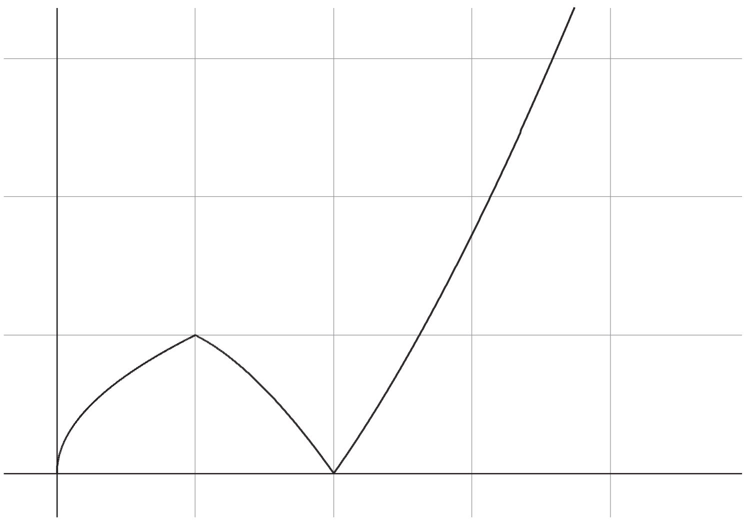
παραγωγίζεται στο 1 διότι τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής αν και πραγματικοί αριθμοί είναι άνισα.

$\boxed{\mathbf{x=2}}$ Θα πρέπει να βρούμε τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής της στο 2. Είναι:
$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\sqrt{x}-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x} = \sqrt{2}$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(2-x)\sqrt{x}-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-\sqrt{x}\right) = -\sqrt{2}$
Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο 2.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι (Οι αστερίσκοι δηλώνουν ότι στο αντίστοιχο σημείο η f δεν παραγωγίζεται): $f'(x) = \begin{cases} * & x=0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x<1 \\ * & x=1 \\ -\frac{3x-2}{2\sqrt{x}} & 1<x<2 \\ * & x=2 \\ \frac{3x-2}{2\sqrt{x}} & x>2 \end{cases}$

3. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}|x-2|\sqrt{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) =_{\left(\frac{1}{x}=y\right)} \lim\limits_{x\to 0^+} f(y) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{y} = 0$. Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$.

Η γραφική παράσταση της f (δεν ζητείται από την εκφώνηση) είναι η ακόλουθη:



ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έχουμε[2]:
$x_1 < x_2 \Rightarrow$

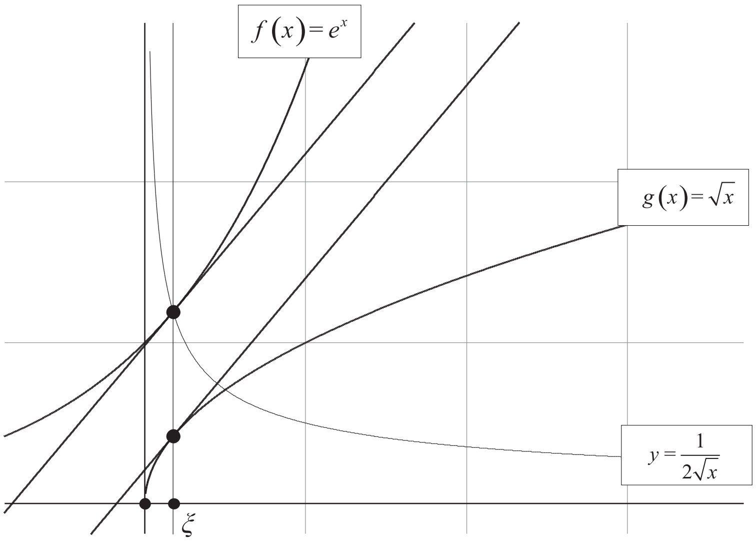
[2] Φυσικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και παράγωγοι που είναι γνωστές από τα μαθήματα γενικής παιδείας

$e^{x_1} < e^{x_2}$ και, $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow$
$e^{x_1} < e^{x_2}$ και, $2\sqrt{x_1} < 2\sqrt{x_2} \Rightarrow$
$e^{x_1} < e^{x_2}$ και, $-2\sqrt{x_1} > -2\sqrt{x_2} \Rightarrow$
$e^{x_1} < e^{x_2}$ και, $-\frac{1}{2\sqrt{x_1}} < -\frac{1}{2\sqrt{x_2}} \Rightarrow$
$e^{x_1} - \frac{1}{2\sqrt{x_1}} < e^{x_2} - \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \Rightarrow$
$\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$

2. Η φ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, είναι φνησίως αύξουσα, έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και τα όρια της στα άκρα αυτού του διαστήματος είναι $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$. Επομένως το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ δηλαδή το $\mathbb{R}$.

3. Αφού το σύνολο τιμών της φ είναι το $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0 το 0 είναι τιμή της φ και επομένως η φ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Λόγω της μονοτονίας η ρίζα αυτή είναι μοναδικη.

4. Για τις συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $g(x) = \sqrt{x}$ έχουμε $f'(x) = e^x$ και $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Από το προηγούμενο ερώτημα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $f'(x) - g'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση ας την πούμε ξ. Θα είναι $f'(\xi) = g'(\xi)$. Τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ ανήκουν στις $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ αντιστοίχως και οι εφαπτόμενες των $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ στα σημεία αυτά δηλαδή οι ευθείες:
$$y = f'(\xi)x + f(\xi) - f'(\xi)\xi$$
$$y = g'(\xi)x + g(\xi) - g'(\xi)\xi$$
έχουν τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως. Θα δείξουμε ότι είναι παράλληλες αποδεικνύοντας ότι δεν συμπίπτουν. Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι
$$f(\xi) - f'(\xi)\xi \neq g(\xi) - g'(\xi)\xi \tag{9.1}$$
Υποθέτουμε ότι η (9.1) δεν αληθεύει. θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έχουμε:
$f'(\xi) = g'(\xi)$ και $f(\xi) - f'(\xi)\xi = g(\xi) - g'(\xi)\xi \Rightarrow$
$e^\xi = \sqrt{\xi}$ και $\sqrt{\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \Rightarrow$
$e^\xi = \sqrt{\xi}$ και $\xi = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{e} = \sqrt{\frac{1}{2}}$
$e = \frac{1}{2}$ (άτοπο)



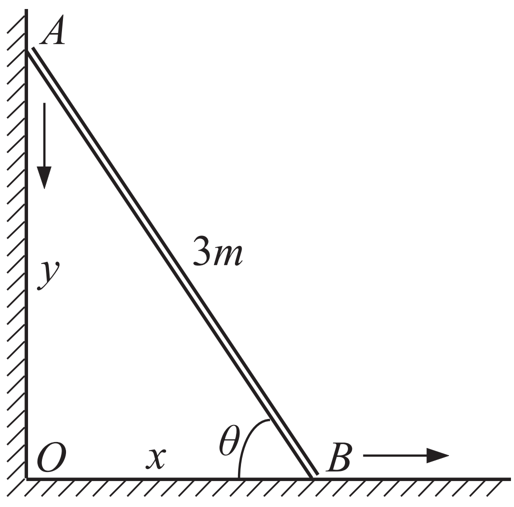
9.4 Διαφορικός Λογισμός.

9.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Μία σκάλα μήκους $3m$ είναι τοποθετημένη σ′ έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό $0,1m/sec$.

1. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο $2,5m$, να βρείτε:
   (α′) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).
   (β′) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας.
2. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου ΑΟΒ.



ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

2. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$:

   (α′) Η f έχει ακρότατα και το είδος των ακροτάτων.

   (β′) Η f είναι αντιστρέψιμη.

9.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 2.4 Β7.

2. Είναι $x^2 + y^2 = 1$ και ζητάμε την μέγιστη τιμή του $\frac{1}{2}xy$ δηλαδή το xy. Αφού $y = \sqrt{9-x^2}$ ζητάμε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = x\sqrt{9-x^2} \quad x \in (0,3).$$

Είναι

$$f'(x) = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

και προφανώς όταν $0 < x < \frac{3}{2}\sqrt{2}$ είναι $f'(x) > 0$ και όταν $\frac{3}{2}\sqrt{2} < x < 3$ είναι $f'(x) < 0$. Είναι λοιπόν $f \uparrow$ στο $\left(0, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$ και $f \downarrow$ στο $\left[\frac{3}{2}\sqrt{2}, 3\right)$. Η f έχει μέγιστο στο $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ και η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι $2f\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 9$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 2.8 Β2

2. (α′) Με $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ είναι $f'(x) = 2\left(e^{x-\alpha} - x\right)$ και $f''(x) = 2\left(e^{x-\alpha} - 1\right)$. Η f'' ειναι θετική όταν $\alpha < x$ και αρνητική όταν $x < \alpha$. Επομένως στο $(-\infty, \alpha]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[\alpha, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Έχει δε ελάχιστη τιμή $g(\alpha) = 1 - \alpha$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

   i. $1 - \alpha \geq 0$ δηλαδή $\alpha \leq 1$. Τότε όλες οι τιμές της f' εκτός ίσως από μια είναι θετικές και η f είναι γνησίως αύξουσα. Στην περίπτωση αυτή δεν έχει ακρότατα.

   ii. $1 - \alpha < 0$ δηλαδή $\alpha > 1$. Η $f''(x)$ είναι αρνητική για $x < \alpha$ και θετική για $x > \alpha$. Επίσης

   - $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{e^{x-\alpha}}{x} - 1\right) = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x-\alpha}}{x} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x-\alpha}}{1} = +\infty$.

Επομένως η στην περίπτωση αυτή η f' έχει ακριβώς μία ρίζα ρ_1 στο $(-\infty, \alpha)$ και ακριβώς μία ρίζα ρ_2 στο $(\alpha, +\infty)$ εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει πρόσημο. Έχουμε σχετικά τον διάγραμμα:

x	$-\infty$		ρ_1		α		ρ_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η f έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και όπως διαπιστώσαμε και με την f' είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ τα ακρότατα αυτά δεν είναι ολικά.

(β′) Στην δεύτερη περίπτωση όπου $\alpha > 1$ η f δεν $1-1$ αφού $f(0) = 2e^{-\alpha} > f(\rho_2)$ και το σύνολο τιμών της f στο $(\rho_2, +\infty)$ περιέχει το $f(0)$ επομένως αυτή την τιμή η f την παίρνει δύο φορές. Άρα όταν $\alpha > 1$ η f δεν είναι αντιστρέψιμη. Στην πρώτη περίπτωση όπου $\alpha \geq 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα $1-1$ και επομένως αντιστρέψιμη.

9.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

9.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω $F(x) = \int_1^{\sigma\upsilon\nu x} \sqrt{1-t^2}dt$

1. Να βρείτε την παράγωγο της F.

2. Να βρείτε την F.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $f(x) = x^2 - 3x$.

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν S του χωρίου που περικλείεται την C_f και τον άξονα $x'x$

2. Η ευθεία ευθεία $y = -m$, με $m > 0$ τέμνει την C_f στα A, B των οποίων οι προβολές στον $x'x$ είναι A', B' αντιστοίχως. Έστω T το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABB'A'$. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $\frac{S}{T}$;

9.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.5 Α5 i).

2. Είδαμε στο ερώτημα 2. ότι

$$F'(x) = -\eta\mu x\,|\eta\mu x|\,.$$

Επίσης από την υπόθεση έχουμε ότι $F(0) = 0$. Στα διαστήματα όπου το ημίτονο είναι μη αρνητικό, δηλαδή στα διαστήματα της μορφής $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ η F' θα είναι ίση με $-\eta\mu^2 x$. Στα διαστήματα όπου $\eta\mu x \leq 0$, δηλαδή στα $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ θα είναι $F'(x) = \eta\mu^2 x$.

Ξέρουμε ότι

$$\eta\mu^2 x = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}.$$

Άρα οι παράγουσες της $\eta\mu^2 x$ είναι της μορφής

$$\frac{1}{2}x - \frac{\eta\mu 2x}{4} + C.$$

Επομένως κατά περίπτωση η F θα είναι κάποια συνάρτηση της μορφής

$$\mp\frac{1}{2}x \pm -\frac{\eta\mu 2x}{4} + C.$$

Αλλά $F(0) = 0$ επομένως $C = 0$. Συνοψίζοντας έχουμε:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{\eta\mu 2x}{4} & , \quad x \in [2k\pi, (2k+1)\pi],\ k \in \mathbb{Z} \\ +\frac{1}{2}x - \frac{\eta\mu 2x}{4} & , \quad x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi],\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.7 Α3.

2. Επειδή το S είναι σταθερό, το $\frac{S}{T}$ θα γίνει ελάχιστο όταν το T γίνει μέγιστο.

Αρχικά εκφράζουμε το T ως συνάρτηση του m υπολογίζοντας τις συντεταγμένες των A, B. Αυτές προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος

$$y = x^2 - 3x$$
$$y = -m$$

η οποία ανάγεται στην επίλυση της

$$x^2 - 3x = -m,$$

η οποία έχει ρίζες $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9-4m}$. Η μία διάσταση του ορθογωνίου προκύπτει από την διαφορά των ριζών ενώ η άλλη αντικαθιστώντας μία οποιαδήποτε ρίζα στην $f(x) = x^2 - 3x = x(x-3)$ και παίρνοντας το αντίθετο του αποτελέσματος. Έτσι

$$AB = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9-4m}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(9-4m)}\right) = \sqrt{9-4m}$$

$$AA' = -f\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9-4m}\right) = -\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9-4m}\right)\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9-4m}\right) = m.$$

Επομένως το εμβαδόν είναι

$$T(m) = m\sqrt{9-4m}, \quad m \in \left[0, \frac{9}{4}\right]$$

ισχύει $T'(m) = 3\frac{3-2m}{\sqrt{9-4m}}$ και η T' είναι θετική στο $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ και αρνητική στο $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ ειναι $T \uparrow$ και στο $\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right]$ είναι $T \downarrow$. Επομένως η $T(m)$ μεγιστοποιείται για

$$\frac{3}{2}$$

. Η μέγιστη τιμή του $T(m)$ είναι $E\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ επομένως η ελάχιστη τιμή του $\frac{S}{T}$ είναι

$$\left(\frac{S}{T}\right)_{\min} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

9.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

Διδάσκοντες: ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΑΜΟΥΡΓΗΣ, Ν.Σ. ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗΣ, ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΤΣΙΤΣΟΣ,

9.6.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -4x^5 + 5x^4$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A(t) = f(t) + 2, \quad t \in [-1, 1]$$

6 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε

$$1 = 5\xi^4 - 5\xi^3$$

6 Μοναδες

4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x + x}$.

6 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x + 1} \quad \text{και}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

με α, β διάφορους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς.

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, F.

5 Μοναδες

2. Να βρείτε τις παραγώγους των f, F.

5 Μοναδες

3. Να εξετάσετε αν η F έχει σημεία καμπής.

5 Μοναδες

4. Να αποδείξετε ότι

$$F(1) = \alpha + (\beta - \alpha) \ln 2$$

5 Μοναδες

5. Να βρείτε τα α, β ώστε η F να παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ακρότατο το $1 - 2\ln 2$.

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{1 + e^x}$$

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας $\rho \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(\rho) = 0 \quad \text{και} \quad f(-\rho) = 4$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): \quad y = x + 3 \qquad\qquad (\varepsilon_2): \quad y = x + 1$$

είναι, αντιστοίχως, ασύμπτωτες της $\mathcal{C}_f$ για $x \to -\infty$ και $x \to +\infty$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Ονομάζουμε:

   - E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες (ε_1), $x = -1$, $x = 0$.
   - E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες (ε_2), $x = 0$, $x = 1$.

   Να αποδείξετε ότι $E_1 = E_2$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

- $g(x) > 0$
- $g(x) + \ln g(x) = x$

1. Να αποδείξετε ότι η g δεν έχει ακρότατα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το σημείο τομής της $\mathcal{C}$ με την ευθεία $y = x$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$$g(x) \geq \frac{x+1}{2}$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

9.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Είναι $f'(x) = -20x^4 + 20x^3 = -20x^3(x-1)$. Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής της f:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	τ.ε. $f(0)=0$	$\nearrow$	τ.μ. $f(1)=1$	$\searrow$	$-\infty$

2. Προφανώς η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A(t)$ προκύπτουν αν στην μέγιστη και την εκάχιστη τιμή της $f(t)$, $t \in [-1,1]$ προθέσουμε το 2. Από τον πίνακα μεταβολής της f συμπεραίνουμε ότι $f([-1,0]) = [f(0), f(-1)] = [0,9]$ και $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$. Επομένως $f([-1,1]) = [0,9]$ και η μέγιστη τιμή της f στο $[-1,1]$ είναι 9 ενώ η ελάχιστη είναι 0. Επομένως η μέγιστη τιμή της $A(t)$ είναι 11 και η ελάχιστη είναι 2.

3. Η f είναι παραγωγίσιμη και επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $\xi \in [-1,1]$ δηλαδή θα υπάρχει κάποιο $\xi \in (-1,1)$ ώστε να ισχύει:
$$\frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = f'(\xi)$$
δηλαδή $-4 = -20\xi^4 + 20\xi^3$ που ισοδυναμεί με την:
$$1 = 5\xi^4 - 5\xi^3$$

4. Έχουμε:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x+x} =_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 0}\frac{(f(x))'}{(\eta\mu x+x)'} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-20x^4+20x^3}{\sigma\upsilon\nu x+1} = 0$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Είναι $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}-\{-1\}$ δηλαδή $\mathcal{D}_f = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Το πεδίο ορισμού της F θα απαρτίζεται από εκείνα τα x για τα οποία και τα δύο άκρα του ολοκληρώματος ανήκουν σε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,+\infty)$ που απαρτίζουν το $\mathcal{D}_f$. Επειδή το ένα άκρο 0 ανήκει ήδη στο διάστημα $(-1,+\infty)$ πρέπει και το άλλο άκρο x να ανήκει σε αυτό το διάστημα. Άρα $\mathcal{D}_F = (-1,+\infty)$.

2. Είναι $f'(x) = \frac{\alpha-\beta}{(x+1)^2}$ και $F'(x) = f(x)$.

3. Αν η F είχε καμπή σε κάποιο σημείο με τετμημένη x_0 τότε αναγκαστικά θα ήταν $F''(x_0) = 0$. Αλλά η F'' είναι η f' που δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Άρα η F δεν έχει σημεία καμπής.

4. Εδώ χρειάζεται να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\alpha t+\beta}{t+1}dt$. Με αλλαγή μεταβλητής $t+1 = u$ βρίσκουμε $t = u-1$ και $\frac{\alpha t+\beta}{t+1} = \frac{\alpha(u-1)+\beta}{u} = \alpha + (\beta-\alpha)\frac{1}{u}$, $dt = du$ και τα νέα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι τα 1, 2. Επομενως $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_1^2 \left(\alpha + (\beta-\alpha)\frac{1}{u}\right)du = [\alpha u - (\beta-\alpha)\ln|u|]_1^2 = \alpha + (\beta-\alpha)\ln 2$.

5. Αν η F παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της F θα πρέπει, από το θεώρημα του Fermat, να ισχύει $F'(1) = 0$. Πρέπει δηλαδή $f(1) = \frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ που σημαίνει ότι θα πρέπει να είναι $\beta = -\alpha$. Ακόμη πρέπει να ισχύει $F(1) = 1-2\ln 2$. Αλλά όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι $F(1) = \alpha + (\beta-\alpha)\ln 2$. Έχουμε λοιπόν το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \beta = -\alpha \\ \alpha + (\beta-\alpha)\ln 2 = 1-2\ln 2 \end{array}\right\}$$

Λύνοντας βρίσκουμε $\alpha = 1, \quad \beta = -1$. Πρέπει τώρα να ελέγξουμε αν πράγματι οι δύο αυτές τιμές μας οδηγούν σε συνάρτηση F που στο 1 έχει ακρότατο. Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι όντως η παράγωγος f της F εκατέρωθεν του 1 αλλάζει πρόσημο. Για τις συγκεκριμένες τιμές έχουμε $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ και βλέπουμε ότι η f στο διάστημα $(-1,1)$ είναι αρνητική ενώ στο διάστημα $(1,+\infty)$ είναι θετική. Άρα πράγματι η F για αυτές τις τιμές παρουσιάζει ακρότατο στο 1.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Είναι $f'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα. Εύκολα βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Άρα $f(\mathbb{R}) = f((-\infty,+\infty)) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

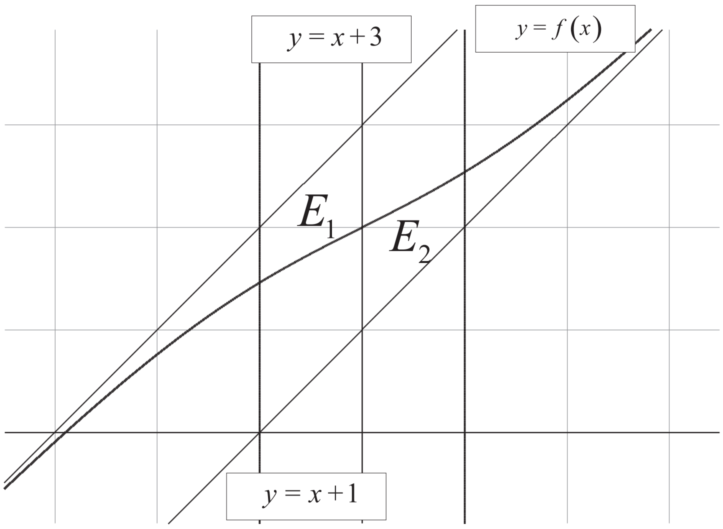
2. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό και να επαληθεύσουμε ότι:
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+3)) = 0$$
και
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) = 0$$
Αλλά: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+3)) =$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1+\frac{2}{1+e^x}-(x+3)\right) =$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{2}{1+e^x}\right) = 0$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) =$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{2}{1+e^x}-(x+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{1+e^x} = 0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

3. Όπως είδαμε η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Άρα ο 0 είναι τιμή της f και επομένως υπάρχει ρ, μοναδικός λόγω της μονοτονίας, ώστε $f(\rho) = 0$. Πρέπει να επαληθεύσουμε ότι αυτός ο ρ ικανοποιεί την $f(-\rho) = 4$. Δηλαδή ξέρουμε ότι
$$\rho+1+\frac{2}{1+e^\rho} = 0 \quad (*)$$
και θέλουμε να επαληθεύσουμε ότι
$$-\rho+1+\frac{2}{1+e^{-\rho}} = 4 \quad (**)$$
Κάνοντας λίγες πράξεις βρίσκουμε ότι η $(**)$ ισοδυναμεί με την $\rho e^\rho + \rho + e^\rho + 3 = 0$ με την οποία ισοδυναμεί, όπως εύκολα διαπιστώνεται, και η $(*)$. Επομένως ο ένας και μοναδικός ρ για τον οποίο ισχύει $f(\rho) = 0$ επαληθεύει και την $f(-\rho) = 4$.

4. Πρέπει πρώτα να βρούμε την σχετική θέση της $\mathcal{C}_f$ με τις ευθείες (ε_1), (ε_2). Για το σκοπό αυτό εξετάζουμε το πρόσημο των διαφορών:
$$f(x)-(x+3)$$
και
$$f(x)-(x+1)$$
Είναι $f(x)-(x+3) = -2\frac{e^x}{1+e^x} < 0$ επομένως η $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται κάτω από την (ε_1). Ακόμη $f(x)-(x+1) = \frac{2}{1+e^x} > 0$ από την οποία συνάγουμε ότι η $\mathcal{C}_f$ είναι πάνω από την (ε_2). Επομένως:
$$E_1 = \int_{-1}^{0}((x+3)-f(x))\,dx$$

και

$$E_2 = \int_0^1 \left(f\left(x\right) - \left(x+1\right)\right) dx$$



Πρέπει να επαληθεύσουμε ότι

$$\int_{-1}^{0} \left(\left(x+3\right) - f\left(x\right)\right) dx = \int_0^1 \left(f\left(x\right) - \left(x+1\right)\right) dx$$

ή ισοδύναμα ότι:

$$\int_{-1}^{0} \left(2 - \frac{2}{1+e^x}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+e^x}\right) dx \quad (***)$$

Η επαλήθευση της $(***)$ μπορεί να γίνει:

(α΄) *Μετασχηματίζοντας το ολοκλήρωμα του α΄ μέλους έως ότου να καταλήξουμε στο β΄ μέλος*
Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x+1 = u$ οπότε $x = u-1$ και $dx = du$ βρίσκουμε ότι

$$\int_{-1}^{0} \left(2 - \frac{2}{1+e^x}\right) dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1+e^{u-1}}\right) du$$

και κάνοντας στο ολοκλήρωμα του β΄ μέλους την αλλαγή $u = 1-t$ οπότε $du = -dt$ βρίσκουμε

$$\int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1+e^{u-1}}\right) du$$

$$= -\int_1^0 \left(2 - \frac{2}{1+e^{-t}}\right) dt = \int_0^1 \left(2 - \frac{2e^t}{1+e^t}\right) dt =$$

$$\int_0^1 \frac{2}{1+e^t} dt = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+e^x}\right) dx.$$

(β′) *Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα και των δύο μελών*
Είναι:

$$\int_{-1}^{0}\left(2-\frac{2}{1+e^x}\right)dx =$$

$$\int_{-1}^{0}2dx-2\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx$$

και επίσης

$$\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{1+e^x}\right)dx = 2\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^x}dx.$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{1+e^x}dx$ θέτοντας $u=e^x$ οπότε $x=\ln u$, $dx=\frac{1}{u}du$ και

$$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1}{(1+u)\,u}du.$$

Αναζητούμε A,B ώστε $\frac{1}{(1+u)u}=\frac{A}{1+u}+\frac{B}{u}$ και κατά τα γνωστά βρίσκουμε $A=-1,\quad B=1$ οπότε $\int\frac{1}{(1+u)u}du=\int\left(-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{u}\right)u=\ln|u|-\ln|1+u|+c$. Άρα

$$\int_{-1}^{0}2dx-2\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx=$$

$$2\,[x]_{-1}^{0}-2\left[\ln\frac{e^x}{1+e^x}\right]_{-1}^{0}=2-2\ln(1+e)+2\ln 2$$

και

$$2\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^x}dx=2\left[\ln\frac{e^x}{1+e^x}\right]_{0}^{1}=2-2\ln(1+e)+2\ln 2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 Μια πιό σύντομη αντιμετώπιση μπορούμε να έχουμε αν εργασθούμε αφαιρώντας από τη συνάρτηση και τι ευθείες το 2 δηλαδή αν πάρουμε τις ευθείες $y=x+1$, $y=x-1$ και την $\varphi(x)=f(x)-2$ η οποία όπως εύκολα διαπιστώνεται είναι περιττή και επομένως ένας μετασχηματισμός στα ολοκληρώματα ο $u=-x$ επαρκεί.
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 (Προστέθηκε μετά την διόρθωση) Οι λύσεις αυτές δόθηκαν στους μαθητές αμέσως μετά την εξέταση. Αξίζει να σημειωθεί ότι αρκετά παιδιά έλυσαν το συγκεκριμένο ερώτημα δίνοντας πιό απλή λύση από τις προτεινόμενες: Μόνο με ένα μετασχηματισμό τον $u=-x$

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Αν η g είχε ακρότατο σε κάποιο σημείο τότε επειδή ορίζεται σε ανοικτό διάστημα θα έπρεπε σε αυτό το σημείο (θεώρημα του Fermat να μηδενίζεται η παράγωγος της. Όμως για κάθε x είναι:

$$g'(x)+(\ln g(x))'=(x)'$$

και επομένως

$$g'(x)\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)=1$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η g' δεν μηδενίζεται. Άρα η g δεν έχει ακρότατα.

2. Από το προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε ότι $g'(x)=\frac{g(x)}{1+g(x)}>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Θα μπορούσαμε να απαντήσουμε το ερώτημα 1. μετά το 2. Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα σε ένα ανοικτό διάστημα για κάθε ανοικτό διάστημα I που περιέχει το x_0 υπάρχουν στο I αριθμοί x_1, x_2 στο I έτσι ώστε $x_1<x_0<x_2$ και λόγω μονοτονίας είναι $g(x_1)<g(x_0)<g(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν τιμές της g στο I που είναι μεγαλύτερες αλλά και μικρότερες του $g(x_0)$. Επομένως η g δεν μπορεί να έχει ακρότατο στο οποιοδήποτε x_0.

3. Από την σχέση
$$g'(x)=\frac{g(x)}{1+g(x)}\quad (\#)$$
συνάγουμε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Παραγωγίζοντας την (#) βρίσκουμε:
$g''(x)=\left(\frac{g(x)}{1+g(x)}\right)'=\frac{g'(x)(1+g(x))-g(x)g'(x)}{(1+g(x))^2}=\frac{g'(x)}{(1+g(x))^2}>0$
Επομένως η g είναι κυρτή.

4. Πρέπει να λύσουμε το σύστημα των $y=x$, $y=g(x)$ Έχουμε τις ισοδυναμίες:
$$\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=g(x) \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x \\ g(x)=x \end{array}\right\}\Leftrightarrow (\text{υπόθεση})$$
$$\left.\begin{array}{l} y=x \\ \ln g(x)=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x \\ g(x)=1 \end{array}\right\}$$

Αλλά στην σχέση $g(x)+\ln g(x)=x$ αν είναι $g(x)=1$ θα είναι προφανώς και $x=1$. Αλλά και αντιστρόφως αν είναι $x=1$ θα έχουμε
$$\ln g(x)=1-g(x)$$
που από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου ισχύει μόνο αν είναι $g(x)=1$. Αυτό διότι σύμφωνα με την εφαρμογή είναι $\ln g(x)\le g(x)-1$. Άρα
$$1-g(x)\le g(x)-1.$$
Δηλαδή $g(x)\ge 1$. Αν ήταν $g(x)>1$ στη σχέση $\ln g(x)=1-g(x)$ το α′ μέλος θα ήταν θετικό και το β′ μέλος αρνητικό (άτοπο). Άρα $g(x)=1$.

Επομένως $x = g(x) = 1$ και το κοινό σημείο θα είναι το $A(1,1)$.
Παρατηρηση Το ότι η εξίσωση $\ln A = 1 - A$ έχει μοναδική λύση την $A = 1$ μπορεί να αποδειχθεί αυτοτελώς με μελέτη κατά τα γνωστά.

5. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $g(x) - \frac{x+1}{2} \geq 0$. Ονομάζουμε

$$h(x) = g(x) - \frac{x+1}{2}$$

και έχουμε

$$h'(x) = g'(x) - \frac{1}{2} = \frac{g(x)}{1+g(x)} - \frac{1}{2} = \frac{g(x)-1}{1+g(x)}.$$

Άλλα είδαμε ότι $g(1) - 1$ και λόγω μονοτονίας της g θα είναι $g(x) < 1$ για $x < 1$ και $g(x) > 1$ για $x > 1$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο το $h(1) = g(1) - 1 = 0$. Επομένως $h(x) \geq 0$ για όλα τα x και το = ισχύει μόνο για $x = 1$.
Παρατηρηση Μία άλλη αντιμετώπιση είναι η ακόλουθη: Αφού η g είναι κυρτή η γραφική της παράσταση είναι πάνω από από κάθε εφαπτομένης της. Δηλαδή αν $y = px + q$ είναι οποιοαδήποτε εφαπτομένη της $\mathcal{C}_g$ τότε θα είναι $f(x) \geq px + q$. Η $\mathcal{C}_g$ διέρχεται από το $A(1,1)$ και η εφαπτομένη της σε αυτό είναι:

$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

που όπως εύκολα διαπιστώνεται είναι η

$$y = \frac{x+1}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Σχολικό έτος 2008-2009

10.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

10.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

1. Να εξετάσετε πότε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ είναι πραγματικός αριθμός.

2. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ είναι πραγματικός τότε και ο αριθμός $\frac{\alpha+\gamma i}{\beta+\delta i}$ είναι πραγματικός.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$\mathrm{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 5\mathrm{Re}\left(z\right) \tag{10.1}$$

1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν την (10.1).

2. (α′) Ποιοί από τους μιγαδικούς αριθμούς z που ικανοποιούν την (10.1) έχουν φανταστικό μέρος $\frac{1}{4}$;

   (β′) Να αποδείξετε ότι αν ο μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί την (10.1) και $w = 2^{2008}z^{2009}$ τότε ισχύει

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{w}\right) = 4\mathrm{Re}\left(w\right).$$

10.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Μέρος Α′ § 2.2 Β1
2. Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha-\beta i}{\gamma-\delta i}\Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)=(\gamma+\delta i)(\alpha-\beta i)\Leftrightarrow$$
$$\alpha\delta-\beta\gamma=0,$$

   και οι ισοδυναμίες

$$\frac{\alpha+\gamma i}{\beta+\delta i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{\alpha+\gamma i}{\beta+\delta i}=\frac{\alpha-\gamma i}{\beta-\delta i}\Leftrightarrow$$
$$(\alpha+\gamma i)(\beta-\delta i)=(\beta+\delta i)(\alpha-\gamma i)\Leftrightarrow$$
$$\alpha\delta-\beta\gamma=0$$

   Επομένως ισχύει και η

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{\alpha+\gamma i}{\beta+\delta i}\in\mathbb{R}$$

   από την οποία έπεται το αποδεικτέο.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Μέρος Α′ § 2.2 Β9 α)
2. (α′) Από την απάντηση στο ερώτημα 1. ξέρουμε ότι οι μιγαδικοί που ικανοποιούν την (10.1) είναι εκείνοι που οι εικόνες τους ανήκουν
   - Στον άξονα yy' εκτός του O.
   - Στον κύκλο $x^2+y^2=\frac{1}{4}$.

   Από τους μιγαδικούς της πρώτης περίπτωσης φανταστικό μέρος $\frac{1}{4}$ προφανώς έχει ο $\frac{1}{4}i$. Έστω $x+\frac{1}{4}i$ μιγαδικός της δεύτερης περίπτωσης με φανταστικό μέρος $\frac{1}{4}$. Θα είναι

$$x^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4},$$

   από την οποία βρίσκουμε $x=\pm\frac{1}{4}\sqrt{3}$. Επομένως μιγαδικοί αριθμοί της δεύτερης περίπτωσης με φανταστικό μέρος $\frac{1}{4}$ είναι οι $\pm\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}i$.

(β′) Αν η εικόνα του z ανήκει στον φανταστικό άξονα τότε, προφανώς ο w είναι της μορφής $w = \lambda i$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Τότε $\frac{1}{w} = -\frac{1}{\lambda}i$ οπότε $\mathrm{Re}(\frac{1}{w}) = 0 = \mathrm{Re} = 4\mathrm{Re}(w)$ και το αποδεικτέο ισχύει.
Αν η η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ τότε $|z| = \frac{1}{2}$ και επομένως θα είναι $z = \frac{1}{2}u$. Συγκεκριμένα $u = 2z$. Είναι

$$w = 2^{2008}\frac{1}{2^{2009}}u^{2009} = \frac{1}{2}u^{2009}$$

και

$$\frac{1}{w} = \frac{2}{u^{2009}} = \frac{2\overline{u}^{2009}}{u^{2009\overline{u}2009}} = \frac{2\overline{u}^{2009}}{|u|^{2009}} = 2\overline{u}^{2009}.$$

Άρα:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{w}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\overline{u}^{2009}\right) = 2\mathrm{Re}\left(u^{2009}\right)$$

και

$$4\mathrm{Re}\left(w\right) = 4\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(u^{2009}\right) = 2\mathrm{Re}\left(u^{2009}\right).$$

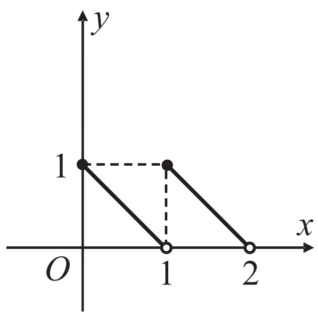
Επομένως πάλι το αποδεικτέο ισχύει.

10.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

10.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.
2. Να βρείτε:

   (α′) Το πεδίο ορισμού της f.

   (β′) Το σύνολο τιμών της f.

   (γ′) Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \sqrt{2} - 1$.

(δ′) Τα σημεία όπου η f είναι συνεχής.

(ε′) Την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

1. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x.

2. (α′) i. Να βρείτε για ποιές τιμές: του λ ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = -8$.

   ii. του μ ισχύει $\lim\limits_{x\to\mu^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

   (β′) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

10.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 1.2 Β1. i).

2. Από το διάγραμμα προκύπτουν οι ακόλουθες απαντήσεις:

   (α′) $[0,2)$

   (β′) $(0,1]$

   (γ′) 2

   (δ′) Όλα τα σημεία του $(0,1) \cup (1,2)$.

   (ε′) Μέγιστη: 1 Ελάχιστη: δεν υπάρχει.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 1.8 Α9. i).

2. Έχουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1).$$

   (α′) i. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\lambda^3x^3 + 2\lambda^2x^2 - \lambda x - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\lambda^3x^3}{x^3} = \lambda^3,$$

   επομένως θέλουμε $\lambda^3 = -8$ από την οποία προκύπτει $\lambda = -2$.

ii. Είναι
$$\lim_{x\to\mu^+}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to\mu^+}\frac{1}{(x-1)(x+2)(x+1)}.$$
Για τις τιμές $\mu\neq -2,\ -1,\ 1$ το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός. Εξετάζουμε τις τιμές $-2,\ -1,\ 1$. Διαπιστώνουμε εύκολα, λαμβάνοντας υπ' όψιν και το πρόσημο της f ότι το όριο για αυτές τις τιμές του μ είναι $+\infty, -\infty, +\infty$. Επομένως $\mu=-2,\ 1$.

(β′) Για να έχουν οι $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ έχουν κοινό σημείο πρέπει η εξίσωση $g(x)=f(x)$ να έχει λύση. Ονομάζουμε $h(x)=g(x)-f(x)$ και θα αποδείξουμε ότι η h έχει ρίζα.

- Για $x<0$ αφού η g είναι φθίνουσα θα είναι $g(x)>g(0)$ και επομένως $g(x)-f(x)>g(0)-f(x)$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(0)-f(x))=\lim\limits_{x\to-\infty}(-f(x)+g(0))=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left(x^3+2x^2-x-2\right)+g(0)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$. Επομένως υπάρχει x_1 ώστε $g(0)-f(x_1)>0$. Θα είναι τότε $h(x_1)=g(x_1)-f(x_1)>g(0)-f(x_1)>0$.
- Για $x>0$ αφού η g είναι φθίνουσα θα είναι $g(x)<g(0)$ και επομένως $g(x)-f(x)<g(0)-f(x)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(0)-f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x)+g(0))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left(x^3+2x^2-x-2\right)+g(0)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$. Επομένως υπάρχει x_2 ώστε $g(0)-f(x_2)<0$. Θα είναι τότε $h(x_2)=g(x_2)-f(x_2)<g(0)-f(x_2)<0$.

Προφανώς θα είναι $x_1\neq x_2$. Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και παίρνει ετερόσημες τιμές στα x_1,x_2 και επομένως απο το θεώρημα του Bolzano έχει ρίζα στο διάστημα με άκρα τα x_1,x_2.

10.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

10.3.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ ορίζουμε $T(z)=-2\bar{z}+i$.

1. Να βρείτε για ποιά u ισχύει $T(u)=1$.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z_1,z_2 ισχύει $|T(z_1+z_2)|\leq 2(|z_1|+|z_2|)+1$.

7 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι αν $|w| = 1$ τότε $T\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = T(w)$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{Re}(iz) = 1$. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του $T(z)$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x-1)(x-2)$.

1. Να αποδείξετε οτι για κάθε x ισχύει

   (α′) $f(1-x) = -f(1+x)$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) $f'(1-x) = f'(1+x)$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Αν $g(x) = \sqrt{x}$ και $h = g \circ f$

   (α′) Να ορίσετε την συνάρτηση h.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) + \eta\mu x)$.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τέτοια ώστε το σημείο $A(1,1)$ να ανήκει στην γραφική της παράσταση.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) > 0$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} + 2$, $x \in (0,1)$.

   (α′) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

8 Μοναδες

(β′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

7 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + 2f(x)$$

έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x - 1|$. Έστω P το σημείο τομής P της $\mathcal{C}_f$ με τον άξονα των $x'x$.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του P.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η $\mathcal{C}_f$ έχει εφαπτομένη σε όλα τα σημεία της εκτός από το P.

6 Μοναδες

3. Έστω $0 < x_0 < \frac{1}{e}$ και $T(x_0, f(x_0))$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο T. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ η οποία είναι κάθετη στην (ε).

9 Μοναδες

4. Μεταβλητή ευθεία $y = c$, $c > 0$ τέμνει την $\mathcal{C}_f$ σε δύο σημεία A, B. Έστω M το μέσο του AB. Να εκφράσετε την τεταγμένη του M ως συνάρτηση της τετμημένης του M.

5 Μοναδες

10.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. $T(z) = 1 \Leftrightarrow -2\bar{z} + i = 1 \Leftrightarrow 2\bar{z} = -1 + i \Leftrightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

2. Έχουμε:
$|T(z_1 + z_2)| = |-2(\overline{z_1 + z_2}) + i| \leq |-2(\overline{z_1 + z_2})| + |i| = 2|z_1 + z_2| + 1 \leq 2(|z_1| + |z_2|) + 1$

3. Είναι $T\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = -2\left(\overline{\frac{1}{\bar{w}}}\right) + i = -2\left(\frac{1}{w}\right) + i = -2\left(\frac{\bar{w}}{w\bar{w}}\right) + i = -2\left(\frac{\bar{w}}{1}\right) + i = -2\bar{w} + i = T(w)$ *Αλλιώς* Είναι $\frac{1}{\bar{w}} = w$ και επομένως $T\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = T(w)$.

4. Ονομάζουμε $z = \kappa + \lambda i$ και $T(z) = x + yi$. Είναι $i(\kappa + \lambda i) = -\lambda + \kappa i$ και επομένως $\mathrm{Re}(iz) = 1$ αν και μόνο αν $\lambda = -1,\ \kappa \in \mathbb{R}$
Επομένως
$x + yi = T(z) \Leftrightarrow x + yi = -2(\kappa - \lambda i) + i \Leftrightarrow x + yi = -2\kappa + (2\lambda + 1)i \Leftrightarrow x = -2\kappa,\ \ y = 2\lambda + 1 \Leftrightarrow x = -2\kappa,\ \ y = 2(-1) + 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ y = -1$. Αυτό σημαίνει ότι ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του $T(z)$ είναι η ευθεία $y = -1$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. (α′) Είναι

$$f(1-x) =$$
$$(1-x)((1-x)-1)((1-x)-2) =$$
$$(1-x)(-x)(-x-1) =$$
$$4(1-x)(-x)(-x-1) =-(x-1)x(x+1) =-(x+1)x(x-1) =4$$
$$-(x+1)((x+1)-1)((x+1)-2) =$$
$$-(x+1)((x+1)-1)((x+1)-2) =$$
$$-f(x+1)$$

   (β′) Αποδείξαμε ότι $f(1-x) = -f(x+1)$. Και τα δύο μέλη της ισότητας αυτής είναι συνθέσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων άρα συναρτήσεις παραγωγίσιμες. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:
   $f'(1-x) \cdot (1-x)' = -f'(x+1) \cdot (x+1)'$
   δηλαδή
   $-f'(1-x) = -f'(x+1)$
   άρα
   $f'(1-x) = f'(x+1)$

2. Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(1) = 0$ επομένως η f αντιστοιχίζει ίσες τιμές σε δύο διαφορετικούς αριθμούς. Άρα δεν είναι 1-1

3. (α′) Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της $h = g \circ f$. Έχουμε:
$x \in \mathcal{D}_{g\circ f} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathcal{D}_f \\ \text{και} \\ f(x) \in \mathcal{D}_g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ Για να λύσουμε την ανίσωση $f(x) \geq 0$ ή καταφύγουμε σε ένα πινακάκι όπου τοποθετούμε τους παράγοντες x, $x-1$, $x-2$ είτε εξετάζουμε την μεταβολή προσήμου της f. Η συνεχής f έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1, 2 και σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Το πρόσημο αυτό βρίσκεται δοκιμάζοντας τιμές στην f, μία από κάθε διάστημα λ.χ. τις $-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3$. Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο βρίσκουμε ότι το πρόσημο της f σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά είναι αντιστοίχως $-,+,-,+$. Άρα η ανίσωση $f(x) \geq 0$ έχει σύνολο λύσεων το $(0,1] \cup [2,+\infty)$. Αυτό το σύνολο είναι και το πεδίο ορισμού της h.
Βρίσκουμε και ένα τύπο της f. Είναι: $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x(x-1)(x-2)}$

(β′) Για $x > 2$ είναι

$$h(x) + \eta\mu x = h(x)\left(1 + \frac{\eta\mu x}{h(x)}\right) \quad (*)$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x(x-1)(x-2)} = +\infty$.
Έχουμε ακόμη ότι $-\frac{1}{|h(x)|} \leq \frac{\eta\mu x}{h(x)} \leq \frac{1}{|h(x)|}$. Επομένως αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{|h(x)|} = 0$ από το κριτήριο της παρεμβολής συνάγουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{h(x)} = 0$.
Επομένως το β′ μέλος της $(*)$ όριο $+\infty$. Άρα θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} (h(x) + \eta\mu x) = +\infty$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(1) = 1$. Για $x \in [0,1]$ είναι $x \leq 1$ και λόγω μονοτονίας θα είναι $f(x) \geq f(1) = 1$. Ιδιαιτερως θα είναι $f(x) \geq 0$.

2. (α′) Θεωρούμε $x_1, x_2 \in (0,1]$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε
$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1) \geq f(x_2) \\ \frac{1}{x1} > \frac{1}{x2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f(x_1)} \leq \frac{1}{f(x_2)} \\ -\frac{1}{x1} < -\frac{1}{x2} \end{array} \right\} \underset{(+)}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{x_1} < \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{x2} \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{x_1} + 2 < \frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{x2} + 2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

(β′) Η g είναι μία γνησίως αύξουσα και συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι το ανοικτό διάστημα με άκρα τα όρια της g στα 0, 1. Έχουμε

- $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} + 2\right) = -\infty$
διότι $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)} \in \mathbb{R}$ (αφού η f είναι συνεχής στο 0) και $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{x}+2\right)=\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{1}+2=2$ όπου πάλι χρησιμοποιήθηκε η συνέχεια της f αυτή τη φορά στο 1 και το γεγονός ότι $f(1)=1$.

Επομένως το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,2)$.

3. Έχουμε
$\frac{f(x)}{x}=1+2f(x)\Leftrightarrow f(x)=x+2xf(x)\Leftrightarrow$
$x+2xf(x)-f(x)=0\Leftrightarrow_{(\text{διαιρούμε δια } xf(x))}\frac{1}{f(x)}+2-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow g(x)=0$
Αλλά η g έχει ρίζα αφού το σύνολο τιμών της περιέχει το 0 η οποία λόγω της μονοτονίας της g είναι μοναδική. Επομένως και η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.

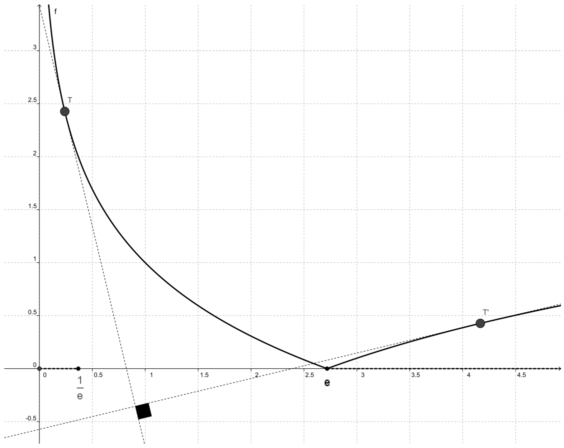
ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Ζητάμε τα σημεία της $\mathcal{C}_f$ με τετμημένη 0. Έχουμε
$f(x)=0\Leftrightarrow|\ln x-1|=0\Leftrightarrow\ln x-1=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$ Επομένως είναι $P(e,0)$.

2. Η f είναι σύνθεση της παραγωγίσιμης συνάρτησης $\ln x-1$ που ορίζεται στο $(0,+\infty)$ και της $|x|$ που παραγωγίζεται σε κάθε πραγματικό αριθμό εκτός του 0. Επομένως η f παραγωγίζεται σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της $(0,+\infty)$ εκτός ίσως εκείνου που μηδενίζεται η $\ln x-1$ δηλαδή του e. Ελέγχουμε αν παραγωγίζεται στο e. Έχουμε $\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=$ $\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{1-\ln x}{x-e}=-\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=-\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}$. Το τελαυτίο όριο είναι η παράγωγος της $\ln x$ στο e δηλαδή ίσο με $\frac{1}{e}$. Επομένως: $\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=$ $-\frac{1}{e}$. Όμοια: $\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}=$ $\frac{1}{e}$
Αφού τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής της f στο e είναι δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί η f δεν παραγωγίζεται στο e και επομένως δεν έχει εφαπτομένη στο P.

3. Είναι
$$f(x)=\begin{cases}1-\ln x & 0<x<e\\ \ln x-1 & x\geq e\end{cases}$$
και
$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & 0<x<e\\ \frac{1}{x} & x>e\end{cases}$$
Ας υποθέσουμε ότι $0<x_0<e$. Η εφαπτομένη (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο T έχει συντελεστή διευθύνσεως $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0}$. Ζητάμε σημείο της $\mathcal{C}_f$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι κάθετη στην $\mathcal{C}_f$ δηλαδή να έχει συντελεστή διευθύνσεως $x_0>0$. Προφανώς θα αντιστοιχεί στο σημείο με τετμημένη

$\frac{1}{x_0}$ και πρέπει να είναι $\frac{1}{x_0} > e$. Δηλαδή θα πρέπει να είναι και $x_0 < \frac{1}{e}$ που ισχύει.



4. Βρίσκουμε τα σημεία τομής της $y = c$ με την $\mathcal{C}_f$ λύνοντας την εξίσωση $f(x) = c$. Είναι $f(x) = c \Leftrightarrow |\ln x - 1| = c \Leftrightarrow \ln x - 1 = \pm c \Leftrightarrow \ln x = 1 \pm c \Leftrightarrow x = e^{1\pm c}$. Επομένως έχουμε δύο κοινά σημεία τα $A\left(e^{1-c}, c\right), B\left(e^{1+c}, c\right)$. Το μέσο του AB είναι το $M\left(\frac{e^{1-c}+e^{1+c}}{2}, c\right)$. Αν ονομάσουμε x την τετμημένη του και y την τεταγμένη του είναι $y = c > 0$ και επομένως

$$x = \frac{e^{1-y} + e^{1+y}}{2}$$

Έχουμε $x = \frac{e^{1-y}+e^{1+y}}{2} \Leftrightarrow \frac{e}{e^y} + e \cdot e^y = 2x \Leftrightarrow_{(u=e^y>1)} \Leftrightarrow \frac{e}{u} + eu = 2x \Leftrightarrow eu^2 - 2xu + e = 0$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $u = \frac{x \pm \sqrt{x^2-e^2}}{e}$ και $x \geq e$. Θέλουμε $u > 1$ και οι ρίζες που βρήκαμε είναι αντίστροφες διότι η $eu^2 - 2xu + e = 0$ έχει ρίζες με γινόμενο 1. Επομένως μεγαλύτερη της μονάδας είναι η μεγαλύτερη δηλαδή η $u = \frac{x+\sqrt{x^2-e^2}}{e}$. Συνεπώς $e^y = \frac{x+\sqrt{x^2-e^2}}{e}$ από την οποία προκύπτει

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - e^2}\right) - 1$$

10.4 Διαφορικός Λογισμός.

10.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x}$$

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.
2. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

1. (α′) Να βρείτε την $f'(0)$.

   (β′) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$
3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f.

10.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 2.9 Β2 i).
2. Είναι $f''(x) = \frac{2-4x\ln 2+x^2\ln^2 2}{2^x}$. Το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου είναι το ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $\left(\ln^2 2\right)x^2 - (4\ln 2)x + 2$ που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}$ και $\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}$. Η f στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}\right]$ είναι κυρτή, στο $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, \frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}\right]$ κοίλη και στο $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}, +\infty\right)$ είναι κυρτή. Σημεία καμπής είναι τα $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}\right)\right)$, $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}, f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}\right)\right)$,

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 2.3 Β11.
2. (α′) Είναι $g'(x) = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$. Η g' έχει στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ μοναδική ρίζα το $\frac{\pi}{4}$ και επομένως, αφού είναι συνεχής, στα διαστήματα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ διατηρεί πρόσημο. Είναι $g'(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\left(\sqrt{3}-1\right) > 0$ και $g'(\frac{\pi}{2}) = -e^{\frac{\pi}{2}} < 0$. Επομένως η συνάρτηση g είναι

   - γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.
   - γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

   (β′) Θεωρούμε την συνάρτηση $h : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \eta\mu x$. Η h είναι γνησίως αύξουσα αφού το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, συνεχής και το σύνολο τιμών της είναι το $(-1, 1)$. Επίσης αν $h(x_1) < h(x_2)$ τότε θα είναι $x_1 < x_2$. Πράγματι:

Αν ήταν $x_1 = x_2$ τότε θα είχαμε $h(x_1) = h(x_2)$ δηλαδή $t_1 = t_2$ (άτοπο)

Αν ήταν $x_1 > x_2$ τότε αφού η h είναι γνησίως αύξουσα θα είχαμε $h(x_1) > h(x_2)$ δηλαδή $t_1 > t_2$ (άτοπο).

Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)}$$

Επίσης για όλα τα $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$\boxed{f(h(x)) = g(x)}$$

Τώρα αν $t_1 < t_2$ από το $(-1, 1)$ με $t_1 = h(x_1)$, $t_2 = h(x_2)$ τότε:

- Αν είναι $-1 < t_1 < t_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ θα είναι $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{4}$ και επομένως $g(x_1) < g(x_2)$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι $f(\text{ημ}x_1) < f(\text{ημ}x_2)$ δηλαδή $f(t_1) < f(t_2)$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- Αν είναι $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t_1 < t_2 < 1$ θα είναι $\frac{\pi}{4} \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ και επομένως $g(x_1) > g(x_2)$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι $f(\text{ημ}x_1) > f(\text{ημ}x_2)$ δηλαδή $f(t_1) > f(t_2)$ και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

10.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

10.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι:

$\int_1^4 f(x)dx = 9$ $\quad\quad$ $\int_3^4 f(x)dx = 11$ και $\quad\quad$ $\int_1^8 f(x)dx = 13$

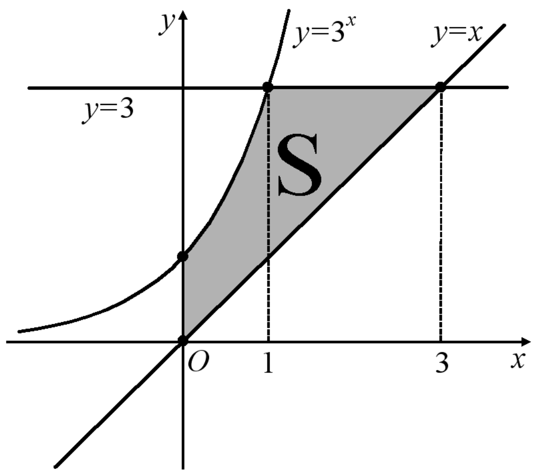
1. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

   (α′) $\int_4^3 f(x)dx$ $\quad\quad$ (β′) $\int_4^8 f(x)dx$

2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 f(3x+1)\,dx$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου S του σχήματος:



2. Για την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2-16}, \quad x \in [0,2]$$

δίνεται ότι:

- Η $\mathcal{C}_f$ διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(2,3)$
- Η $\mathcal{C}_f$ περιέχεται στο χωρίο S του ερωτήματος 1.

Να βρείτε τα εμβαδά των χωρίων στα οποία η C_f χωρίζει το S.

10.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.4 Α1.

2. Στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(3x+1)\,dx$ θετουμε $3x+1=u$ οπότε $\frac{1}{3}du = dx$ και για τα άκρα έχουμε:

x	u
0	1
1	4

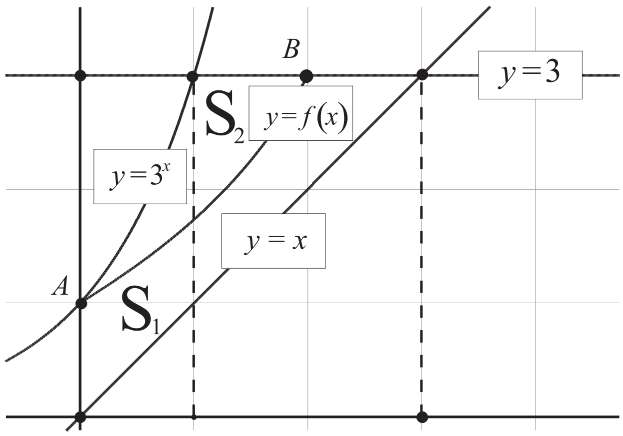
επομένως:
$\int_0^1 f(3x+1)\,dx = \int_1^4 \frac{1}{3} f(u)\,du = \frac{1}{3}\int_1^4 f(u)\,du = \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{9}{3} = 3$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.7 Β6.

2. Βρίσκουμε πρωτα τα a, b. Έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(2)=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a\cdot 0+b}{0^2-16}=1 \\ \dfrac{a\cdot 2+b}{2^2-16}=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a=-16 \\ b=-10 \end{array}\right\}$$



Επομένως $f(x)=\frac{-10x-16}{x^2-16}$. Επειδή θα χρειασθεί να ολοκληρώσουμε την f την αναλύουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων δηλαδή βρίσκουμε A, B ώστε

$$\frac{-10x-16}{x^2-16}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+4}$$

δηλαδή

$$-10x-16=A(x+4)+B(x-4)$$

Δίνοντας στο x τις τιμές 0 και 1 έχουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} 4A-4B=-16 \\ 5A-3B=-26 \end{array}\right\}$$

από το οποίο βρίσκουμε $A=-7$ και $B=-3$. Επομένως $f(x)=-\frac{7}{x-4}-\frac{3}{x+4}$ και τα ζητούμενα εμβαδά είναι

$$S_1=\int_0^2\left(-\frac{7}{x-4}-\frac{3}{x+4}-x\right)dx+\int_2^3(3-x)\,dx=10\ln 2-3\ln 3-\frac{3}{2}$$

$$S_2=\int_0^1\left(3^x+\frac{7}{x-4}+\frac{3}{x+4}\right)dx+\int_1^2\left(3+\frac{7}{x-4}+\frac{3}{x+4}\right)dx=\frac{2}{\ln 3}+3\ln 3-10\ln 2+3$$

Δοκιμη $\left(10\ln 2-3\ln 3-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{2}{\ln 3}+3\ln 3-10\ln 2+3\right)=\frac{3}{2}+\frac{2}{\ln 3}$

10.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

10.6.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Ν.Σ. Μαυρογιάννης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

1. Να μελετηθεί η f:

   (α′) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) ως προς τα κοίλα και τα κυρτά.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρεθεί συνάρτηση $F : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $F(2) = 0$ και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi(x) = 2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + x^2$$

1. Να αποδειχθεί ότι

$$\varphi'(0) = \varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \varphi''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της φ.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της φ.

5 Μοναδες

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ώστε

$$\varphi''(\xi_1) = 0$$

5 Μοναδες

5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi_2 \in (-\pi, \pi)$ ώστε

$$\varphi'(\xi_2) = 2$$

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + \frac{4}{x}, \qquad x > 0$$

Έστω $\lambda > 0$. Συμβολίζουμε με $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

- την γραφική παράσταση της f
- τον άξονα $x'x$
- τις ευθείες $x = \lambda$, $x = \lambda + 1$

1. Να αποδείξετε ότι

$$E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$$

9 Μοναδες

2. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

10 Μοναδες

3. (α′) Υπάρχει τιμή του λ ώστε $E(\lambda) = 6$;

   (β′) Υπάρχει τιμή του λ ώστε $E(\lambda) = 5$;

6 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Θεωρούμε $\alpha > 0$ και την συνάρτηση

$$F(x) = \int_{e^{\alpha}}^{e^{\alpha x}} \left(\ln t - \frac{1}{\ln t}\right) dt$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της F.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την παράγωγο F' της F.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Δίνεται ότι υπάρχει του τιμή $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει

   $$F(x) \geq 0 \quad \text{για όλα τα} \quad x > 0 \quad (1)$$

   (α′) Βρείτε ποια είναι η τιμή του α για την οποία ισχύει η (1)

   9 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Να αποδείξετε ότι $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{\ln t} dt < e^2$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

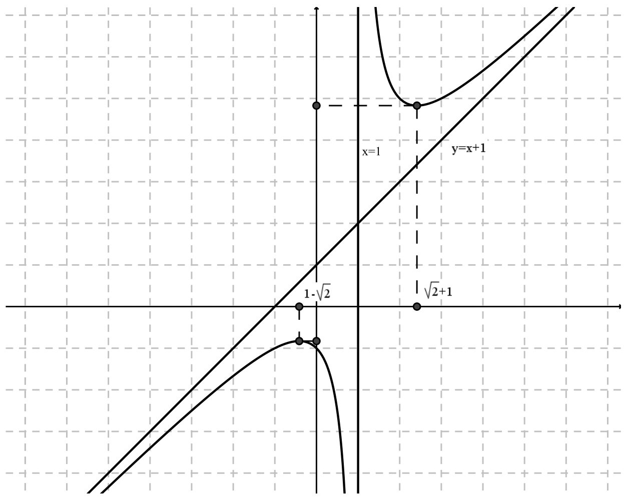
10.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. (α′) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Παραγωγίζοντας την f στο $\mathcal{D}_f$ βρίσκουμε: $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. Επομένως στα διαστήματα $\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right]$, $\left[\sqrt{2}+1, +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ στα $\left[1-\sqrt{2}, 1\right)$, $\left[1, \sqrt{2}+1\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Εκατέρωθεν των $1-\sqrt{2}$ και $\sqrt{2}+1$ η f αλλάζει μονοτονία. Στο $1-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(1-\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}+2$ και στο $\sqrt{2}+1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\sqrt{2}+1\right) = 2\sqrt{2}+2$. Επειδή στα $\mp\infty$ το όριο της f είναι $\mp\infty$ τα δύο αυτά ακρότατα είναι τοπικά.

   (β′) Παραγωγίζοντας άλλη μία φορά την f βρίσκουμε ότι $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική στο $(-\infty, 1)$ και σε αυτό το διάστημα η f είναι κοίλη και είναι θετική στο $(1, +\infty)$ στο οποίο διάστημα η f είναι κυρτή.

2. **A)** Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και επομένως αν $\mathcal{C}_f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο αυτή θα είναι στο σημαίο 1. Πράγματι έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$. Η γνώση ενός και μόνο από τα δύο αυτά όρια μας επιτρέπει να συναγάγουμε ότι η $\mathcal{C}_f$έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την $x = 1$. Β) Για να δούμε αν η $\mathcal{C}_f$ έχει ασύμπτωτο στο $+\infty$ υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)x} = 1 = \alpha$ και μετά το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 = \beta$. Επομένως η $\mathcal{C}_f$ έχει στο $+\infty$ την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ δηλαδή την $\boxed{y = x + 1}$
Εργαζόμενοι ανάλογα βρίσκουμε ότι στο $-\infty$ η $\mathcal{C}_f$ έχει ασύμπτωτο πάλι την $\boxed{y = x + 1}$.
Η γραφική παράσταση της f (δεν ζητήθηκε) είναι η εξής:



3. Για να βρούμε την F αρκεί να ολοκληρώσουμε την f στο διάστημα $\int f(x)\,dx = \int \frac{x^2+1}{x-1}dx =_{x-1=u} \int \frac{(u+1)^2+1}{u}du = \int \left(u + 2 + \frac{2}{u}\right)du = \frac{1}{2}u^2 + 2u + 2\ln u + c =_{u=x-1} \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} + 2\ln(x-1) + c$
Άρα $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} + 2\ln(x-1) + c$ και για να βρούμε το c δίνουμε στην F την τιμή 2 οπότε βρίσκουμε την εξίσωση $F(2) = \frac{5}{2} + c$ από την οποία έχουμε $c = -\frac{5}{2}$. Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 + 2\ln(x-1)}$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Παραγωγίζουμε και βρίσκουμε

$$\varphi'(x) = 2x\eta\mu x + 2x = 2x(\eta\mu x + 1)$$

$$\varphi''(x) = 2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2(\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x + 1)$$

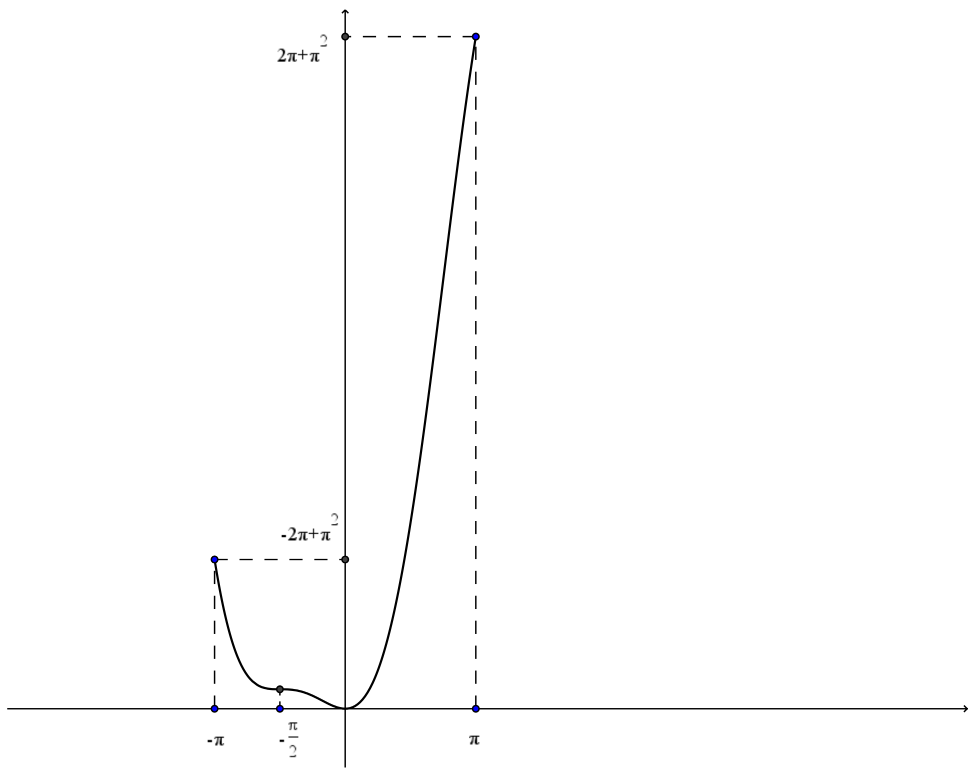
Η αποδεικτέα προκύπτει με απλή αντικατάσταση.

2. Είναι $\varphi'(x) = 2x(\eta\mu x + 1)$. Παρατηρούμε ότι ναι μεν η φ' μηδενίζεται στα $0, -\frac{\pi}{2}$ αλλά μόνο εκατέρωθεν του 0 αλλάζει πρόσημο. Συγκεκριμένα η είναι αρνητική στο $[-\pi, 0)$ και θετική στο $(0, \pi]$. Η φ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$. Η ελάχιστη τιμή της φ είναι η $\varphi(0) = 0$.

3. Από την μονοτονία της φ, (αφού είναι συνεχής) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της θα είναι ή ένωση των διαστημάτων $\varphi([-\pi, 0]) = \left[0, -2\pi + \pi^2\right]$ και $\varphi([0, \pi]) = \left[0, 2\pi + \pi^2\right]$. Επειδή είναι $2\pi + \pi^2 > -2\pi + \pi^2$ το $\left[0, -2\pi + \pi^2\right]$ περιέχεται στο $\left[0, 2\pi + \pi^2\right]$ και επομένως η ένωση είναι το $\left[0, 2\pi + \pi^2\right]$ που θα είναι και το σύνολο τιμών της φ. Άρα η μέγιστη τιμή της φ είναι $2\pi + \pi^2$.

4. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle για την φ' στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

5. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του μέσης τιμής για την φ στο $(-\pi, \pi)$.

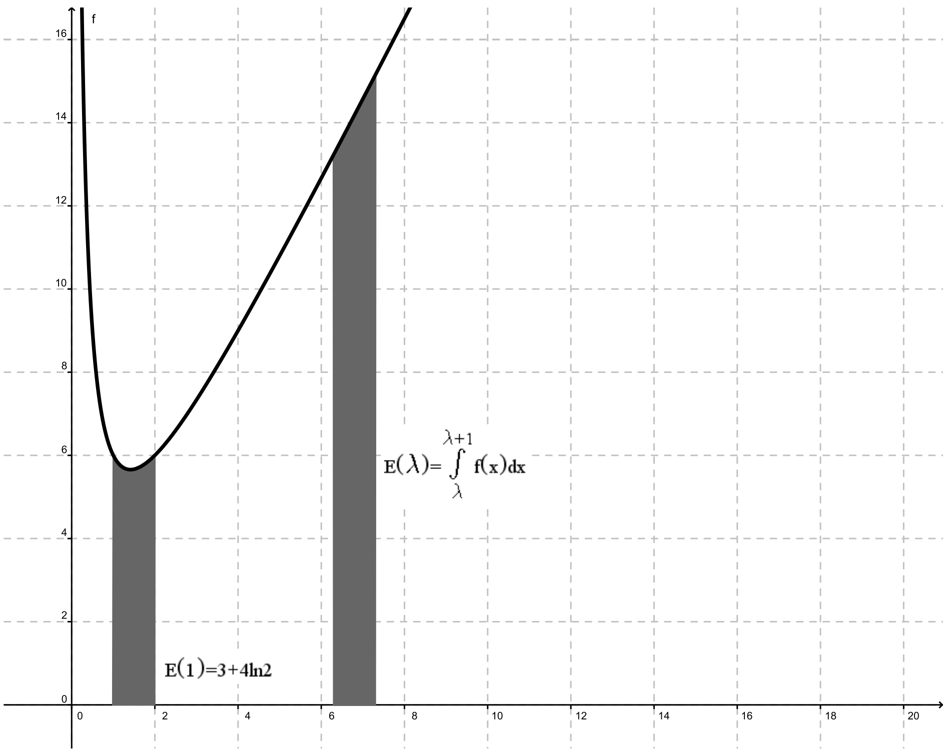


ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Στο διάστημα $[\lambda, \lambda + 1]$ είναι $f(x) > 0$ και επομένως το εμβαδόν $E(\lambda)$ είναι $E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1} f(x)\,dx$ Μία παράγουσα της f είναι η $\Phi(x) = 2x + 4\ln x$ και επομένως:

$E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\lambda+1} f(x)\,dx = \int_{\lambda}^{\lambda+1}\left(2x + \frac{4}{x}\right)dx = \left[\Phi(x)\right]_{\lambda}^{\lambda+1} = \left[x^2 + 4\ln x\right]_{\lambda}^{\lambda+1} = (\lambda+1)^2 + 4\ln(\lambda+1) - \lambda^2 - \ln\lambda = 2\lambda + 1 + 4\ln(\lambda+1) - 4\ln\lambda = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$

2. Η $E(\lambda)$ ορίζεται στο $(0, +\infty)$. Είναι $E'(\lambda) = (\Phi(\lambda+1) - \Phi(\lambda))' = f(\lambda+1) - f(\lambda) = 2 + \frac{4}{\lambda+1} - \frac{4}{\lambda} = \frac{2(\lambda+2)(\lambda-1)}{(\lambda+1)\lambda}$. Επομένως η παράγωγος $E'(\lambda)$ είναι αρνητική στο $(0,1)$ και θετική στο $(1,+\infty)$. Άρα η $E(\lambda)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Συμπεραίνουμε ότι η $E(\lambda)$ έχει ελάχιστο για $\lambda = 1$.



3. Η ελάχιστη τιμή του $E(\lambda)$ είναι $E(1) = 3 + 4\ln 2$. Επειδή $\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = +\infty$ το σύνολο τιμών της $E(\lambda)$ είναι $[3 + 4\ln 2, +\infty)$. Για να δούμε αν το εμβαδόν παίρνει μία συγκεκριμένη τιμή πρέπει να συγκρίνουμε την τιμή αυτή με το $3 + 4\ln 2$. Αν η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη η ίση του $3 + 4\ln 2$ τότε είναι τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν. Αν είναι μικρότερη τότε πρόκειται για τιμή που δε μπορεί να πάρει το εμβαδόν.

   (α′) Είναι $6 \geq 3 + 4\ln 2 \Leftrightarrow 3 \geq 4\ln 2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \geq \ln 2 \Leftrightarrow e^{\frac{3}{4}} \geq e^{\ln 2} \Leftrightarrow e^{\frac{3}{4}} \geq 2 \Leftrightarrow e^3 \geq 2^4 \Leftrightarrow 19, \ldots \geq 16$ (ισχύει). Επομένως το 6 μπορεί να είναι τιμή του εμβαδού.

(β′) Είναι $5 \ge 3 + 4\ln 2 \Leftrightarrow 2 \ge 4\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge \ln 2 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \ge e^{\ln 2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \ge 2 \Leftrightarrow e \ge 2^2$ (δεν ισχύει). Επομένως το 5 δε μπορεί να είναι τιμή του εμβαδού.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Το πεδίο ορισμού του ολοκληρωτέου $\ln t - \frac{1}{\ln t}$ είναι το $(0,1) \cup (1,+\infty)$. Το A θα απαρτίζεται από εκείνα τα x για τα οποία:

   - τά άκρα ολοκλήρωσης e^{α}, $e^{\alpha x}$ ορίζονται και
   - ανήκουν και τα δύο σε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,+\infty)$.

   Επειδή $\alpha > 0$ είναι $e^{\alpha} > 1$ και επομένως ήδη το άκρο e^{α} ανήκει στο $(1,+\infty)$. Επομένως πρέπει και το άλλο άκρο $e^{\alpha x}$ να ανήκει στο $(1,+\infty)$. Άρα πρέπει $e^{\alpha x} > 1$ δηλαδή $\alpha > 0$. Το πεδίο ορισμού της F θα είναι το $A = (0,+\infty)$.

2. Είναι $F'(x) = \left(\ln\left(e^{\alpha x}\right) - \frac{1}{\ln(e^{\alpha x})}\right)\left(e^{\alpha x}\right)' = \left(\alpha x - \frac{1}{\alpha x}\right)\alpha e^{\alpha x} = \frac{(\alpha x-1)(\alpha x+1)e^{\alpha x}}{x}$

3. (α′) Επειδή $F(1) = 0$ το α θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να ισχύει:

   $$F(x) \ge F(1)$$

   Επομένως θα πρέπει η παραγωγίσιμη συνάρτηση F να παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο 1 του πεδίου ορισμού της. Από το θεώρημα του Fermat θα είναι $F'(1) = 0$. Άρα πρέπει: $\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)e^{\alpha}}{1} = 0$ από την οποία συνάγουμε ότι, αφού $\alpha > 0$, ότι πρέπει $\boxed{\alpha = 1}$

   (β′) Αφού η (1) ισχύει για $\alpha = 1$ θα είναι $\int_e^{e^x}\left(\ln t - \frac{1}{\ln t}\right)dt \ge 0$ για όλα τα $x > 0$. Επομένως θα ισχύει και για $x = 2$:

   $$\int_e^{e^2}\left(\ln t - \frac{1}{\ln t}\right)dt \ge 0$$

   Άρα: $\int_e^{e^2}\ln t dt - \int_e^{e^2}\frac{1}{\ln t}dt \ge 0$ και επομένως

   $$\int_e^{e^2}\ln t dt \ge \int_e^{e^2}\frac{1}{\ln t}dt \quad (*)$$

   Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_e^{e^2}\ln t dt$ και βρίσκουμε $\int_e^{e^2}\ln t dt = e^2$ οπότε αντικαθιστώντας στην (*) έχουμε:

   $$\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln t}dt \le e^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Σχολικό έτος 2009-2010

11.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

11.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z| = 1$. Θεωρούμε του μιγαδικούς w με $w = 2z+1$.

1. Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w.
2. Ποιός απότους μιγαδικούς w έχει ελάχιστο μέτρο;

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ και $z_1 z_2 \neq -1$. Έστω $z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$. Να αποδείξετε ότι:

1. Ο z είναι πραγματικός.
2. Οι εικόνες των z_1, z_2, z είναι σημεία συνευθειακά.

11.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α′ Μέρος § 2.3 Α8.
2. Από την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί w ανήκουν στον κύκλο $|w-1| = 2$ του οποίου το κέντρο είναι το σημείο $K(1,0)$. Ζητάμε να βρούμε ποιό σημείο του κύκλου αυτού απέχει από την αρχή των αξόνων ελάχιστη απόσταση. Το σημείο αυτό θα ανήκει στην ευθεία που συνδέει την αρχή των αξόνων με το κέντρο του κύκλου δηλαδή στην ευθεία $y = 0$. Υπάρχουν δύο κοινά σημεία τα $A(-1,0)$ και $B(3,0)$. Από τα δύο ελάχιστη απόσταση (ίση με 1) απέχει το A που αντιστοιχεί στον μιγαδικό αριθμό $w = -1$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α΄ Μέρος § 2.2 Β8 β).

2. Για να είναι οι εικόνες Α, Β, Γ των μιγαδικών z_1, z_2, z σημεία συνευθειακά πρέπει και αρκεί τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ να είναι παράλληλα. Αν οι z_1, z_2 συμπίπτουν τότε και τα Α, Β συμπίπτουν οπότε έχουμε τελικά δύο σημεία τα οποία φυσικά είναι συνευθειακά. Αν τώρα τα z_1, z_2 είναι διάφορα τότε και τα σημεία Α, Β είναι διαφορετικά. Για να είναι τα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ να παράλληλα πρέπει να υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

Η παραπάνω σχέση ισοδυναμεί με την

$$z - z_1 = \lambda\left(z_2 - z_1\right)$$

Έχουμε τώρα τις ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \text{Θα υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \text{ τέτοιος ώστε } z - z_1 = \lambda\left(z_2 - z_1\right) &\Leftrightarrow \\ \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \\ \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} & \qquad (11.1) \end{aligned}$$

Αλλά: $\overline{\frac{z-z_1}{z_2-z_1}} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = \frac{\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = \frac{\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1} = \frac{\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}}-\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}} = \frac{\frac{\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}}{\frac{z_1z_2+1}{z_1z_2}}-\frac{1}{z_1}}{\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}} =$ $\frac{\frac{z_1+z_2}{z_1z_2+1}-\frac{1}{z_1}}{\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}} = \frac{\frac{z_1^2+z_1z_2-z_1z_2-1}{(z_1z_2+1)z_1}}{\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}} = \frac{\frac{z_1^2-1}{(z_1z_2+1)z_1}}{\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}} = \frac{\left(z_1^2-1\right)z_2}{(z_1-z_2)(z_1z_2+1)}$ και ακόμη $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} =$ $\frac{\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}-z_1}{z_2-z_1} = -\frac{z_2(z_1-1)(z_1+1)}{(z_1z_2+1)(z_2-z_1)} = \frac{\left(z_1^2-1\right)z_2}{(z_1-z_2)(z_1z_2+1)}$ άρα η (11.1) ισχύει.

11.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

11.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right) = \frac{1+x}{1-x}$

1. Να βρείτε για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

2. (α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

(β΄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \neq \pm 1$ ισχύει $f^{-1}(x) = \frac{-1}{f(x)}$

(γ΄) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + f^{-1}(x) \right)$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ που πληρούν τις σχέσεις

$$f(0) < g(0) \ \text{ και } \ f(1) > g(1)$$

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστος ξ τέτοιος ώστε

$$\xi \in (0,1) \ \text{ και } \ f(\xi) = g(\xi) \tag{11.2}$$

2. Υποθέτουμε ότι για ένα αριθμό ξ που ικανοποιεί τις σχέσεις (1) του προηγουμένου ερωτήματος και για τα $f(0)$, $g(1)$ ισχύει επιπλέον:

$$f(\xi) < f(0) < g(1) \tag{11.3}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, \xi) \\ g(x) & x \in [\xi, 1] \end{cases}$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η h είναι συνεχής.

(β΄) Να εξετάσετε αν η h είναι 1-1.

11.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 1.2 Α2, ii)

2. (α΄) Η f ορίζεται στο $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Με $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ έχουμε: $\frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{1+x_2}{1-x_2} \Rightarrow (1+x_1)(1-x_2) = (1+x_2)(1-x_1) \Rightarrow 1 - x_2 + x_1 - x_1x_2 = 1 - x_1 + x_2 - x_1x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Επομένως η f είναι 1-1 άρα και αντιστρέψιμη.

   (β΄) Βρίσκουμε πρώτα την αντίστροφη της f: Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ με $x \neq 1$. Αυτή γράφεται

$$(y+1)x = y - 1$$

   Η παραπάνω εξίσωση

   i. για $y \neq -1$ έχει λύση ως προς x την $x = \frac{y-1}{y+1}$ ενώ

   ii. για $y = -1$ είναι αδύνατη

Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$ και ορίζεται στο $\mathbb{R} - -1$. Για $x \pm 1$ είναι

$$f(x) \cdot f^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{x-1}{x+1} = -1$$

(γ′) Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) + f^{-1}(x) \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{1-x} + \frac{x-1}{x+1} \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{-x} \right) + \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 0$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 1.8 Β4.

2. (α′) Θεωρούμε $x_0 \in [0,1]$

   i. Αν $x_0 \in [0,\xi)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) =_{(f \text{ συνεχής })} f(x_0) = h(x_0)$

   ii. Αν $x_0 \in (\xi,1]$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) =_{(g \text{ συνεχής })} g(x_0) = h(x_0)$

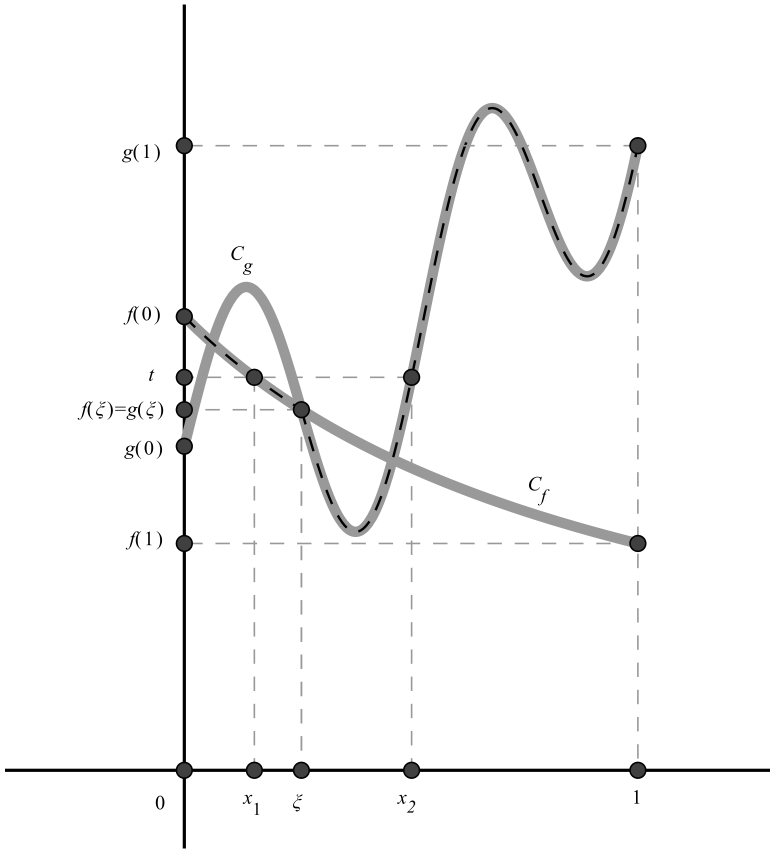
   iii. Αν $x_0 = \xi$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to \xi^-} f(x) = f(\xi)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to \xi^+} g(x) = g(\xi)$ ενώ $h(\xi) = g(\xi)$. Επομένως λογω της (1) είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} h(x) = h(x_0)$ και η h είναι συνεχής στο $x_0 = \xi$.

   Τελικά η h είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της άρα είναι συνεχής.

   (β′) Έστω ένας αριθμός y με $f(\xi) < y < f(0)) < g(1)$. Είναι

   - Είναι $f(\xi) < y < f(0))$ δηλαδή $h(\xi) < y < h(0))$ οπότε από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για την συνεχή συνάρτηση h υπάρχει $x_1 \in (0,\xi)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = y$.
   - Είναι $f(\xi) < y < g(1))$ δηλαδή $h(\xi) < y < h(1))$ οπότε πάλι από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για την συνεχή συνάρτηση h υπάρχει $x_2 \in (\xi,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_2) = y$.

   Είναι $x_1 < \xi < x_2$ άρα $x_1 \neq x_2$ αλλά $h(x_1) = h(x_2) = y$. Επομένως η h δεν είναι 1-1.



11.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

11.3.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ισχύει η ισοδυναμία
$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z_1 \bar{z}_2) = 0$$

9 Μοναδες

2. Έστω $z = 3 - 4i$. Να βρείτε:

   (α′) Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w για τους οποίους ισχύει $|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β′) Τους μιγαδικούς w που έχουν μέτρο 10 και ισχύει $|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για μία συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

- $(f(x))^3 + x^2 f(x) = 2x(f(x))^2 + x^2 \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ και είναι πραγματικός αριθμός

1. Να αποδείξετε οτι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Υπάρχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ το οποίο έχει τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(1, 2)$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + x\ln(\eta\mu x) - 2x\ln x}{x}$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την παράγωγο της f.

10 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{4}{5}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{3}\right)$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f(1) = 0$

1. Να αποδείξετε ότι:

   (α′) Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

   4 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Για κάθε $x \neq 1$ ισχύει $f(x) \neq 0$

   4 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (γ′) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(1, +\infty)$

   4 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (δ′) Η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f\left(5 - 10x^3\right) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

   4 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

   (α′) $\lim_{x \to 1}\left[\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu f(x)\right]$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) $\lim_{x \to -\infty} \frac{[1 - f(2)] \cdot x^4 + 5x^3 + 2}{x^3 + x - 2}$

   4 ΜΟΝΑΔΕΣ

11.3.2 Απαντήσεις

11.4 Διαφορικός Λογισμός.

11.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ -1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι:

   (α′) η f είναι συνεχής

   (β′) $f'(1) = -\frac{1}{2}$

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = 2^x$$

και

$$g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

1. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ή με άλλο τρόπο ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα $A(0, 1, B(1, 2)$.

2. Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$. Να αποδείξετε ότι

   (α′) Η h είναι κυρτή.

   (β′) Η h έχει ελάχιστη τιμή

11.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο, 286, Β5

2. Η f είναι παράγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και η παράγωγος της είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ -\frac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε θετικό x ισχύει $\ln x \leq x - 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$. Επομένως για $0 < x \neq 1$ είναι $f'(x) < 0$. Αλλά και για $x = 1$ είναι $f'(1) = -\,-\frac{1}{2} < 0$ 'άρα τελικά είναι $f'(x) < 0$ για όλα τα $x > 0$. Επομένως $f \downarrow$. Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =_{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{1-x} =_{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + 1}{-1} = -\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 0)$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο, 250, Β7
2. (α΄) Είναι $h'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$, $h''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 > 0$. Άρα η h είναι κυρτή.

   (β΄) Αφού $h(0) = 0$, και $h(1) = 0$ η παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) h ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[0,1]$. Θα υπάρχει λοιπόν $x_0 \in (0,1)$ ώστε $h'(x_0) = 0$. Αλλά h είναι κυρτή επομένως η h' είναι γνησίως αυξουσα. Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της h'. Για $x < x_0$ είναι$h'(x) < h'(x_{_}\{0\}) = 0$ επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$. Για $x > x_0$ είναι $h'(x) > h'(x_{\_}\{0\}) = 0$ και επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Επομένως η h έχει ελάχιστο.

11.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

11.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int x^3 \ln x dx$.
2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{h\to+\infty} \dfrac{\int_1^h x^3 \ln x dx}{h^5}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \text{συν}x - 2\text{ημ}x$ και $g(x) = 0$.

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$.
2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

11.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 316, Α, 1, iii)

2. Από το ερώτημα 1. έχουμε ότι μία παράγουσα της $x^3 \ln x$ είναι η

$$\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4.$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{\int_1^h x^3 \ln x dx}{h^5} = \lim_{h\to+\infty} \frac{\left[\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4\right]_1^h}{h^5} =$$

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{\frac{1}{4}h^4 \ln h - \frac{1}{16}h^4 + \frac{1}{16}}{h^5} = \lim_{h\to+\infty}\left(\lim_{h\to+\infty} \frac{\frac{1}{4}h^4 \ln h - \frac{1}{16}h^4 + \frac{1}{16}}{h^5}\right) = 0$$

διότι

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{\ln h}{h} =_{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)} \lim_{h\to+\infty} \frac{\frac{1}{h}}{1} = 0.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 338, Α, 1, iii)

2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |h(x)|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\, dx.$$

Θα βρουμε το πρόσημο της f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$$f'(x) = -\text{ημ}x - 2\text{συν}x$$

και $f'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Αφού η f είναι συνεχής θα είναι $f \downarrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι $f(0)\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot (-2) < 0$ επομένως, από το θεώρημα του Bolzano η f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ εχει μία τουλάχσιτον ρίζα x_0 η οποία λόγω μονοτονίας είναι και μοναδική. Στο διάστημα $[0, x_0)$ η f δεν έχει ρίζα και επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο που θα είναι εκείνο του $f(0)$ δηλαδή θετικό. Ομοίως η f στο διάστημα $(x_0, \frac{\pi}{2}]$ η f θα είναι αρνητική. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$\int_0^{x_0} h(x)\, dx - \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} h(x)\, dx = 2\text{ημ}x_0 + 4\text{συν}x_0 - 3$$

Αλλά το x_0 είναι ρίζα της f δηλαδή

$$\text{συν}x_0 - 2\text{ημ}x_0 = 0$$

και επομένως

$$\varepsilon\varphi x_0 = \frac{1}{2}.$$

Από την ισότητα αυτή μπορούμε να βρούμε τα ημx_0, συνx_0 αφού ημ$^2x_0$ + συν$^2x_0 = 1$ οπότε

$$\varepsilon\varphi^2 x_0 + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x_0}$$

δηλαδή

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x_0} = \frac{5}{4},$$

άρα (συν$x_0 > 0$) συν$x_0 = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ και επομένως ημ$x_0 = \frac{1}{5}\sqrt{5}$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = 2\cdot\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) + 4\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right) - 3 = 2\sqrt{5} - 3.$$

11.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

11.6.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες:
Σπυρίδων Αμούργης, Νικόλαος Ζήσης, Κωνσταντίνος Λαμπρόπουλος, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$$

1. Να μελετήσετε την f:

   (α΄) Ως προς τη μονοτονία

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β΄) Ως προς τα κοίλα-κυρτά

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -23$ γιά κάθε x.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει:

$$a^4 + 3^3 \geq 4a^3$$

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = 2\int_0^x te^{-f(t)}dt \text{ για κάθε } x$$

1. Να αποδείξετε οτι η f είναι παραγωγίσιμη.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε οτι ισχύει

$$f'(x)\, e^{f(x)} = 2x \text{ για κάθε } x$$

5 Μοναδες

3. Να αποδείξετε οτι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$$

5 Μοναδες

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

5 Μοναδες

5. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{(f\circ f)(x)}{(f(x))^{2010}} = +\infty$$

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-\ln x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής.

5 Μοναδες

2. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=1$ είναι ασύμπτωτη της $\mathcal{C}_g$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_g$ και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \alpha + 1$, $y = 0$ όπου $\alpha > e$.

   (α′) Να αποδείξετε ότι $g(a+1) < E(\alpha) < g(a)$.

   10 ΜΟΝΑΔΕΣ

   (β′) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha)$.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

Εστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή την δεύτερη παράγωγο. Υποθέτουμε ότι:

- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$
- Η εξίσωση

$$f(x) f'(x) f''(x) = 0 \tag{11.4}$$

  έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β).

Να αποδείξετε ότι:

1. Η μέγιστη τιμή της f είναι θετικός αριθμός.

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

   8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Η f είναι κοίλη.

   9 ΜΟΝΑΔΕΣ

11.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Είναι $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ και $f''(x) = 12x(x-2)$.

   (α′) Έχουμε ότι η $f'(x)$ έχει ρίζες τους 0 και 3 και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (3, +\infty)$ ενώ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (-\infty, 0) \cup (0, 3)$ και επομένως αφού η f είναι συνεχής και είναι $f \uparrow$ στο $(-\infty, 3]$ και $f \downarrow$ στο $[0, +\infty)$.

(β′) Έχουμε ότι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ επομένως η f είναι:

i. Κυρτή στο $(-\infty, 0]$

ii. Κοίλη στο $[0, 2]$

iii. Κυρτή στο $[2, +\infty)$

Τα συμπεράσματα απεικονίζονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. Η f έχει ελάχιστο το $f(3) = -23$ επομένως για κάθε x είναι $f(x) \geq -23$.

3. Είναι για κάθε α:
$f(\alpha) \geq -23 \Leftrightarrow \alpha^4 - 4\alpha^3 + 4 \geq -23 \Leftrightarrow \alpha^4 + 4 + 23 \geq 4\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^4 + 27 \geq 4\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^4 + 3^3 \geq 4\alpha$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και επομένως και ο ολοκληρωτέος $h(t) = te^{-f(t)}$ είναι συνάρτηση συνεχής. Συμπεραίνουμε ότι και $\int_0^x h(t)\,dt$ άρα και η $f(x) = 2\int_0^x h(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη.

2. Παραγωγίζουμε και έχουμε $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$. Οπότε $f'(x) = \frac{2x}{e^{f(x)}}$ από την οποία βρίσκουμε $f'(x)\,e^{f(x)} = 2x$.

3. Από την σχέση $f'(x)\,e^{f(x)} = 2x$ έχουμε ότι $\left(e^{f(x)}\right)' = \left(x^2\right)'$. Συμπεραίνουμε ότι
$$e^{f(x)} = x^2 + c$$
Για να βρούμε το c θέτουμε στην σχέση $f(x) = 2\int_0^x te^{-f(t)}dt$ όπου $x = 0$ βρίσκουμε $f(0) = 0$. Επομένως $e^0 = c$ δηλαδή $c = 1$. Άρα $e^{f(x)} = x^2 + 1$ και επομένως $\ln e^{f(x)} = \ln\left(x^2 + 1\right)$ δηλαδή
$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$$

4. Παραγωγίζοντας την f βρίσκουμε $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του x. Η συνεχής f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Είναι
$$f((-\infty, 0]) = f\left(\left[0, \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)\right) = [0, +\infty)$$

$$f\left([0,+\infty)\right)=f\left(\left[0,\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right)\right)=[0,+\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f\left(\mathbb{R}\right)=[0,+\infty)\cup[0,+\infty)=[0,+\infty)$$

5. Είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{(f\circ f)(x)}{(f(x))^{2010}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(f(x))}{(f(x))^{2010}}=\left(\frac{0}{0}\right)$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(f(x))f'(x)}{2010(f(x))^{2009}f'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(f(x))}{2010(f(x))^{2009}}=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2f(x)}{f^2(x)+1}}{2010(f(x))^{2009}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2f(x)}{f^2(x)+1}}{2010(f(x))^{2009}}=$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1005(f^2(x)+1)(f(x))^{2008}}=$
$=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{1}{1005(u+1)u^{2008}}=+\infty$ διότι $f(x)>0$ για $x\neq0$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Η g ορίζεται στο $[0,+\infty)$. Στα $x_0\in(0,+\infty)$ η g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Για το σημείο $x_0=0$ πρέπει να ελέγξουμε την συνέχεια παίρνοντας όρια. Έχουμε
$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x-\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\underbrace{x}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\left(\frac{1}{x-\ln x}\right)}_{\downarrow\, 0}=0=g(0)$ αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(x-\ln x)=$
$+\infty$. Επομένως η g είναι συνεχής και στο 0 άρα είναι συνεχής.

2. Η δοθείσα ευθεία έχει συντελεστή διευθύνσεως άρα αν είναι ασύμπτωτη θα είναι για $x\to\pm\infty$. Επειδή η g δεν ορίζεται στους αρνητικούς αριθμούς θα πρέπει να είναι ασύμπτωτη για $x\to+\infty$. Έχουμε
$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{\frac{\ln x}{x}-1}\right)=$
$0\cdot(-1)=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$. Πράγματι λοιπόν η $y=1$ είναι ασύμπτωτη της $\mathcal{C}_g$

3. Είναι $E=\int_0^e|g(x)|\,dx$. Ξέρουμε ότι $\ln x\leq x-1$ άρα $x-\ln x\geq1>0$. Επομένως $g(x)>0$ για κάθε x. Άρα $E=\int_0^e g(x)\,dx$. Μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την g αν μάθουμε το είδος μονοτονίας της. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και $g'(x)=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$. Είναι $g'(x)>0\Leftrightarrow1-\ln x>0\Leftrightarrow x<e$ και αφού η g είναι συνεχής έχουμε:

- Η g $\uparrow$ στο $[0,e]$
- Η g $\downarrow$ στο $[e,+\infty)$

Αν $0\leq x\leq e$ είναι $0\leq g(x)\leq g(e)$ για όλα τα $x\in[0,e]$. Αφού $g(x)\leq g(e)$ για όλα τα $x\in[0,e]$ έχουμε ότι $g(e)-g(x)\geq0$ και επομένως[1] $\int_0^e(g(e)-g(x))\,dx\geq0$ αρα $\int_0^e g(e)\,dx\geq\int_0^e g(x)\,dx$ δηλαδή

[1] Εδώ χρησιμοποιούμε την τυπική εποχειρηματολογία για την ολοκλήρωση ανισοτήτων.

$\int_0^e g(x)\,dx \le eg(e) = \frac{e^2}{e-1}$. Για να δείξουμε ότι $\int_0^e g(x)\,dx < 5$ αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $\frac{e^2}{e-1} < 5 \Leftrightarrow e^2 < 5(e-1) \Leftrightarrow 5 < 5e - e^2 \Leftrightarrow 5 < e(5-e)$. Αλλά $e(5-e) > 2,71(5-2,72) = 6,2 > 5$ και το αποδεικτέο αληθεύει.

4. (α′) Είδαμε ότι g θετική επομένως $E(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+1} g(x)\,dx$. Επίσης στο διάστημα $[e,\alpha]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα και επομένως είναι

$$g(\alpha) \ge_{(1)} g(x) \ge_{(2)} g(\alpha+1)$$

και η (1) ισχύει σαν ισότητα μόνο όταν $x = \alpha$ ενώ (2) ισχύει σαν ισότητα όταν $q = \alpha + 1$. Επομένως

- Ισχύει $g(\alpha) - g(x) \ge 0$ για κάθε x χωρίς να είναι $g(\alpha) - g(x) = 0$ για όλα τα x
- Ισχύει $g(x) - g(\alpha+1) \ge 0$ για κάθε x χωρίς να είναι $g(x) - g(\alpha+1) = 0$ για όλα τα x.

Επομένως

- $\int_\alpha^{\alpha+1} (g(\alpha) - g(x))\,dx > 0$ από την οποία προκύπτει $\int_\alpha^{\alpha+1} g(\alpha)\,dx > \int_\alpha^{\alpha+1} g(x)\,dx$
- $\int_\alpha^{\alpha+1} (g(x) - g(\alpha+1))\,dx > 0$ από την οποία προκύπτει $\int_\alpha^{\alpha+1} g(x)\,dx > \int_\alpha^{\alpha+1} g(\alpha+1)\,dx$.

Άρα $\int_\alpha^{\alpha+1} g(\alpha)\,dx > \int_\alpha^{\alpha+1} g(x)\,dx > \int_\alpha^{\alpha+1} g(\alpha+1)\,dx$ και έχουμε το αποδεικτέο $g(\alpha) > E(\alpha) > g(\alpha+1)$

(β′) Είδαμε προηγουμένως ότι $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-1) = 0$ και επομένως $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Άρα $\lim_{\alpha\to+\infty} g(\alpha) = 1$ όπως και $\lim_{\alpha\to+\infty} g\left(\underbrace{\alpha+1}_{u}\right) = \lim_{u\to+\infty} g(u) = 1$.

Άρα από την σχέση

$$g(\alpha) > E(\alpha) > g(\alpha+1)$$

και το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{\alpha\to+\infty} E(\alpha) = 1$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Η f ως παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ είναι και συνεχής επομένως έχει μέγιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχει κάποιο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε το $f(x_0)$ να είναι η μέγιστη τιμή της f δηλαδή για κάθε x από το $[\alpha,\beta]$ να ισχύει $f(x_0) \ge f(x)$. Επομένως και $f(x_0) \ge f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Αλλά $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$. Άρα $f(x_0) > 0$. Άρα η μέγιστη τιμή της f είναι θετικός αριθμός.

2. Αν $f(x_0)$ είναι το μέγιστο της f τότε αφού $f(x_0) > 0$ το x_0 δε μπορεί να είναι κάποιο από τα α, β διότι σε αυτά η τιμή τξς f είναι μηδέν. Άρα

το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Επομένως από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το x_0 θα είναι λύση της εξίσωσης (11.4) στο $[\alpha, \beta]$. Αλλά στο $[\alpha, \beta]$ η (11.4) απότην υπόθεση έχει μοναδική λύση. Άρα το x_0 είναι η μοναδική λύση της (11.4). Αυτό σημαίνει ότι η f δε μπορεί να μηδενίζεται σε κανένα από τα διαστήματα (α, x_0) και (x_0, β). Αλλά ούτε και στο x_0 μηδενίζεται. Συνεπώς η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του (α, β) άρα, ως συνεχης, διατηρεί πρόσημο στο (α, β) το οποίο θα είναι «+» αφού $f(x_0) > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

3. Αφού $f(x_1) \geq f(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι φυσικά $f(x_1) > 0$ και επομένως είναι $f(x_1) > f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Άρα $f(x_1) \geq f(x)$ κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Η f λοιπόν θα παρουσιάζει μέγιστο στο x_1 που θα είναι αναγκαστικά εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$ και επομένως ρίζα της f' άρα και της (11.4). Αυτό σημαίνει ότι θα συμπίπτει με το x_0. Για τον ίδιο λόγο και το x_2 συμπίπτει με το x_0 και επομένως $x_1 = x_0 = x_2$.

4. Η f'' δε μπορεί να έχει ρίζα στο (α, x_0) γιατί μια τέτοια ρίζα θα ήταν και ρίζα της (11.4). Άρα αφού η f'' είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο στο (α, x_0). Συνεπώς η f' θα είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha, x_0]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[\alpha, x_0]$ βρίσκουμε ότι $\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} = f'(\xi)$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, x_0)$. Άρα

$$f'(\xi) = \frac{\overbrace{f(x_0)}^{+}}{\underbrace{x_0 - \alpha}_{+}} < 0 = f'(x_0)$$

Άρα η f' θα πρέπει να είναι γνησίως φθίνουσα που σημαίνει ότι $f''(x) < 0$ στο (α, x_0). Εργαζόμενοι όμοια βρίσκουμε ότι $f''(x) < 0$ και στο (x_0, β). Άρα η συνεχής συνάρτηση f' έχει παράγωγο (την f'') αρνητική στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ και επομένως η f είναι κοίλη.
Αλλος τροπος. Θα αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να είναι $f''(x) \geq 0$ στο (α, β). Αν αυτό συνέβαινε η συνεχής συνάρτηση f' θα είχε μη αρνητική παράγωγο στο (α, β) επομένως[2] θα ήταν αύξουσα. Έχουμε τον πίνακα:

[2]Αυτό θέλει κάποια απόδειξη που είναι πανομοιότυπη με την απόδειξη του ότι αν η παράγωγος είναι θετική σε κάποιο διάστημα τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

x	α		x_0		β
$f''(x)$		≥ 0		≥ 0	
$f'(x)$		$\nearrow$ ≤ 0	0	$f(x)$ $\nearrow$	
$f(x)$	0	$\searrow$ ≤ 0		≤ 0 $\nearrow$	0

από τον οποίο προκύπτει ότι η f είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός στο (α, β) πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το ερώτημα 1 όπυ έχουμε αποδείξει ότι η f είναι θετική στο (α, β).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Σχολικό έτος 2010-2011

12.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

12.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η εξίσωση

$$2x^2 + \beta x + \gamma = 0 \tag{12.1}$$

Να βρείτε τις τιμές των β, γ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Μία ρίζα της (12.1) είναι ο $3 + 2i$.

2. Η (12.1) έχει ρίζες τους z, z^2 με $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η σχέση

$$|z - i| = 1 \tag{12.2}$$

1. Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών που ικανοποιούν την (12.2).

2. (α′) Να βρείτε ποιός από τους μιγαδικούς που ικανοποιούν την (12.2) έχει μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.

   (β′) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 είναι γνωστό ότι ικανοποιούν την (12.2). Να αποδείξετε ότι

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} - i \right| \leq 1$$

12.1.2 Απαντήσεις

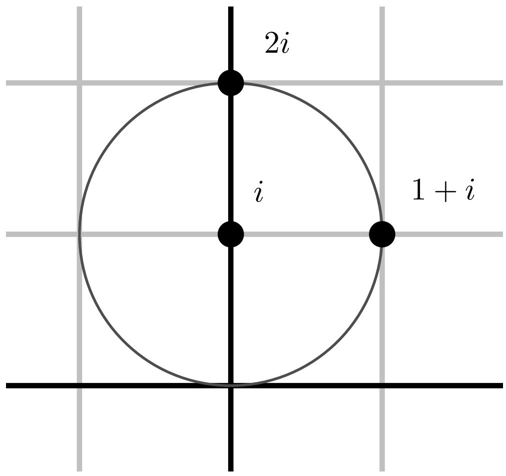
ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α΄ Μέρος § 2.2 Α 12.

2. Ζητάμε β, γ ώστε η εξίσωση (12.1) να έχει ρίζες z, z^2 με $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Επειδή οι ρίζες θα είναι συζυγείς θα είναι
$$z^2 = \bar{z} \tag{12.3}$$
Θα είναι $z \neq 0$ και $|z| \neq 0$. Οπότε από την (12.3) έχουμε ότι $|z^2| = |\bar{z}|$ και επομένως $|z^2| = |z|$ άρα $|z| = 1$. Αλλά τότε από την (12.3) έχουμε $z^3 = z\bar{z}$ και επομένως $z^3 = 1$. Συμπεραίνουμε ότι
$$(z-1)\left(z^2+z+1\right) = 0$$
και επομένως
$$z = 1, \quad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$
Η πρώτη λύση απορρίπτεται οπότε έχουμε τις άλλες δύο τιμές. Από αυτές και τις σχέσεις του Vieta συνάγουμε ότι $-\frac{\beta}{2} = -1$ και $\beta = 2$ και $\frac{\gamma}{2} = 1$ οπότε $\gamma = 2$.
Επαληθευση Για τις παραπάνω τιμές των β, γ έχουμε την εξίσωση $2x^2 + 2x + 2 = 0$ δηλαδή την $x^2 + x + 1 = 0$ της οποίας οι ρίζες είναι οι $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ και για τις οποίες ισχύει ότι το τετράγωνο μιας οποιασδήποτε από αυτές είναι η άλλη.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Ζητάμε να βρούμε ποιος απο τους μιγαδικούς που ικανοποιούν την $|z - i| = 1$ έχει μεγαλύτερο πραγματικό μέρος. Η απάντηση είναι άμεση αν αξιοποιήσουμε την απάντηση στο πρώτο ερώτημα. Προφανώς μεγαλύτερο πραγματικό μέρος έχει ο $z = 1 + i$.



ΑΛΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ Αυτοτελώς: Έστω $z = z + yi$. Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1,$$

από την οποία προκύπτει ότι $1 - x^2 = (y-1)^2$ και επομένως $1 - x^2 \geq 0$. Από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι $-1 \leq x \leq 1$. Επομένως η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το πραγματικό μέρος x του z είναι το 1 οπότε και $y = 1$ τιμές που μς δίνουν τον μιγαδικό $z = 1 + i$.

2. Έχουμε

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} - i\right| = \left|\frac{z_1 + z_2 + z_3 - 3i}{3}\right| = \left|\frac{(z_1 - i) + (z_2 - i) + (z_3 - i)}{3}\right| \leq$$

$$\frac{|z_1 - i| + |z_2 - i| + |z_3 - i|}{3} = \frac{1+1+1}{3} = 1$$

και επομένως την αποδεικτέα.
ΣΧΟΛΙΟ. Αν τα z_1, z_2, z_3 είναι ανά δύο διάφορα τότε οι εικόνες τους είναι κορυφές τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο με κέντρο την εικόνα του i και ακτίνα 1. Η εικόνα του $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$ αντιστοιχεί στο κέντρο βάρους του τριγώνου που είναι πάντοτε εσωτερικό σημείο του και επομένως και εσωτερικό σημείο του κύκλου άρα απέχει από το κέντρο του απόσταση μικρότερη από την ακτίνα του δηλαδή το 1. Αν δύο μόνο από τα z_1, z_2, z_3 συμπίπτουν ας πούμε $z_1 \neq z_2 = z_3$ τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι το $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$ αντιστοιχεί σε σημείο της χορδής με άκρα τις εικόνες των z_1, z_2 και το αποδεικτέο προκύπτει. Τελος στην περίπτωση που $z_1 = z_2 = z_3$ τότε η αποδεικτέα ανάγεται στην $|z_1 - i| \leq 1$ ισχύει σαν ισότητα.

(α′)

(β′) Σχολικό βιβλίο Α′ Μέρος § 2.3 Α 4 β).

(γ′)

12.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

12.2.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

2. (α′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

   (β′) Να βρείτε την αντίστροφη της.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{\text{ημ}5x}{\sqrt{5x+4}-2}$

1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

2. Να αποδείξετε ότι η g έχει μία τουλάχιστον αρνητική ρίζα.

12.2.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος, § 1.8 Α5 iii)

2. (α′) Με $\mathcal{D}_f = (1, +\infty)$ αν $x_1 < x_2$ από το $\mathcal{D}_f$ είναι $\ln x_1 < \ln x_2$ και $\ln(\ln x_1) < \ln(\ln x_2)$. Άρα $f(x_1) < f(x_2)$ και $f \uparrow$. Επίσης

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln(\ln x) \underset{\ln x = u}{=} \lim_{x\to 0^+} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln(\ln x) \underset{\ln x = u}{=} \lim_{x\to +\infty} \ln u = +\infty.$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

(β′) Είδαμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι $1-1$ και επομένως αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της είναι το $\mathbb{R}$. Από τις ισοδυναμίες

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(\ln x) = y \Leftrightarrow \ln x = e^y \Leftrightarrow x = e^{e^y},$$

συνάγουμε ότι

$$f^{-1}(x) = e^{e^x}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος, § 1.5 Α6 vi)

2. Είναι $\mathcal{D}_g = \left[-\frac{4}{5}, 0\right) \cup (0, +\infty)$. Είδαμε στο ερώτημα 1. ότι το όριο της g στο 1 είναι 4. Επομένως στο διάστημα $\left[-\frac{4}{5}, 0\right)$ θα ψπ·αρξει a ώστε $g(a) > 0$. Επίσης $g\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}\text{ημ}4$ και επειδή $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$ ο 4 βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο όπου το ημίτονο είναι αρνητικό. Άρα $g\left(-\frac{4}{5}\right) < 0$. Εφαρμόζοντας για την συνεχή g το θεώρημα Bolzano στο $\left[-\frac{4}{5}, a\right]$ συμπεραίνουμε ότι η g έχει σε αυτί μια ρίζα που προφανώς θα είναι αρνητική.

12.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

12.3.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Σπυρίδων Αμούργης, Γεράσιμος Κουτσανδρέας, Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αρετή Χούλη

ΖΗΤΗΜΑ 1

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, w ισχύει:

- $z_1^2 = 3 + i$
- $z_2^2 = 1 + 3i$
- $w = \frac{z_1}{z_2}$

1. Να αποδείξετε ότι ο w δεν είναι πραγματικός

5 Μοναδες

2. Βρείτε το μέτρο του w.

5 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{w-1}{w+1}$ είναι φανταστικός.

5 Μοναδες

4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών v για τους οποίους ισχύει $\left|v - z_1^2\right| = \left|v + z_2^2\right|$.

5 Μοναδες

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό u ισχύει:

$$|u + w| + |u - w| \geq 2$$

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

1. Αν $f(1) = f'(1) = 1$ να βρείτε την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $g(x) = f^2(x)$ όταν $x = 1$.

6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to a} \frac{e^{f(x)} - e^{f(a)}}{x - a} = f'(a)\, e^{f(a)}$$

7 Μοναδες

3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(h^2\right) - f(0)}{h}$$

7 Μοναδες

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $t > 1$ υπάρχει ένας τουλάχιστον x_0 ώστε

$$f(x_0) = \frac{(t+1) f(t+1) + (t-1) f(t-1)}{2t}$$

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε x ισχύει:

- $f(x) \geq 0$
- $(f \circ f)(x) = \left(x^2 + x + 1\right) f(x)$
- Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετες ότι η f είναι 1-1.

5 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

5 Μοναδες

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε x είναι $4f(f(x)) \geq 3f(x)$.

5 Μοναδες

5. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$. Βρείτε το ℓ.

5 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις

$h(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$ και $f(x) = \begin{cases} 3 - x - xh(x) & , \ x \neq 0 \\ 3 & , \ x = 0 \end{cases}$

1. Να αποδείξετε ότι

(α′) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ (β′) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 1$

6 Μοναδες

2. Να βρείτε τα όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (β′) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

4 Μοναδες

3. Να βρείτε την παράγωγο της f.

5 Μοναδες

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

5 Μοναδες

5. Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης $\mathcal{C}_f$ της f στο σημείο της $A(0,3)$ και $M(\alpha, f(a))$ ένα οποιοδήποτε κοινό σημείο της $\mathcal{C}_f$ και της (ε). Να αποδείξετε ότι
$$|\alpha| \le \frac{1}{\pi}$$

5 Μοναδες

12.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Αν συνέβαινε $w \in \mathbb{R}$ θα ήταν και $w^2 \in \mathbb{R}$. Αλλά $w^2 = \frac{z_1^2}{z_2^2} = \frac{3+i}{1+3i} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \notin \mathbb{R}$ (άτοπο). Αρα $w \notin \mathbb{R}$

2. $|w| = \sqrt{|w|^2} = \sqrt{|w^2|} = \sqrt{\left|\frac{z_1^2}{z_2^2}\right|} = \sqrt{\left|\frac{3+i}{1+3i}\right|} = \sqrt{\frac{|3+i|}{|1+3i|}} = 1$

3. Θέλουμε το πραγματικό μέρος του $\frac{w-1}{w+1}$ δηλαδή ο αριθμός
$$\frac{\overline{\left(\frac{w-1}{w+1}\right)} + \frac{w-1}{w+1}}{2}$$
να είναι μηδέν. Αρκεί: $\overline{\left(\frac{w-1}{w+1}\right)} = -\frac{w-1}{w+1}$. Έχουμε: $\overline{\left(\frac{w-1}{w+1}\right)} = \frac{\bar{w}-1}{\bar{w}+1} =_{w\bar{w}=1} \frac{\frac{1}{w}-1}{\frac{1}{w}+1} = \frac{1-w}{1+w} = -\frac{w-1}{w+1}$

4. Είναι $z_1^2 \neq -z_2^2$ και επομένως οι εικόνες των $z_1^2, -z_2^2$ ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα. Θα είναι $\left|v - z_1^2\right| = \left|v - \left(-z_2^2\right)\right|$ και επομένως η εικόνα του v θα ανήκει στην μεσοκάθετο του παραπάνω τμήματος που είναι και ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

5. $|u+w| + |u-w| = |u+w| + |w-u| \geq |(u+w)+(w-u)| = 2|w| = 2$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Είναι $g'(x) = \left(f^2(x)\right)' = 2f(x)f'(x)$ και επομένως $g'(1) = 2f(1)f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$.

2. Ονομάζουμε $h(x) = e^{f(x)}$. Είναι: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^{f(x)} - e^{f(a)}}{x-a} = h'(a)$. Αλλά $h'(x) = \left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$ επομένως $h'(a) = f'(a)e^{f(a)}$. Άρα το δοθέν όριο είναι ίσο με $f'(a)e^{f(a)}$

3. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(h^2\right) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(h^2\right) - f(0)}{h^2} \cdot h$. Αλλά $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(h^2\right) - f(0)}{h^2} =_{h^2=u}$ $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(u) - f(0)}{u-0} = f'(0)$. Επομένως $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(h^2\right) - f(0)}{h^2} \cdot h = f'(0) \cdot 0 = 0$.

4. Αν $f(t+1) = f(t-1)$ τότε $\frac{(t+1)f(t+1)+(t-1)f(t-1)}{2t} = \frac{(t+1)f(t+1)+(t-1)f(t+1)}{2t}$ $= f(t+1)$ και αρκεί σαν x_0 να πάρουμε το $t+1$.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f(t+1) \neq f(t-1)$. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $r(x) = f(x) - \frac{(t+1)f(t+1)+(t-1)f(t-1)}{2t}$. Τότε
$r(t-1) = \frac{1}{2}(t+1)\frac{f(t-1)-f(t+1)}{t}$
$r(t+1) = -\frac{1}{2}(t-1)\frac{f(t-1)-f(t+1)}{t}$
και επομένως
$r(t-1)\,r(t+1) =$
$-\frac{1}{4t^2}(t+1)(t-1)\left(f(t-1) - f(t+1)\right)^2 < 0$
και από το θεώρημα του Bolzano η r (άρα και η δοθείσα εξίσωση) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(t-1, t+1)$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Υποθέτουμε ότι $f(x_0) = 0$. Τότε $f(f(x_0)) = f(0)$. Θέτοντας στην δοθείσα σχέση όπου x το x_0 βρίσκουμε:
$f(0) = \left(x_0^2 + x_0 + 1\right) f(x_0)$ καιεπομένως $f(0) = 0$. Αλλά η εξίσωση $f(x) = 0$ μοναδική ρίζα. Άρα $x_0 = 0$ και η μοναδική λύση της $f(x) = 0$ είναι ο 0.

2. Υποθέτουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε και $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. Αλλά από την υπόθεση είναι:
$f(x_1) = \left(x_1^2 + x_1 + 1\right) f(x_1)$ και

$f(x_2) = \left(x_2^2 + x_2 + 1\right) f(x_2)$ και επομένως θα είναι
Αν μεν $f(x_1) = f(x_2) = 0$ τότε αφού η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση θα είναι $x_1 = x_2$. Αν είναι $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$ τότε απλοποιώντας βρίσκουμε $x_1^2 + x_1 + 1 = x_2^2 + x_2 + 1$. Μεταφέροντας στο πρώτο μέλος και παραγοντοποιώντας βρίσκουμε ότι $(x_1 + x_2 + 1)(x_1 - x_2) = 0$. Αλλά είναι $x_1 + x_2 + 1 > 0$ άρα $x_1 - x_2 = 0$ και πάλι $x_1 = x_2$. Επομένως η f είναι 1-1.

3. Είναι $f(x) \geq 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \neq f(0) = 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

4. Θέλουμε $4f(f(x)) \geq 3f(x)$ δηλαδή
$4\left(x^2 + x + 1\right) f(x) \geq 3f(x)$ Η παραπάνω σχέση για $x = 0$ ισχύει σαν ισότητα ενώ για $x > 0$ απλοποιώντας το $f(x) > 0$ έχουμε την ισοδύναμη σχέση $4\left(x^2 + x + 1\right) \geq 3$ που ισοδυναμει με την $(2x+1)^2 \geq 0$ που ισχύει.

5. Αφού είναι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$ θα ισχύει
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} =_{u=f(x)} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(u)}{u} = \ell$
Αλλά $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 + x + 1\right) = 1$ επομένως $\ell = 1$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. (α΄) Για $x \neq 0$ είναι $|h(x)| = \left|x\text{ημ}\frac{1}{x}\right| = |x| \left|\text{ημ}\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ και επομένως $|h(x)| \leq |x|$ δηλαδή $-|x| \leq h(x) \leq |x|$. Αφού $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

   (β΄) $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\text{ημ}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\text{ημ}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =_{u=\frac{1}{x}} \lim\limits_{u\to 0} \frac{\text{ημ}u}{u} = 1$

2. (α΄) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (3 - x - xh(x)) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\frac{3}{x} - 1 - h(x)\right) = -\infty$

   (β΄) Εργαζόμενοι όπως πριν και όπως στο ερώτημα 1β βρίσκουμε ότι το όριο είναι $+\infty$.

3. Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(3 - x - x^2\text{ημ}\frac{1}{x}\right)' = \ldots = 1 - 2x\text{ημ}\frac{1}{x} + \text{συν}\frac{1}{x}$.
Για $x = 0$ είναι $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3-x-xh(x)-3}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x-xh(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(-1 - h(x)) = -1$. Τελικά:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x\text{ημ}\frac{1}{x} + \text{συν}\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ -1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

4. Θεωρούμε $y \in \mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - y) = +\infty$ και επομένως υπάρχει x_1 ώστε $f(x_1) > 0$.Όμοια $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - y) = -\infty$

και επομένως υπάρχει x_2 ώστε $f(x_2) < 0$. Ασφαλώς θα είναι $x_1 \neq x_2$ οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bolzano στο διάστημα με άκρα x_1, x_2 για την συνεχή συνάρτηση g βρίσκουμε ότι υπάρχει x μεταξύ των $x_1 \neq x_2$ ώστε $f(x) = y$. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

5. Είναι $f'(-1) = 0$ και επομένως η εξίσωση εφαπτομένηςη της $\mathcal{C}_f$ στο Α είναι η $y = -x + 3$. Λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} y &= -x + 3 \\ y &= f(x) \end{aligned}\right\}$$

βρίσκουμε ότι οι τετμημένες των κοινών στημείων των (ε), $\mathcal{C}_f$ είναι λύσεις της εξίσωσης
$x\text{ημ}\frac{1}{x} = 0$ και επομένως το α

- ή θα είναι μηδέν οπότε προφανώς $|\alpha| \leq \frac{1}{\pi}$
- είτε θα είναι λύση της $\text{ημ}\frac{1}{x} = 0$ δηλαδή $\alpha = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ και τότε $|\alpha| = \left|\frac{1}{k\pi}\right| = \frac{1}{|k|}\frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{\pi}$.

12.4 Διαφορικός Λογισμός.

12.4.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

1. Να μελετήσετε την f ώς προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

2. Αν $\alpha < \beta$ να βρείτε το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής της f και να αποδείξετε ότι είναι συνευθειακά.

2. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ που διέρχεται από το σημείο $P(0, \lambda)$;

12.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 2.7 Α4 i.)
2. Έχουμε:

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\xi)\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{\beta}-\beta-e^{\alpha}+\alpha}{\beta-\alpha}=e^{\xi}-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}-1=e^{\xi}-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}=e^{\xi}\Leftrightarrow$$

$$\xi=\ln\left(\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}\right).$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 2.8 Β1.
2. Η γενική εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0\,.f(x_0))$ της $\mathcal{C}_f$ είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Δεδομένου ότι $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ διέρχεται από το $(0,\lambda)$ αν και μόνο αν:

$$\lambda-\frac{x_0}{x_0^2+1}=\frac{1-x_0^2}{\left(x_0^2+1\right)^2}(0-x_0).$$

Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε ότι πρέπει

$$\lambda=\frac{2x_0^3}{\left(x_0^2+1\right)^2}.$$

Επομένως θα υπάρχει εφαπτομένη που διέρχεται από το $(0,\lambda)$ αν και μονο αν ρο λ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$g(x)=\frac{2x^3}{(x^2+1)^2}.$$

Προσδιορίζουμε το σύνολο τιμών κατά τα γνωστά. Είναι

$$g'(x) = \frac{2x^2\left(3 - x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

και $g'(x) > 0$ αν και μόνο αν $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ και $x \neq 0$. Επίσης τα όρια της g στα $\pm\infty$ είναι 0. Βάσει αυτών έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

Είναι $g\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$ και $g\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{3}$. Επομένως το σύνολο τιμών της g είναι το $I = \left[-\frac{3}{8}\sqrt{3}, \frac{3}{8}\sqrt{3}\right]$ και από το $P(0,\lambda)$ διέρχεται εφαπρομένη της $\mathcal{C}_f$ αν και μόνο αν $\lambda \in I$.

12.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

12.5.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

Αν για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g ισχύει $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ και $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$.

1. Να υπολογίσετε τα ολοκλήρωματα

   (α′) $\int_1^3 (2f(x) - 6g(x))\,dx$

   (β′) $\int_1^3 (2f(x) - g(x))\,dx$

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

   $$2f(x) + 5g(x) = 0$$

   έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[1,3]$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad x \in [1,\, e^2]$$

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2} f(x)\,dx$.

2. (α′) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
   (β′) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από
   - την γραφική παράσταση της f^{-1} και
   - τις ευθείες $x = 0$, $x = \frac{2}{e}$, $y = 0$.

12.5.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 3.4 Α4.

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$2\int_1^3 f(x)\,dx + 4\int_1^3 g(x)\,dx = 2\cdot 5 + 5\cdot(-2) = 0.$$

Άρα

$$\int_1^3 (2f(x) + 4g(x))\,dx = 0.$$

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση

$$h(x) = 2f(x) + 4g(x) \quad (*).$$

Αν η h δεν είχε ρίζα στο $[1,3]$ θα διατηρούσε πρόσημο και επομενως η η h ή η $-h$ θα ήταν θετική στο $[1,3]$. Θα ήταν τότε $\int_1^3 h(x)\,dx > 0$ ή $-\int_1^3 h(x)\,dx > 0$ πράγμα αδύνατον διότι από την $(*)$ έχουμε ότι $\int_1^3 h(x)\,dx = 0$. Επομένως η h, άρα και η δοθείσα εξίσωση έχει ρίζα στο $[1,3]$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 3.5 Β9 i).

2. (α′) Είναι

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2-\ln x}{\sqrt{x^3}}.$$

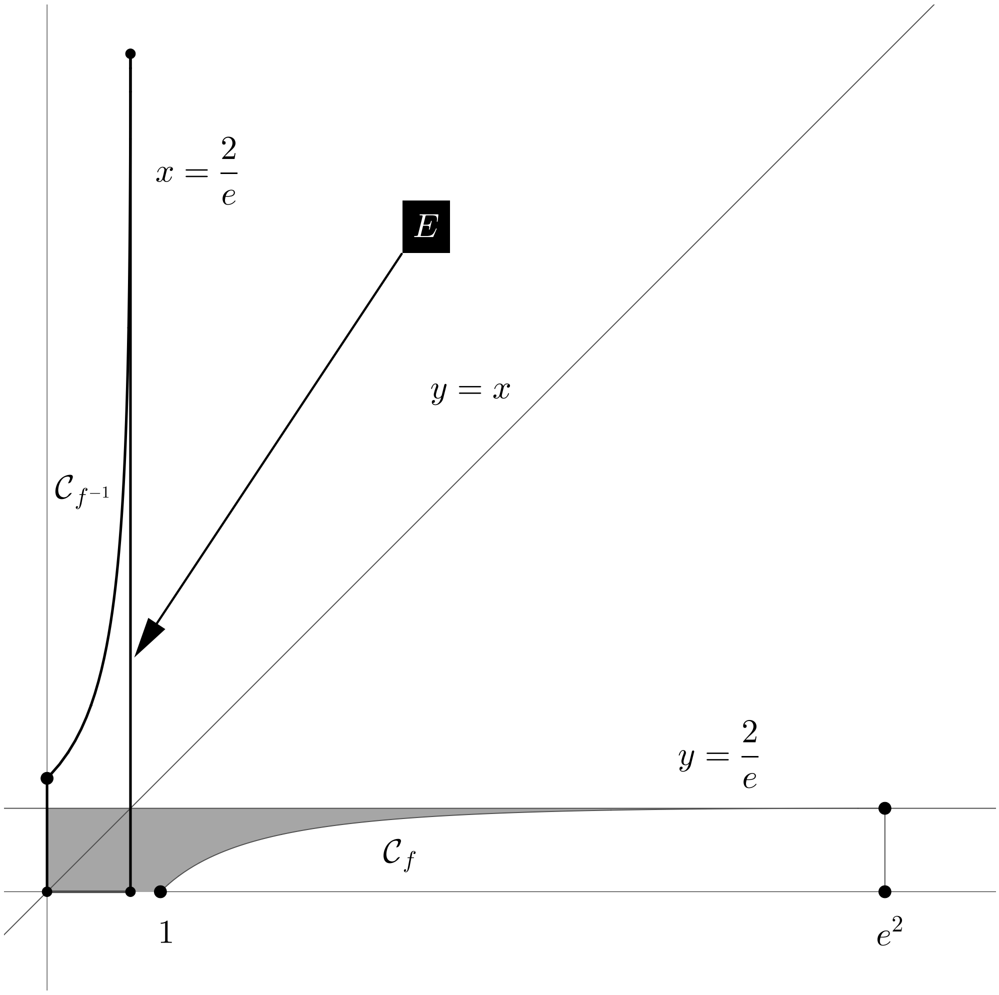
Είναι

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^2$$

και στο $\left(1, e^2\right)$ η f' είναι θετική άρα $f \uparrow$. Άρα η f είναι $1-1$ και επομένως αντιστρέψιμη.

(β′) Οι $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$. Η f παίρνει θετικές τιμές επομένως η $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο επομένως και το αυτό θα ισχύει για την συμμετρική της $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Το ζητούμενο εμβαδόν E μπορεί να προκύψει από συμμετρία και είναι όσο με το εμβαδόν του χωρίου που περοκλείεται από τους άξονες την $\mathcal{C}_f$ και την ευθεία $y = f\left(e^2\right)$ δηλαδή την $y = \frac{2}{e}$. Είναι

$$E = \int_0^1 \frac{2}{e}dx + \int_1^{e^2}\left(\frac{2}{e} - f(x)\right)dx = \int_0^{e^2}\frac{2}{e}dx - \int_1^{e^2} f(x)\,dx \underset{\text{Ερώτημα 1.}}{=} 2e-4$$



12.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

12.6.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$
$$g(x) = e^x f(x)$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

7 Μοναδες

2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα-κυρτά και τα σημεία καμπής.

6 Μοναδες

3. Για τις διάφορες τιμές του m να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = e^{m+x}$.

6 Μοναδες

4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

6 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$x^3 + (f(x))^3 = 1$$

1. Να βρείτε την f.

6 Μοναδες

2. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $\left[-2, \sqrt[3]{9}\right]$.

6 Μοναδες

3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi \in \left(-2, \sqrt[3]{9}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f\left(\sqrt[3]{9}\right) - f(-2)}{\sqrt[3]{9} + 2} = f'(\xi)$$

6 Μοναδες

4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

7 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \text{ημ}x - \frac{2}{\pi}x \quad , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = 0$$

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\text{ημ}x > \frac{2}{\pi}x$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έστω $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} &\bullet \quad \phi(x) > 0 \\ &\bullet \quad 2\phi(x) = x\phi'(x) \end{aligned} \tag{12.4}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε:

$$\phi(x) = cx^2 \ \text{ για κάθε } \ x \geq 0$$

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

(β′) Αν επιπλέον η γραφική παράσταση της ϕ διέρχεται από το σημείο $P(1,1)$ να βρεθεί ποιό σημείο της γραφικής παράστασης απέχει από το σημείο $Q(0,1)$ ελάχιστη απόσταση.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0, +\infty)$, που για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0$ και έχει την ιδιότητα:

Αν $M(t, f(t))$, $t > 0$ είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης $\mathcal{C}_f$ τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από

- την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = t$, $y = 0$

είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία

- $O(0,0)$, $A(t,0)$,$M(t, f(t)$, $B(0, f(t))$

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Σχολικό έτος 2011-2012

13.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

13.1.1 Εκφωνήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Για δύο μιγαδικούς z_1, z_2 να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_1|^2$$

2. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w είναι γνωστό ότι $|z| = |w| = 1$ και $|z + w| = \sqrt{3}$.

   (α′) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z, w είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

   (β′) Να αποδείξετε ότι $z^2 + w^2 = zw$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $\mathcal{L}$ ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$\mathrm{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = -3\mathrm{Im}\,(z) \tag{13.1}$$

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο $\mathcal{L}$.

2. Σε κάθε z που ικανοποιεί την (13.1) και είναι διάφορος του $\frac{1}{2}$ αντιστοιχούμε τον μιγαδικό

$$w = \frac{2}{2z - 1}.$$

   Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του w.

13.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α′ Μέρος, § 2.3 Α9.

2. (α′) Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2,$$

επομένως $3 + |z-w|^2 = 4$ από την οποία προκύπτει ότι $|z-w| = 1$. Το τρίγωνο του οποίου κορυφές είναι οι εικόνες των 0, z, w έχει πλευρές ίσες με $|z-0| = 1$, $|w-0| = 1$ και $|z-w| = 1$ άρα είναι ισόπλευρο.

(β′) Είναι $z\bar{z} = w\bar{w} = 1$. Από την $|z+w|^2 = 3$ έχουμε ότι

$$z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} = 3,$$

από την οποία έχουμε ότι

$$z\bar{w} + \bar{z}w = 1$$

και

$$z\frac{1}{w} + \frac{1}{z}w = 1,$$

από την οποία έχουμε το αποδεικτέο.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α′ Μέρος, § 2.2 Β9 β).

2. Θέλουμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο, έστω $\mathcal{Q}$ των εικόνων των μιγαδικών $w = \frac{2}{2z-1}$ με $z \neq \frac{1}{2}$, $z \in \mathcal{L}$. Θα είναι $z = \frac{1}{2}\frac{w+2}{w}$, $w \neq 0$ και από το προηγούμενο ερώτημα θα είναι

$$\left|\frac{1}{2}\frac{w+2}{w}\right|^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad \mathrm{Im}\,(w) = 0.$$

Άρα

$$\frac{w+2}{2w}\cdot\frac{\bar{w}+2}{2\bar{w}} = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{w+2}{2w} - \frac{\bar{w}+2}{2\bar{w}} = 0,$$

ή ισοδύναμα:

$$w + \bar{w} = -2 \quad \text{ή} \quad w - \bar{w} = 0.$$

Επομένως ο $\mathcal{Q}$ απαρτίζεται από τα σημεία

- της ευθείας $x = -1$ και
- της ευθείας $y = 0$ από την οποία έχει εξαιρεθεί η αρχή των αξόνων αφού $w \neq 0$.

13.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

13.2.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \text{ και } g(x) = \frac{x}{1-x}$$

1. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg και $\frac{f}{g}$.
2. (α΄) Να βρεθεί ο α ώστε η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x) & x < \alpha \\ f(x) & x \geq \alpha \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα $f = \frac{1}{g^{-1}}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

1. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x.
2. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία ε του επιπέδου έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την γραφική παράσταση $\mathcal{C}_f$ της f.

13.2.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 1.2 Α8
2. (α΄) Πρέπει

$$\lim_{x\to a^-} \varphi(x) = \lim_{x\to a^+} \varphi(x) = \varphi(a),$$

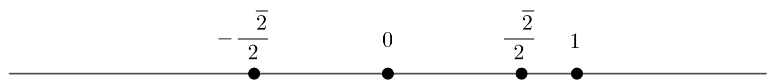
δηλαδή

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Επομένως πρέπει κατ΄αρχάς η f να ορίζεται στο a δηλαδή $a \neq 0$ και το όριο της g στο a^- να είναι πραγματικός αριθμός άρα $a \neq 1$. Επομένως πρέπει $f(a) = g(a)$. Έχουμε

$$f(a) = g(a) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Αλλά πρέπει η g να ορίζεται στα σημεία του $(-\infty, a)$ και η f στα σημεία του $[a, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι το $(-\infty, a)$ δεν πρέπει να περιέχει το 1 και το $[a, +\infty)$ δεν πρέπει να έχει ως στοιχείο το 0. Άρα η μόνη επιλογή είναι $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.



(β΄) Είναι $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - 1$. Έχουμε:

$$y \in g(\mathcal{D}_g) \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} \text{υπάρχει} & x \in \mathcal{D}_g & \text{ώστε} & g(x) = y \Leftrightarrow \\ \text{υπάρχει} & x \neq 1 & \text{ώστε} & \dfrac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \\ \text{υπάρχει} & x \neq 1 & \text{ώστε} & x = y - xy \Leftrightarrow \\ \text{υπάρχει} & x \neq 1 & \text{ώστε} & (1+y)\,x = y \end{array}$$

Για $y = -1$ η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη ενώ για $y \neq -1$ έχει μοναδική λύση $x = \frac{y}{y+1}$ η οποία είναι διάφορη του 1. Επομένως το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R} - -1$. Αυτό είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της η οποία έχει τύπο

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Η $\frac{1}{g^{-1}}$ θα έχει πεδίο ορισμού που απαρτίζεται από τα σημεία που ορίζεται η g^{-1} και είναι διάφορη του μηδενός. Άρα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - -1, 0$. Ο τύπος της δε είναι

$$\frac{1}{g^{-1}}(x) = \frac{1}{g^{-1}((x))} = \frac{1}{\frac{x}{1+x}} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις f και $\frac{1}{g^{-1}}$ μολονότι έχουν τον ίδιο τύπο δεν είναι ίσες διότι έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού.

ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 1.8 Α9 i) .

2. Οι ευθείες του επιπεδου έχουν τη μορφή:

$$x = x_0 \quad \text{ή} \quad y = \alpha x + \beta.$$

Μια ευθεία της πρώτης κατηγορίας τέμνει πάντ την $\mathcal{C}_f$ αφού έχει κοινό σημείο με αυτήν το $(x_0, f(x_0))$.

Θα δείξουμε ότι κάθε ευθεία της δεύτερης κατηγορίας τέμνει την $\mathcal{C}_f$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = \alpha x + \beta \end{array}\right\}$$

έχει μία τουλάχιστον λύση (x, y) ή ισοδύναμα ότι η εξίσωση

$$f(x) = \alpha x + \beta,$$

δηλαδή η

$$x^3 + 2x^2 - (\alpha + 1)x - (\beta + 2) = 0,$$

έχει λύση ως προς x. Πράγματι η συνεχής συνάρτηση

$$\sigma(x) = x^3 + 2x^2 - (\alpha + 1)x - (\beta + 2)$$

έχει στα $\mp\infty$ όρια τα

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

Επομένως θα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2 ώστε

$$\varphi(x_1) < 0 \qquad \varphi(x_2) < 0,$$

οι οποίοι θα είναι προφανώς διάφοροι. Εφαρμοζοντας το θεώρημα του Bolzano φστο κλειστό διάστημα με άκρα x_1, x_2 συμπεραίνουμε ότι η φ έχει μια ρίζα μεταξύ των x_1, x_2.

13.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

13.3.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = f(x)^{f(x)}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε την g'.

6 Μοναδες

3. Να βρείτε τα κοινά σημεία των $\mathcal{C}_f$,$\mathcal{C}_g$.

7 Μοναδες

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $M(a,b)$ της $\mathcal{C}_f$ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της f στο a είναι ίσος με b.

7 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-\sqrt{3x-2}}{x-2}=k\in\mathbb{R}$$

1. Να βρείτε το $f(2)$.

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

7 Μοναδες

3. Δίνεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $M(2,f(2))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

   (α′) Να βρείτε το k.

   5 Μοναδες

   (β′) Να βρείτε το όριο

   $$\lim_{x\to 2}\frac{f(f(x))-\sqrt{3f(x)-2}}{x-2}$$

8 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w τέτοιοι ώστε

- $zw=1$
- Οι εικόνες των z,w και η αρχή O των αξόνων να σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφή ορθής γωνίας την O.

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z, w.

9 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι ο z^2 είναι φανταστικός.

8 Μοναδες

3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $|z - w| = \sqrt{2}$ βρείτε το $|z|$

8 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και αριθμοί γ, δ τέτοιοι ώστε $\alpha < \gamma < \delta < \beta$ και $f(\gamma) < f(\delta)$. Υποθέτουμε η f έχει την ιδιότητα:

$$(f(x) - f(\gamma))(f(x) - f(\delta)) \le 0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta]$$

1. Να αποδείξετε ότι τα $f(\gamma)$,$f(\delta)$ είναι, αντιστοίχως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f.

9 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = \frac{\beta f(\gamma) + x f(\delta) - \alpha f(\delta) - x f(\gamma)}{\beta - a}$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[\alpha, \beta]$.

9 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g : [0, \delta - \gamma] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x + \gamma)$ έχει το ίδιο σύνολο τιμών με της f.

7 Μοναδες

13.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Είναι $\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$. Για να ορίζεται η g πρέπει $f(x) > 0$ δηλαδή $x > 1$. Τελικά $\mathcal{D}_g = (1, +\infty)$.

2. Είναι
$$g(x) = (\ln x)^{\ln x} = \left(e^{\ln\ln x}\right)^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln\ln x}.$$
Επομένως
$$g'(x) = (\ln x \cdot \ln\ln x)' \cdot e^{\ln x \cdot \ln\ln x} = \left(\frac{1}{x}\ln\ln x + \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\ln x \cdot \ln\ln x}.$$

3. Ισχύει:
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (f(x))^{f(x)} \Leftrightarrow$$
$$(f(x))^{f(x)-1} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = e.$$
Επομένως υπάρχει ένα κοινό σημείο το $(e, 1)$.

4. Αφού $f(a) = b$ θα πρέπει $f'(a) = f(a)$ δηλαδή $\frac{1}{a} = \ln a$ ή ισοδύναμα
$$a \ln a = 1 \quad (*).$$
Παρατηρούμε ότι δε μπορεί $0 < a < 1$ διότι το α′ μέλος της $(*)$ θα είναι αρνητικό. Επειδή η τιμή $a = 1$ αποκλείεται θα πρέπει $a > 1$. Στο $(1, +\infty)$ η συνάρτηση $h(x) = x\ln x - 1$ είναι, όπως εύκολα διαπιστώνεται με τον ορισμό. γνησίως αύξουσα. Επίσης τα όρια της στα 1, $+\infty$ είναι -1, $+\infty$ επομένως έχει σύνολο τιμών $(-1, +\infty)$ το οποίο περιέχει το 0. Άρα η h έχει μια μοναδική ρίζα.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Ορίζουμε την συνάρτηση:
$$g(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3x-2}}{x-2}, \quad x \neq 2.$$
Θα είναι $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = k$ και
$$f(x) = g(x)(x-2) + \sqrt{3x-2}.$$
Παίρνοντας όρια για $x \to 2$ στην τελευταία σχέση και αξιοποιώντας την συνέχεια της f βρίσκουμε ότι $f(2) = 2$.

2. Είναι:
$$\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = g(x) + \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2}$$
και
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}^2 - 2^2}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)} = \frac{3}{4}.$$
Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και $f'(2) = k + \frac{3}{4}$.

3. (α′) Θα είναι $f'(2) = \text{εφ}\frac{\pi}{4}$ και επομένως $k + \frac{3}{4} = 1$ δηλαδή $k = \frac{1}{4}$.

   (β′) Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(f(x)) - \sqrt{3f(x)-2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{f(f(x)) - \sqrt{3f(x)-2}}{f(x)-2}\cdot\frac{f(x)-2}{x-2}\right)$$

   και

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(f(x)) - \sqrt{3f(x)-2}}{f(x)-2} \underset{f(x)=u}{=} \lim_{u\to 2}\frac{f(u)-\sqrt{3u-2}}{u-2} = k = \frac{1}{4}.$$

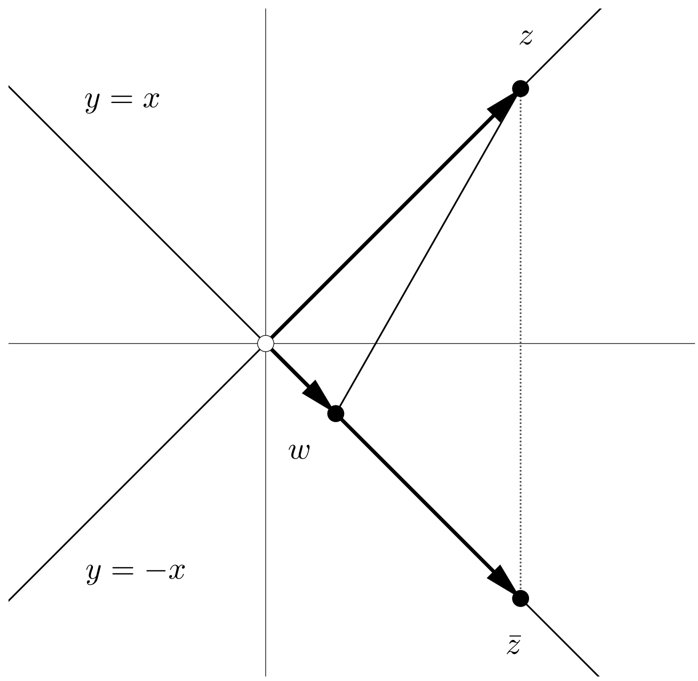
   Επομένως το ζητούμενο όριο είναι $\frac{1}{4}f'(2) = \frac{1}{4}$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Από την σχέση $zw = 1$ έχουμε ότι

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z},$$

άρα το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο w είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\bar{z}$. Αλλά οι εικόνες των z, $\bar{z}$ είναι συμμετρικές ως πρός τον άξονα των x. Επομένως το αυτό θα συμβαίνει και με τις ευθείες που συνδέουν το O με τις εικόνες των z, w και ο άξονας των x είναι διχοτόμος της γωνίας τους. Αλλά η γωνία είναι ορθη επομένως κάθε μια από τις δύο αυτές ευθείες σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$. Άρα πρόκειται για τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$. Για οποιαδήποτε επιλογή του $z \neq 0$ με εικόνα στην ευθεία με $y = x$ η εικόνα του $w = \frac{1}{z}$ ανήκει στην ευθεία $y = -x$. Αν ο $z \neq 0$ επιλεγεί ώστε η εικόνα του να ανήκει στην $y = -x$ η εικόνα του $w = \frac{1}{z}$ θα ανήκει στην $y = x$. Τελικά ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η έχνωση των δύο ευθειών από την οποία εξαιρείται το σημείο τομής τους O.



2. Αφού η εικόνα του z ανήκει σε κάποια από τις $y = x$, $y = -x$ ϑα είναι $z = a \pm ai$ οπότε

$$z^2 = (a \pm ai)^2 = a^2 - a^2 \pm 2a^2 i = \pm 2a^2 i$$

και ο z^2 είναι φανταστικός.

3. Είναι

$$|z - w| = \left| z - \frac{1}{z} \right| = \frac{\left|z^2 - 1\right|}{|z|} = \frac{\left|\pm 2a^2 - 1\right|}{[a \pm ai]}$$

και από την $|z - w| = \sqrt{2}$ προκύπτει

$$\frac{1 + \left(\pm 2a^2\right)^2}{2\alpha^2} = 2,$$

από την οποία βρίσκουμε

$$\left(2a^2 - 1\right)^2 = 0$$

και από αυτήν τις παρακάτω τιμές του z:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i, \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Από την σχέση $(f(x) - f(\gamma))(f(x) - f(\delta)) \leq 0$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε x το $f(x)$ θα βρίσκεται στο κλειστό διάστημα $[f(\gamma), f(\delta)]$ των ριζών $f(\gamma)$ $f(\delta)$ του τριωνύμου $(t - f(\gamma))(t - f(\delta))$ δηλαδή για όλα τα x θα ισχύει
$$f(\gamma) \leq f(x) \leq f(\delta).$$
Επειδή τα $f(\gamma)$ και $f(\delta)$ είναι τιμές της f το η πρώτη θα είναι η ελάχιστη και η δεύτερη η μέγιστη τιμή της.

2. Ορίζουμε την συνεχή συνάρτηση
$$h(x) = f(x) - \frac{\beta f(\gamma) + x f(\delta) - \alpha f(\delta) - x f(\gamma)}{\beta - \alpha}$$
ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Είναι
$$h(\alpha) = f(\alpha) - f(\gamma) \geq 0, \quad h(\beta) = f(\beta) - f(\delta) \leq 0$$
και από το θεώρημα του Bolzano η h, άρα και η δοθείσα εξίσωση, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

3. Αφού $g(x) = f(x + \gamma)$ οι τιμές της g είναι τιμές της f. Αλλά και μια οποιαδήποτε τιμή $f(t)$ της f θα είναι τιμή της g. Διότι η $f(t)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(\gamma)$ και $f(\delta)$ και αφού $g(0) = f(\gamma)$, $g(\delta - \gamma) = f(\delta)$ η g παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές άρα και την $f(t)$. Επομένως τα δύο σύνολα τιμών συμπίπτουν.

13.4 Διαφορικός Λογισμός.

13.4.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ -1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι

   (α′) Η f είναι συνεχής.

   (β′) $f'(1) = -\frac{1}{2}$

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + x + 1, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

1. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2. (α΄) Να αποδείξετε ότι για όλα τα x ισχύει $3f(x) - xf'(x) > 0$.

   (β΄) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f.

13.4.2 Απαντήσεις

Θεμα 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 2.9 Β4.

2. Είναι $f'(x) = \frac{\ln x-(x-1)}{(-1+x)^2}$ για $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ και $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Επειδή $\ln x \leq x-1$ για όλα τα $x > 0$ και το «ίσον» ισχύει μόνο για $x = 1$ συνάγουμε ότι $f'(x) < 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$ επομένως $f \downarrow$.

Θεμα 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ μέρος § 2.7 Α5.

2. (α΄) Ισχύει

   $$3f(x) - xf'(x) = 3x^2 + 2x + 3.$$

   Το τριώνυμο $3x^2 + 2x + 3$ έχει αρνητική διακρίνουσα επομένως για όλα τα x είναι ομόσημο του 3 δηλαδή θετικό και το αποδεικτέο έπεται.

   (β΄) Ισχύει

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^3 = \mp\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^3 = \pm\infty,$$

   ανάλογα με το αν $a > 0$ ή $a < 0$. Σε κάθε περίπτωση η f παίρνει ετερόσημες τιμές σε κάποια x_1, x_2 και από το θεώρημα του Bolzano θα υπάχει ρίζα της f. Επομένως η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Τώρα για την f', η οποία είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

   Η f' έχει το πολύ μια ρίζα. Τότε για όλα τα x εκτός, ενδεχομένως μιας τιμής της ρίζας, θα έχει το πρόσημο του a και επομένως η f θα είναι γνησίως μονότονη. Άρα η ρίζα της θα είναι μοναδική.

   Η f' έχει δύο ρίζες. Ας τις πούμε $\rho_1 < \rho_2$. Για το a διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $a > 0$ έχουμε για την f τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής:

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Από το ερώτημα 2 (α΄) έχουμε:

$$3f(\rho_1) > \acute{f}(\rho_1) = 0, \quad 3f(\rho_2) > \acute{f}(\rho_2) = 0.$$

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, \rho_1)$.

- Αν $a > 0$ έχουμε για την τον πίνακα:

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Με το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη περίπτωση βρίσκουμε ότι οι τιμές της f στα ρ_1, ρ_2 είναι θετικές κααι επομένως η f έχει μοναδική ρίζα στο $(\rho_2, +\infty)$.

Επομένως συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η f έχει μοναδική ρίζα.

13.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

13.5.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται:

1. Από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.
2. Από την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $y = -x$.

ΘΕΜΑ 2

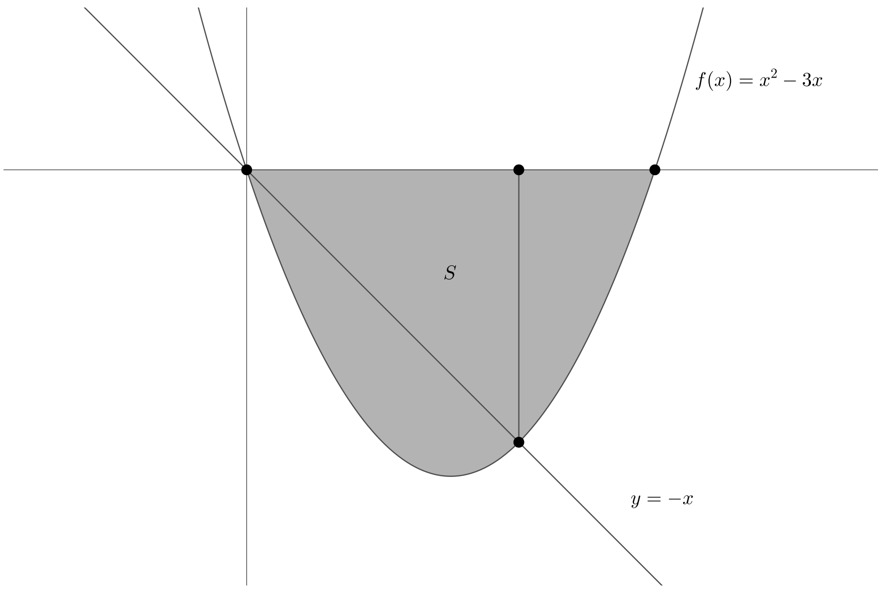
Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$I = \int_4^6 g(x)dx$$
2. Έστω $h(t) = \int_4^6 g(tx)dx$.
   (α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h.
   (β′) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 2$.

13.5.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.7 Α4.
2. Εξετάζουμε μήπως υπάρχουν κοινά σημεία της $\mathcal{C}_f$ και της $y = -x$ εξετάζοντας την εξίσωση
$$x^2 - 3x = -x$$
η οποία έχει λύσεις 0 και 2. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι
$$E = \int_0^2 |f(x) - (-x)|\, dx.$$
Η συνεχής συνάρτηση $f(x) - (-x)$ δεν έχει ρίζες στο $(0,3)$ άρα διατηρεί πρόσημο το οποίο μπορεί να βρεθεί δίνοντας μια τιμή στο x. Για $x - 1$ βρίσκουμε$f(1) - (-1) = -1$ το πρόσημο είναι $-$. Άρα
$$E = \int_0^2 -(f(x) - (-x))\, dx = \frac{4}{3}.$$



Θεμα 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.5 Β7 i).

2. (α′) Πρέπει για κάθε $x \in [4,6]$ το $g(tx)$ να ορίζεται. Δηλαδή $tx \in \mathcal{D}_f$. Αλλά
$$\mathcal{D}_f = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty).$$
Άρα πρέπει όταν $x \in [4,6]$ να είναι
$$tx \le -2 \quad \text{ή} \quad tx \ge 2$$
ή αλλιώς
$$t \le \frac{-2}{x} \quad \text{ή} \quad t \ge \frac{2}{x}.$$
Επομένως πρέπει
$$t \le \text{ ελάχιστη τιμή της } \qquad \frac{-2}{x},\ x \in [2,6]$$
και
$$t \ge \text{ μέγιστη τιμή της } \qquad \frac{2}{x},\ x \in [2,6].$$
Επειδή τόσο η μέγιστη όσο και η ελάχιστη τιμή επιτυγχάνονται όταν $x = 2$ έχουμε ότι πρέπει $t \le -1$ ή $t \ge 1$. Τελικά
$$\mathcal{D}_h = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty).$$

(β′) Μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα στην σχέση που ορίζει την h με την αλλαγή μεταβλητής $u = tx$ οπότε
$$du = tdx \quad \boxed{\begin{array}{cc} x & u \\ 4 & 4t \\ 6 & 6t \end{array}}$$
και έχουμε:
$$h(t) = \int_4^6 g(tx)dx = \frac{1}{t}\int_{4t}^{6t} g(u)du \underset{\text{Ερώτημα 1.}}{=} \frac{1}{t}\left[\sqrt{u^2-4}\right]_{4t}^{6t}$$
και
$$h(t) = \frac{2\left(\sqrt{9t^2-1}-\sqrt{4t^2-1}\right)}{t}.$$
Επομένως
$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2\left(\sqrt{9t^2-1}-\sqrt{4t^2-1}\right)\left(\sqrt{9t^2-1}+\sqrt{4t^2-1}\right)}{t\left(\sqrt{9t^2-1}+\sqrt{4t^2-1}\right)} =$$
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{10t^2}{t^2\left(\sqrt{9-\frac{1}{t^2}}+\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}\right)} = 2$$

13.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

13.6.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$
$$g(x) = e^x f(x)$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα-κυρτά και τα σημεία καμπής.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Για τις διάφορες τιμές του m να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = e^{m+x}$.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} g(x)\, dx$.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$x^3 + (f(x))^3 = 1$$

1. Να βρείτε την f.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται για την f το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $\left[-2, \sqrt[3]{9}\right]$.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi \in \left(-2, \sqrt[3]{9}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f\left(\sqrt[3]{9}\right) - f(-2)}{\sqrt[3]{9} + 2} = f'(\xi)$$

6 Μοναδες

4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

7 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x - \frac{2}{\pi}x \quad , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = 0$$

9 Μοναδες

2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f.

8 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\eta\mu x > \frac{2}{\pi}x$$

8 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έστω $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} &\bullet \quad \phi(x) > 0 \\ &\bullet \quad 2\phi(x) = x\phi'(x) \end{aligned} \tag{13.2}$$

(α′) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε:

$$\phi(x) = cx^2 \ \text{ για κάθε } \ x \geq 0$$

8 Μοναδες

(β′) Αν επιπλέον η γραφική παράσταση της ϕ διέρχεται από το σημείο $P(1,1)$ να βρεθεί ποιό σημείο της γραφικής παράστασης απέχει από το σημείο $Q(0,1)$ ελάχιστη απόσταση.

8 Μοναδες

2. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,+\infty)$, που για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>0$ και έχει την ιδιότητα:

   Αν $M(t,f(t))$, $t>0$ είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης $\mathcal{C}_f$ τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από

   - την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες $x=0$, $x=t$, $y=0$

   είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία

   - $O(0,0)$, $A(t,0)$,$M(t,f(t)$, $B(0,f(t))$

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

13.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Έχουμε
$$f'(x)=4x(x-1)(x+1).$$
   Στα $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$ έχουμε αντιστοίχως ότι η f' είναι αρνητική, θετική, αρνητική, θετική επομένως $f\downarrow$ στο $(-\infty,-1]$, $f\uparrow$ στο $[-1,0]$, $f\downarrow$ στο $[0,1]$ και $f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$. Η f προφανώς στ $\pm\infty$ έχει όριο $=\infty$. Είναι $f(-1)=f(1)=2$ και το 2 είναι (ολικό) ελάχιστο ενώ $f(0)=3$ και το 3 είναι τοπικό μέγιστο.

2. Η f'' στα $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3},+\infty\right)$ είναι θετική και επομένως η f στα $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}\sqrt{3},+\infty\right)$ είναι κυρτή ενώ στο $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3},\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ είναι αρνητική και η f στο $\left[-\frac{1}{3}\sqrt{3},\frac{1}{3}\sqrt{3}\right]$ είναι κοίλη. Τα σημεία $\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3},f\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\right)$ είναι σημεία καμπής της f.

3. Η εξίσωση $g(x)=e^{m+x}$ ισοδυναμεί με την $f(x)=e^m$. Παρατηρούμε ότι
$$f((-\infty,-1])=f([1,+\infty))=[2,+\infty),$$
$$f([-1,0])=f([0,1])=[2,3].$$
   Μας ενδιαφέρουν οι τιμές του m για τις οποίες το e^m είναι τιμή της f και πόσες φορές η f παίρνει αυτή την τιμή. Είναι

   - $e^m<2\Leftrightarrow m<\ln 2$
   - $2<e^m<3\Leftrightarrow \ln 2<m<\ln 3$
   - $3<e^m\Leftrightarrow \ln 3<m$

   Από τα στοιχεία αυτά έχουμε τον πίνακα:

m	$-\propto$	$\ln 2$		$\ln 3$	$+\propto$
Πλήθος ριζών της $f(x) = e^m$	0	2	4	3	2

4. Εφαρμόζουμε διαδοχικά την τεχνική της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (e^x)' f(x)\,dx = [e^x f(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x f'(x)\,dx =$$

$$2e - 2e^{-1} - \int_{-1}^{1} (e^x)' f'(x)\,dx = 2e - 2e^{-1} - \left[e^x f'(x)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^x f''(x)\,dx =$$

$$2e - 2e^{-1} + \int_{-1}^{1} (e^x)' f''(x)\,dx = 2e - 2e^{-1} + \left[e^x f''(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x f'''(x)\,dx =$$

$$2e - 2e^{-1} + 8e - 8e^{-1} - \int_{-1}^{1} (e^x)' f'''(x)\,dx =$$

$$10e - 10e^{-1} - \left[e^x f'''(x)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^x f''''(x)\,dx =$$

$$10e - 10e^{-1} - \left(24e + 24e^{-1}\right) + 24\left(e^1 - e^{-1}\right) = 10e - 58e^{-1}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Έχουμε $(f(x))^3 = 1 - x^3$ και επομένως λύνοντας την εξίσωση ως προς $f(x)$, η οποία είναι της μορφής $X^3 = A$, βρίσκουμε κατά τα γνωστά:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1 - x^3} & , \quad x < 1 \\ -\sqrt[3]{x^3 - 1} & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. Η f είναι προφανώς συνεχής και παραγωγίσιμη στα $x_0 \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Επίσης

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0,$$

επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αλλά

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{x - 1} = -\lim_{x \to 1^-} \sqrt[3]{\frac{1 - x^3}{(1 - x)^3}} = -\lim_{x \to 1^-} \sqrt[3]{\frac{1 + x + x^2}{(1 - x)^2}} = -\infty.$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ενώ η f είναι συνεχής στο $\left[-2, \sqrt[3]{9}\right]$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-2, \sqrt[3]{9}\right)$ άφού δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο του 1 και κατά συνέπεια δεν εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής διότι δεν πληρούνται όλες οι υποθέσεις του.

3. Είναι:

$$\frac{f\left(\sqrt[3]{9}\right) - f(-2)}{\sqrt[3]{9}+2} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}^3 - 1} - \sqrt[3]{1-(-2)^3}}{\sqrt[3]{9}+2} = \frac{2-\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}+2} = -1.$$

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει $\xi \in \left(-2, \sqrt[3]{9}\right)$ ώστε $f'(\xi) = -1$ Για $x < 1$ έχουμε

$$\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)' = \left(\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = -3x^2\left(1-x^3\right)^{-\frac{2}{3}},$$

ενώ για $x > 1$ έχουμε:

$$\left(-\sqrt[3]{x^3-1}\right)' = \left(-\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = -3x^2\left(x^3-1\right)^{-\frac{2}{3}},$$

Επομένως:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2\left(1-x^3\right)^{-\frac{2}{3}} & , \ x < 1 \\ * & , \ x = 1 \\ -3x^2\left(x^3-1\right)^{-\frac{2}{3}} & , \ x \geqslant 1 \end{cases}$$

Βλέπουμε οτι $f'(0) = 0$ ενώ όλες οι άλλες τιμές της f' είναι αρνητικές. Είναι

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(-3x^2\left(1-x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-3x^2}{\left(1-x^3\right)^{\frac{2}{3}}}\right) = -\infty,$$

επομένως η f' παίρνει και τιμές μικρότερες του -1. Επειδή στο $(-\infty, 1)$ είναι συνεχής θα υπάρχει τιμή ξ μεταξύ 0 και -1 ώστε $f'(\xi) = -1$. Η τιμή αυτή ανήκει και στο $\left(-2, \sqrt[3]{9}\right)$ και επομένως η απάντηση στο ερώτημα είναι καταφατική.

4. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Εξετάζουμε αν έχει ασύμπτωτες για $x \to \pm\infty$.

$x \to +\infty$ Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt[3]{x^3-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} = -1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)\left(\sqrt[3]{x^3}^2+\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{x^3-1}^3\right)}{\sqrt[3]{x^3}^2+\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{x^3-1}^3}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3}^3-\sqrt[3]{x^3-1}^3}{\sqrt[3]{x^3}^2+\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{x^3-1}^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^3}^2+\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{x^3-1}^3}=0$$

Επομένως στο $+\infty$ η f έχει ασύμπτωτη την $y=-x$

$x\to-\infty$ Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία βρίσκουμε ότι και στο $-\infty$ η f έχει ασύμπτωτη την $y=-x$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Είναι $f'(x)=\text{συν}x-\frac{2}{\pi}$ και $f''(x)=-\text{ημ}x$. Η f'' είναι αρνητική στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Το σύνολο τιμών της, αφού είναι συνεχής είναι το

$$\left[f'\left(\frac{\pi}{2}\right),f'(0)\right]=\left[-\frac{2}{\pi},\frac{\pi-2}{\pi}\right],$$

το οποίο περιέχει το 0. Επομένως η f' έχει μία ρίζα x_0 στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η οποία λόγω μονοτονίας είναι μοναδική.

2. Για $x<x_0$ θα είναι $f'(x)>0$ και για $x>x_0$ είναι $f'(x)<0$. Αρα $f\uparrow$ στο $[0,x_0]$ και $f\downarrow$ στο $\left[x_0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Έχουμε ότι $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ και λόγω της μονοτονίας θα είναι $f(x)>0$ για όλα τα $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ από την οποία έπεται η αποδεικτέα ανισότητα.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. (α′) Για $x>0$ από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\left(\frac{\phi(x)}{x^2}\right)'=\frac{\phi'(x)x^2-2x\phi(x)}{x^4}=\frac{\phi'(x)x-2\phi(x)}{x^3}=0.$$

Επομένως $\frac{\phi(x)}{x^2}=c$ για $x>0$. Λόγω συνεχείας θα είναι $\phi(0)=0$ επομένως $\frac{\phi(x)}{x^2}=c$ για $x\geq 0$. Αφού στα θετικά x η ϕ είναι θετική θα είναι $c>0$.

(β′) Αφού $\phi(1)=1$ είναι $c=1$ και επομένως στην περίπτωση αυτή $\phi(x)=x^2$. Η απόσταση $d(x)$ του τυχόντος σημείου $x,\phi(x))$ της $\mathcal{C}_\phi$ από το Q είναι

$$d(x)=\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2}=\sqrt{x^4-x^2+1}\ ,\ x\geq 0$$

και, προφανώς, γίνεται ελάχιστη όταν η

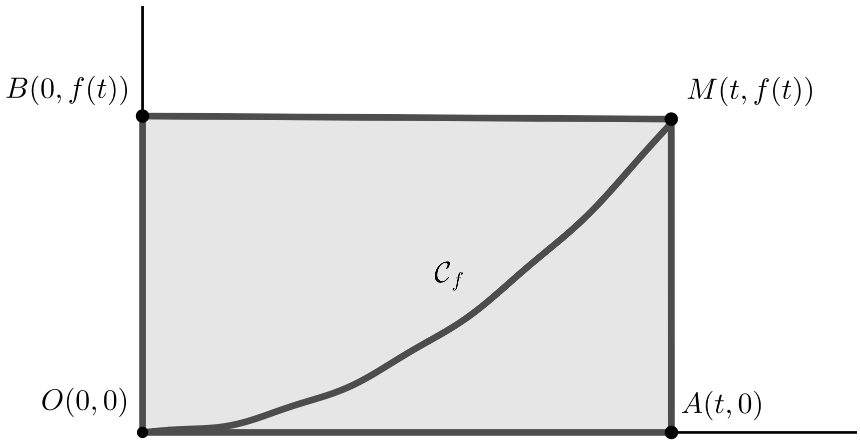
$$g(x) = x^4 - x^2 + 1\,, \ \ x \geq 0,$$

γίνει ελάχιστη. Είναι

$$g'(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right),$$

η οποία είναι αρνητική στο $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και θετική στο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Στο $\frac{\sqrt{2}}{2}$ η g' μηδενίζεται και αυτό είναι θέση ελαχίστου της g άρα και της d. Επομένως το ζητούμενο σημείο της $\mathcal{C}_\phi$ είναι το $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $tf(t)$ ενώ το εμβαδόν που σχηματίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης θα είναι $\int_0^t f(x)\,dx$.



Επομένως για τα θετικά t θα ισχύει:

$$\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{3}tf(t)\,.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω βρίσκουμε ότι $3f(t) = f(t) + tf'(t)$ δηλαδή

$$2f(t) = tf'(t)\,, \ \ t > 0.$$

Από τα προηγούμενα ερωτήματα συνάγουμε ότι $f(x) = cx^2$ με $c > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

Σχολικό έτος 2012-2013

14.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

14.1.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και τον μιγαδικό

$$z = \frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$$

1. Να εξετάσετε πότε ο z είναι πραγματικός
2. Έστω
$$w = \frac{(\alpha - \gamma) + (\delta - \beta)\, i}{(\delta + \beta) + (\alpha + \gamma)\, i}$$
Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός τότε $|z| = 1$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω
$$w = \frac{2z - i}{iz + 2}$$
Υποθέτουμε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο $\mathcal{C}$ κέντρου $O\,(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$.

1. Να αποδείξετε ότι και η εικόνα του w ανήκει στον $\mathcal{C}$.
2. (α΄) Να αποδείξετε ότι
$$0 \leq |z - w| \leq 1$$
(β΄) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της απόστασης των εικόνων των z, w.

14.1.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο, Μέρος Α΄, § 2.2 Β1.
2. Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{w} = w \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\alpha-\gamma)-(\delta-\beta)\,i}{(\delta+\beta)-(\alpha+\gamma)\,i} = \frac{(\alpha-\gamma)+(\delta-\beta)\,i}{(\delta+\beta)+(\alpha+\gamma)\,i} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2+\delta^2 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο, Μέρος Α΄, § 2.3 Β5.
2. (α΄) Θέλουμε $0 \acute{\le} |z-w| \le 1$. Είναι

$$|z-w| = \left|z - \frac{2z-i}{iz+2}\right| = \left|\frac{z^2+1}{iz+2}\right|.$$

Αλλά

$$\left|\frac{z^2+1}{iz+2}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|z^2+1\right| \le |iz+2| \Leftrightarrow \left|z^2+1\right|^2 \le |iz+2|^2 \underset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(x^2-y^2+1\right)^2 + (2xy)^2 \le (2-y)^2 + x^2 \underset{x^2=1-y^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(1-y^2-y^2+1\right)^2 + 4\left(1-y^2\right)y^2 \le (2-y)^2 + \left(1-y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$0 \le (2y-1)^2.$$

Επομένως η αποδεικτέα ισχύει.

(β΄) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι η απόσταση των εικόνων των z, w βρίσκεται μεταξύ 0 1. Εξετάζουμε αν η απόσταση μπροεί να πάρει αυτές τις δύο ακραίες τιμές.

- Για να είναι $|z-w| = 0$ πρέπει $z = w$ δηλαδή $\frac{2z-i}{iz+2} = z$ που συμβαίνει ότι $z = \pm i$. Ο z μπορεί να πάρει αυτές τις δύο τιμές επομένως η απόσταση μπορεί να γίνει μηδέν.
- Για να είναι $|z-w| = 1$ πρέπει $\left|\frac{z^2+1}{iz+2}\right| = 1$ που από την ποηγούμενη επεξεργασία ισχύει όταν $(2y-1)^2 = 0$ δηλαδή όταν $y = \frac{1}{2}$. Τότε $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$ και $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i$. Πάλι ο z αφού μεταβάλλεται μεταξύ των αριθμών με μέτρο 1 μπορεί να πάρει αυτές τις τιμές και επομένως η μέγιστη τιμή της απόστασης είναι 1.

14.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

14.2.1 Εκφωνήσεις

Θέμα 1

Έστω

$$f(x) = \text{εφ}x - \sqrt{3}, \qquad x \in (-\pi, \pi), \qquad x \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

1. Να βρείτε το πρόσημο της f.
2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{\pi x^2+1}{3x^2+1}\right)$.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Να αποδείξετε ότι είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη της.
2. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι $\mathcal{C}_f$,$\mathcal{C}_g$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

14.2.2 Απαντήσεις

Θέμα 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 1.8 Α9 iii).
2. Είναι
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x^2+1}{3x^2+1} = \frac{\pi}{3},$$
επομένως
$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{\pi x^2+1}{3x^2+1}\right) \underset{\frac{\pi x^2+1}{3x^2+1}=u}{=} \lim_{u\to\frac{\pi}{3}} f(u) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}-\sqrt{3} = 0.$$

Θέμα 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 1.3 Α2 vii)
2. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ ή αλλιώς η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ έχει ρίζα. Από το ερώτημα 1. είναι γνωστό ότι η f έχει σύνολο τιμών το $(-1, 1)$. Θεωρούμε δύο αριθμούς a, b τέτοιους ώστε $a < -1$, $b > 1$. Αφού η g έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ θα υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε $g(x_1) = a$, $g(x_2) = b$. Τότε
$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = f(x_1) - a > 0,$$

αφού όλες οι τιμές της f είναι μεγαλύτερες του -1 άρα και του a. Επίσης

$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - b < 0,$$

αφού όλες οι τιμές της f είναι μικρότερες του 1 άρα και του b.

Επομένως από το θεώρημα του Bolzano η συνεχής h έχει μία ρίζα μεταξύ των x_1, x_2.

14.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

14.3.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω

$$f(z) = \frac{i+z}{i-z}, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq i$$

1. Να υπολογίσετε το
$$f\left(i^{11}\right) + f\left(i^{12}\right)$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι αν $|f(z)| = 1$ τότε $z \in \mathbb{R}$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των
$$0, \quad -1+2i, \quad f(-1+2i)$$
είναι ισοσκελές.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να αποδείξετε ότι αν $|z| < 1$ τότε:
$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w είναι γνωστό ότι:

- Η εικόνα του z ανήκει στην γραφική παράσταση $\mathcal{C}_1$ της συνάρτησης $f(x) = 2e^x$ $x \in \mathbb{R}$.
- $4|w|^2 - (2\mathrm{Im}(w) - 1)^2 + 1 = 0$

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο $\mathcal{C}_2$ των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

   6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ δεν έχουν κοινά σημεία.

   6 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική ευθεία που εφάπτεται στις καμπύλες $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$

   6 Μοναδες

4. Ένα σημείο $M(x(t), y(t))$ κινείται στην $\mathcal{C}_1$. Να βρεθεί σε ποια θέση του σημείου οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του είναι ίσοι και διάφοροι του 0.

   7 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 3

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση και $g(x) = \ln(e^x - 1)$.

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

   6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

   6 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και f έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.

   6 Μοναδες

4. Έστω $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι $f'(x_0) \geq 0$.

   7 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)f(x) + \text{ημ}(x-1)}{\sqrt{x}-1} = -2$

1. Να βρείτε το $f(1)$.

9 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0-1} = \frac{2013}{f(x_0)}$$

9 Μονάδες

3. Αν επιπλέον ισχύει

$$f^2(x) = 2 - f\left(x^2\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0)$.

7 Μονάδες

14.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. $f\left(i^{11}\right) + f\left(i^{12}\right) = f\left(i^{3}\right) + f\left(i^{0}\right) = f(-i) + f(1) = \frac{i+(-i)}{i-(-i)} + \frac{i+1}{i-1} = 0 + (-i) = -i$

2. $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{i+z}{i-z}\right| = 1 \Leftrightarrow |i+z| = |i-z| \underset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |i+(x+yi)| = |i-(x+yi)|$
   $|i+(x+yi)| = |i-(x+yi)| \Leftrightarrow \sqrt{(x^2+y^2+2y+1)} = \sqrt{x^2+y^2-2y+1} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow y = 0$
   Άρα ο z είναι πραγματικός.
   Σχόλιο: Το ότι ο z είναι πραγματικός μπορεί να προκύψει και γεωμετρικά από την σχέση $|i+z| = |i-z|$. Η εικόνα του z ισαπέχει από τις εικόνες των $i, -i$ άρα ανήκει στην μεσοκάθετο του τμήματος που ορίζουν. Η μεσοκάθετος αυτή είναι ο άξονας $x'x$ και επομένως ο z είναι πραγματικός.

3. Είναι $f(-1+2i) = \frac{i+(-2+i)}{i-(-2+i)} = -1 + i$.

- Είναι $|f(-1+2i)-0| = \sqrt{5}$.
- Είναι $|(-1+2i)-0| = \sqrt{5}$.

Επομένως οι αποστάσεις των εικόνων των $f(-1+2i)$, $-1+2i$ από την εικόνα του 0 είναι ίσες και το τρίγωνο με κορυφές τα τρία αυτά σημεία είναι ισοσκελές.

4. $|f(z)| = \left|\frac{i+z}{i-z}\right| = \frac{|i+z|}{|i-z|} \underset{|i+z|\le|i|+|z|}{\le} \frac{|i|+|z|}{|i-z|} =$
$\frac{1+|z|}{|i-z|} \underset{|i-z|\ge||i|-|z||\ne 0}{\le} \frac{1+|z|}{||i|-|z||} = \frac{1+|z|}{|1-|z||} \underset{|z|<1}{=} \frac{1+|z|}{1-|z|}$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Αν $w = x + yi$ τότε:
$4|w|^2 - (2\mathrm{Im}(w) - 1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+y^2}^2 - (2y-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $4x^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -x^2$
Επομένως ο $\mathcal{C}_2$ είναι παραβολή με εξίσωση $y = -x^2$.

2. Τα κοινά σημεία των καμπυλών $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ έχουν συντεταγμένες x, y που είναι λύσεις του συστήματος:
$$\left.\begin{array}{l} y = 2e^x \\ y = -x^2 \end{array}\right\}$$
Το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με το
$$\left.\begin{array}{l} -x^2 = 2e^x \\ y = -x^2 \end{array}\right\}$$
το οποίο είναι αδύνατο αφού η πρώτη εξίσωσή του $-x^2 = 2e^x$ είναι αδύνατη διότι το α′ μέλος της είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός και το β′ μέλος της είναι θετικό. Άρα οι δύο καμπύλες δεν έχουν κοινά σημεία.

3. Οι $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ είναι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 2e^x$ και $g(x) = -x^2$. Η τυχούσα εφαπτομένη της $\mathcal{C}_1$ είναι της μορφής
$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$
Δηλαδή της μορφής
$$y = 2e^{x_1}x + (2e^{x_1} - 2e^{x_1}x_1) \qquad (*)$$
Η τυχούσα εφαπτομένη της $\mathcal{C}_2$ είναι της μορφής
$$y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$$
Δηλαδή της μορφής
$$y = -2x_2x + x_2^2 \qquad (**)$$

Για να είναι η $(*)$ κοινή εφαπτομένη των δύο καμπυλών πρέπει να συμπίπτει με μία ευθεία $(**)$. Επομένως θα έχουμε κοινή εφαπτομένη αν υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε οι ευθείες $(*)$, $(**)$ να συμπίπτουν. Δηλαδή αν το σύστημα

$$\begin{aligned} 2e^{x_1} &= -2x_2 \\ 2e^{x_1} - 2e^{x_1}x_1 &= \end{aligned}$$

έχει λύση. Το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{aligned} &e^{x_1} = -x_2 \\ &2\left(-x_2\right) - 2\left(-x_2\right)x_1 = \left(-e^{x_1}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (\Sigma)$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος Σ γράφεται:

$$2e^{x_1} - 2e^{x_1}x_1 = \left(-e^{x_1}\right)^2$$

ισοδύναμα

$$2 - 2x_1 = e^{x_1} \qquad (***)$$

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + 2x - 2$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα (αν $x < x'$ τότε $2x < 2x'$, $e^x < e^{x'}$ οπότε $\varphi(x) < \varphi(x')$). Επίσης $\varphi(0) = -1 < 0$ και $\varphi(1) = e > 0$ άρα από το θεώρημα του Bolzano έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$. Λόγω της μονοτονίας η ρίζα αυτή είναι και η μοναδική ρίζα της φ. Άρα το σύστημα Σ έχει μία μόνο λύση και επομένως οι $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ έχουν ακριβώς μία κοινή εφαπτομένη.

4. Είναι

$$y(t) = 2e^{x(t)} \Rightarrow y'(t) = 2x'(t)\,e^{x(t)}$$

Κατά την χρονική στιγμή $t - 0$ όπου οι ρυθμοί μεταβολής των $x(t)$, $y(t)$ είναι ίσοι έχουμε:

$$y(t) = 2e^{x(t)} \Rightarrow y'(t_0) =$$

$$2x'(t_0)\,e^{x(t)} \underset{y'(t_0)=x'(t_0)\neq 0}{\Rightarrow} 1 = 2e^{x(t_0)}$$

επομένως

$$\ln 1 = \ln\left(2e^{x(t_0)}\right) \Rightarrow 0 = \ln 2 + x(t_0) \Rightarrow x(t_0) = -\ln 2$$

και

$$y(t_0) = 2e^{-\ln 2} = 1$$

Άρα αν έχουμε ίσους ρυθμούς μεταβολής στις δύο συντεταγμένες αυτό θα συμβαίνει όταν το σημείο είναι στην θέση $(-\ln 2, 1)$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι όταν είναι $x(t) = -\ln 2$ είναι $y(t) = 1$ και $y'(t) = x'(t)$ δηλαδή πράγματι στην θέση $(-\ln 2, 1)$ έχουμε ίσους ρυθμούς μεταβολής.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Είναι $D_f = [0,1]$. Το D_g απαρτίζεται από τα x με $e^x - 1$ δηλαδή $e^x > 1$ δηλαδή $x > 0$. Επομένως $D_g = (0,+\infty)$. Είναι τώρα
$$D_{f\circ g} = \left\{x \in D_g | g(x) \in D_f\right\}$$
επομένως
$$x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 0 \leq \ln(e^x - 1) \leq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ e^0 \leq e^{\ln(e^x-1)} \leq e^1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 1 \leq e^x - 1 \leq e \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 2 \leq e^x \leq e + 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ \ln 2 \leq x \leq \ln(e+1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ln 2 \leq x \leq \ln(e+1)$$
Άρα
$$D_{f\circ g} = [\ln 2, \ln(e+1)]$$

2. Είναι:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \Rightarrow$$
$$\ln(e^{x_1} - 1) < \ln(e^{x_2} - 1) \underset{f\uparrow}{\Rightarrow}$$
$$f(\ln(e^{x_1} - 1)) < f(\ln(e^{x_2} - 1)) \Rightarrow$$
$$(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$$
Επομένως η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

3. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα επομένως με πεδίο ορισμού το $[0,1]$. Επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι το $[f(0), f(1)]$. Η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχης ως σύνθεση συνεχών με πεδίο ορισμού το $[\ln 2, \ln(e+1)]$. Επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι το
$$[(f \circ g)(\ln 2), (f \circ g)(\ln(e+1))] =$$
$$[f(g(\ln 2)), f(g(\ln(e+1)))] =$$
$$\left[f\left(\ln\left(e^{\ln 2} - 1\right)\right), f\left(\ln\left(e^{\ln(e+1)} - 1\right)\right)\right] =$$
$$[f(\ln(2-1)), f(\ln(e+1-1))] =$$
$$[f(\ln(1)), f(\ln(e))] =$$
$$[f(0), f(1)]$$
Άρα πράγματι οι $f \circ g$ και f έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.

4. Αν $x < x_0$ τότε $f(x) < f(x_0)$ οπότε $x - x_0 < 0$ και $f(x) - f(x_0) < 0$ άρα $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ συνεπώς $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Αλλά

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0),$$

επομένως $f'(x_0) \geq 0$.

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Έστω

$$h(x) = \frac{(x-1)f(x) + \text{ημ}(x-1)}{\sqrt{x}-1}, \quad x \neq 1$$

Είναι

$$\lim_{x\to 1} h(x) = -2$$

Λύνοντας ως προς $f(x)$ βρίσκουμε ότι για $x \neq 1$ είναι

$$f(x) = \frac{h(x)\left(\sqrt{x}-1\right) - \text{ημ}(x-1)}{x-1}$$

Επειδή η f είναι συνεχής έχουμε

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{h(x)\left(\sqrt{x}-1\right) - \text{ημ}(x-1)}{x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to 1} h(x) \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \lim_{x\to 1} \frac{\text{ημ}(x-1)}{x-1}$$

Αλλά

- $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = -2$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\text{ημ}(x-1)}{x-1} \underset{x-1=u}{=} \lim\limits_{u\to 0} \frac{\text{ημ}u}{u} = 1$

Άρα $f(1) = (-2)\cdot\frac{1}{2} - 1 = -2$

2. Θέλουμε να υπάρχει x_0 στο $(0,1)$ ώστε

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0-1} = \frac{2013}{f(x_0)}$$

ή ισοδύναμα (μετά τις πράξεις) να ισχύει

$$(2x_0 - 1)f(x_0) - 2013x_0(x_0-1) = 0$$

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση

$$\sigma(x) = (2x - 1) f(x) - 2013x(x - 1)$$

ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Έχουμε $\sigma(1)\sigma(0) = -f(1) f(0)$. Αλλά η συνεχής συνάρτηση f δεν έχει ρίζες άρα διατηρεί πρόσημο. Επομένως το γινόμενο $f(1) f(0)$ είναι θετικό και επομένως το γινόμενο $-f(1) f(0)$ είναι αρνητικό. Από το θεώρημα του Bolzano η σ έχει ρίζα x_0 στο $(0,1)$ και έχουμε το αποδεικτέο.

3. Παραγωγίζοντας την δοθείσα σχέση βρίσκουμε

$$2f'(x) f(x) = -2xf'\left(x^2\right)$$

Θετοντας $x = 0$ βρίσκουμε $f'(0) = 0$ και επομένως η εφαπτομένη στο $(0, f(0)$ είναι η $y = f(0)$ δηλαδή η $y = -2$.

14.4 Διαφορικός Λογισμός.

14.4.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. (α΄) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

   (β΄) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

2. Θεωρούμε την εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της C_f σε ένα οποιοδήποτε σημείο της Δ διάφορο του σημείου καμπής. Να αποδείξετε ότι ε τέμνει την C_f σε ένα ακόμη σημείο E διάφορο του Δ.

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση.

1. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = e^\alpha(f(\alpha) + f'(\alpha))$$

2. Αν για κάθε α ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{e^{x-\alpha} f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 1$$

και $f(0) = 0$ να βρείτε την f.

14.4.2 Απαντήσεις

14.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

14.5.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Αν $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ και $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_3^1 (2f(x) - g(x))\,dx$.
2. Να αποδείξετε ότι $\int_1^3 (|f(x)| + |g(x)|)\,dx \geq 7$.

ΘΕΜΑ 2

1. (α΄) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

   (β΄) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

2. Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

   και τις ευθείες $y = 0$, $x = 0$, $x = a$. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{E(a)}{\ln a}.$$

14.5.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 3.4 Α4 i).
2. Γνωρίζουμε ότι γενικά για $\alpha < \beta$ ισχύει

$$\int_\alpha^\beta |\varphi(x)|\,dx \geq \left|\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx\right|.$$

   Η αιτιολόγηση είναι η ακόλουθη: Για κάθε x είναι:

$$|\varphi(x)| + \varphi(x) \geq 0,\ \ |\varphi(x)| - \varphi(x) \geq 0$$

οπότε ολοκληρώνοντας και μεταφέροντας ολοκληρώματα από ένα μέλος σε άλλο έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx \geq -\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)|\,dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)|\,dx,$$

άρα

$$-\int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)|\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)|\,dx$$

και

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)|\,d.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω έχουμε

$$\int_{1}^{3} (|f(x)| + |g(x)|)\,dx = \int_{1}^{3} |f(x)|\,dx + \int_{1}^{3} |g(x)|\,dx \geq$$

$$\left|\int_{1}^{3} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} g(x)\,dx\right| = |5| + |-2| = 7$$

Θεμα 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 3.5 Α6.
2. Η $g(x)$ είναι θετική επομένως για $a > 0$ το εμβαδόν είναι

$$E(a) = \int_{1}^{a} g(x)\,dx = \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^a = \ln\left(a + \sqrt{(1+a^2)}\right).$$

Το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{E(a)}{\ln a} = \lim_{a\to+\infty} \frac{\ln\left(a + \sqrt{(1+a^2)}\right)}{\ln a} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{a\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}{\frac{1}{a}} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{a\to+\infty} \frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}} = 1.$$

14.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

14.6.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

1. Να βρεθούν οι f', f''.

5 Μοναδες

2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα-κυρτά και τα σημεία καμπής.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της g για $x \to +\infty$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της g τέμνει την ασύμπτωτη της $y = x$.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \left(g(x+3) - g(x+2) + g(x+1) - g(x)\right)$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε σημείο της $\mathcal{C}_g$ που απέχει από το σημείο $A(1,0)$ ελάχιστη απόσταση.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ 3

Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

- Είναι παραγωγίσιμη.
- Ισχύει
$$f^3(x) + f(x) = 2x$$
για κάθε x.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

4 Μοναδες

2. Να βρείτε το πρόσημο της f

4 Μοναδες

3. Να βρείτε την f^{-1}.

4 Μοναδες

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

7 Μοναδες

5. Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < \beta$ τότε ισχύει:
$$\beta f(\alpha) > \alpha f(\beta)$$

6 Μοναδες

ΖΗΤΗΜΑ 4

Έστω
$$\varphi(x) = xe^{x^2}$$
$$F(x) = \int_{x-1}^{x} e^{t^2} dt$$

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις φ, F.

6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή.

6 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει
$$(e-1)(x-1) + \int_0^1 e^{t^2}\, dt < F(x) < e^{x^2}$$

6 Μοναδες

4. Να βρείτε το όριο:
$$\lim_{x \to +\infty} \int_{x-1}^{x} e^{t^2 - x^3} dt$$

7 Μοναδες

14.6.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Η f έχει πεδίο ορισμού του $\mathbb{R}$ και σε αυτό είναι

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{(1+x^2)^3}.$$

2. Η f είναι θετική στο $(-1,1)$ μηδενίζεται στα ± 1 και εκτός του $[-1,1]$ είναι αρνητική. Επομένως είναι $f \downarrow$ στο $(-\infty,-1]$, $f \uparrow$ στο $[-1,1]$ και $f \downarrow$ στο $[1,+\infty)$. Στο -1 έχει τοπικό ελάχιστο το $-\frac{1}{2}$ και στο 1 τοπικό μέγιστο το $\frac{1}{2}$. Επειδή στα $\pm\infty$ έχει, προφανώς, όριο το μηδέν τα ακρότατα αυτά είναι ολικά (βλ. και πίνακα στο επόμενο ερώτημα).

3. Η f'' μηδενίζεται στα 0, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. Η f'' είναι θετική στα διαστήματα $\left(-\sqrt{3},0\right)$, $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ και επομένως στα $\left[-\sqrt{3},0\right]$, $\left[\sqrt{3},+\infty\right)$ η f είναι κυρτή. Η f'' είναι αρνητική στα διαστήματα $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$, $\left(0,\sqrt{3}\right)$και επομένως στα $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$, $\left[0,\sqrt{3}\right]$ η f είναι κοίλη. Στα σημεία 0, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ η f παρουσιάζει καμπή και τα σημεία καμπής είναι τα $(0,0)$, $\left(-\sqrt{3},-\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3},\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$			σκ		ελ		σκ		μεγ		σκ		

4. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι $f\left((-\infty,-1]\right) = \left[-\frac{1}{2},0\right)$, $f\left([-1,1]\right) = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ και $f\left([1,+\infty]\right) = \left(0,\frac{1}{2}\right]$. Η ένωση των τριών αυτών επιμέρους συνόλων τιμών μας δίνει το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

5. Η f είναι αρνητική στα αρνητικά x και θετική στα θετικά. Έχουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν E είναι

$$E = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{0} -f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx =$$

$$-\int_{-1}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx.$$

Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με διάφορους τρόπους. Ένα είναι να παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}$$

και επομένως η $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ είναι παράγουσα του ολοκληρωτέου άρα

$$E=-F(0)+F(-1)+F(1)-F(0)=\ln 2.$$

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Αρκεί, σύμφωνα με τον ορισμό, να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x)=0.$$

Πράγματι

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{1^2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right)=0.$$

2. Εξετάζουμε αν η εξίσωση $g(x)=x$ έχει λύση. Αν είχε τότε για κάποιο x θα ήταν $\sqrt{x^2+1}=x$ από τηνοποία θα προέκυπτε ότι $x^2+1=x^2$ (άτοπο). Άρα η γραφική παράσταση της g και η ασύμπτωτη της δεν τέμνονται.

3. Αν $h(x)=g(x)-x$ είναι $g(x)=h(x)+x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$. Θα είναι

$$g(x+3)-g(x+2)+g(x+1)-g(x)=$$

$$h(x+3)+(x+3)-h(x+2)-(x+2)+h(x+1)+(x+1)-h(x)-x=$$

$$h(x+3)-h(x+2)+h(x+1)-h(x)+2.$$

Είναι για οποιοδήποτε m:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x+m)\underset{x+m=u}{=}\lim_{u\to+\infty}h(u)=0.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}(h(x+3)-h(x+2)+h(x+1)-h(x)+2)=2,$$

η οποία είναι και η τιμή του ζητούμενου ορίου.

4. Η απόσταση του τυχόντος σημείου $\left(x, \sqrt{x^2+1}\right)$ της $\mathcal{C}_g$ από το $(1,0)$ είναι
$$d(x) = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\sqrt{x^2+1} - 0\right)^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 2},$$
η οποία γίνεται ελάχιστη όταν το $t(x) = 2x^2 - 2x + 2$ γίνει ελάχιστο. Είναι $t'(x) = 4x - 2$ και επομένως για $x \leq \frac{1}{2}$ είναι $t \downarrow$ ενώ για $x \geq \frac{1}{2}$ είναι $t \uparrow$. Άρα η t έχει ελάχιστο στο $\frac{1}{2}$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$.

ΖΗΤΗΜΑ 3

1. Παραγωγίζοντας και ταν δύο μέλη της $f^3(x) + f(x) = 2x$ βρίσκουμε ότι
$$f'(x)\left(2f^2(x) + 1\right) = 2,$$
από την οποία προκύπτει ότι $f'(x) > 0$ για όλα τα x άρα $f \uparrow$.

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι:
$$f(x)\left(f^2(x) + 1\right) - 2x.$$
Επομένως η f είναι θετική στα θετικά x, αρνητική στα αρνητικά και για $x = 0$ γίνεται μηδέν.

3. Η f ως γνησίως αύξουσα είναι αντιστρέψιμη. Αν $y = f(x)$ τότε $y^2 + y = 2x$.

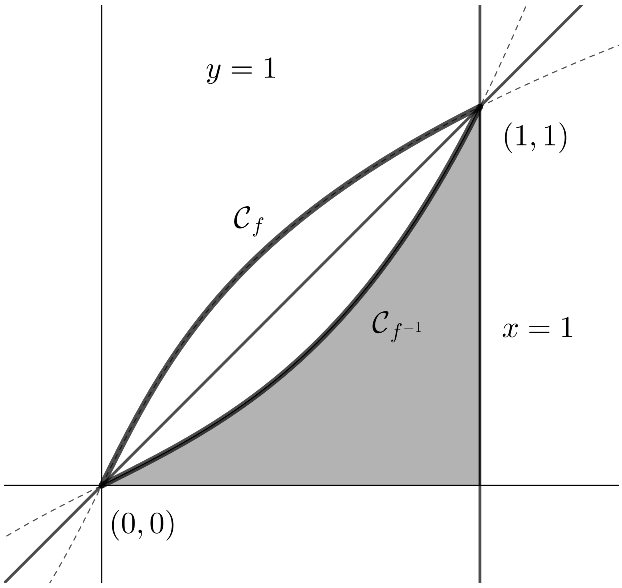
4. Αφού είναι $f \uparrow$ και η f είναι συνεχής το σύνολο τιμών της θα είναι το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$. Το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ θα είναι κάποιος πραγματικός αριθμός a ή το $+\infty$. Αν συμβαίνει το πρώτο παίρνοντας όρια για $x \to= \infty$ στην σχέση $f^3(x) + f(x) = 2x$ καταλήγουμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι $a^3 + a = +\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Επομένως το σύνολο τιμών της f, που είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, είναι το $\mathbb{R}$.

   Αν $f(x) = y$ έχουμε ότι $y^3 + y = 2x$ από την οποία έχουμε
$$f^{-1}(y) = x = \frac{y^3 + y}{2}.$$
   Άρα
$$f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Η f είναι θετική στα θετικά x και μηδενίζεται στο 0. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $\int_0^1 f(x)\,dx$.

   Μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο εμβαδόν αξιοποιώντας το γεγονός ότι γνωρίζουμε την f^{-1} και το ότι οι $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την

$y = x$. Είναι $f(0) = 0$ και $f^{-1}(1) = 1$. Άρα οι δύο γραφικές παραστάσεις όπως και η $y = x$ διέρχονται από τα $(0,0)$ και $(1,1)$. Η f^{-1} είναι προφανώς γνησίως αύξουσα και θετική στο $(0,1)$. Επίσης για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $\frac{x^3+x}{2} < \frac{x+x}{2} = x$ άρα στο $(0,1)$ η $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y = x$ συνεπώς η $\mathcal{C}_f$ βρίκεται πάνω από την $y = x$.



Λόγω συμμετρίας το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y = 1$. Επομένως είναι ίσο με:

$$\int_0^1 \left(1 - f^{-1}(x)\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^3 + x}{2}\right) dx = \dots = \frac{5}{8}.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4

1. Είναι
$$\varphi'(x) = e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) > 0,$$
επομένως $\varphi \uparrow$.

Είναι
$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt - \int_0^{x-1} e^{t^2} dt,$$
επομένως
$$F'(x) = e^{x^2} - e^{(x-1)^2} = e^{x^2}\left(1 - e^{-2x+1}\right).$$
Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι $F'(x) > 0$ αν και μόνο αν $\frac{1}{2} < x$ ενώ $F'(x) < 0$ αν και μόνο αν $x < \frac{1}{2}$. Επομένως η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

2. Είναι:

$$F''(x) = 2xe^{x^2} - 2(x-1)e^{(x-1)^2} = 2(\varphi(x) - \varphi(x-1)) > 0,$$

αφού $\varphi \uparrow$.

3. Για $x > 1$ είναι $x-1 > 0$. Επομένως για $x-1 < t < x$ είναι $(x-1)^2 < t^2 < x^2$ και $e^{(x-1)^2} < e^{t^2} < e^{x^2}$ επομένως

$$F(x) = \int_{x-1}^{x} e^{t^2} dt < \int_{x-1}^{x} e^{x^2} dt = e^{x^2}$$

και επομένως το δεύτερο σκέλος της αποδεικτέας ανισότητας ισχύει.

Για το πρώτο σκέλος έχουμε:

$$F(x) - \int_0^1 e^{t^2} dt = F(x) - F(1).$$

Αλλά από το θεώρημα μέσης τιμής για την F στο $[1, x]$ έχουμε ότι

$$F(x) - F(1) = F'(\xi)(x-1), \quad 1 < \xi < x.$$

Αφού $F' \uparrow$ είναι

$$F'(\xi)(x-1) > F'(1)(x-1) = (e-1)(x-1).$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$F(x) - \int_0^1 e^{t^2} dt > (e-1)(x-1),$$

από την οποία προκύπτει το πρώτο σκέλος της αποδεικτέας ανισότητας.

4. Για $x > 1$ από την

$$(e-1)(x-1) + \int_0^1 e^{t^2}\, dt < F(x) < e^{x^2}$$

έχουμε την

$$\frac{(e-1)(x-1)}{e^{x^3}} + \frac{\int_0^1 e^{t^2}\, dt}{e^{x^3}} < \frac{F(x)}{e^{x^3}} < e^{x^2-x^3}$$

δηλαδή την

$$\frac{(e-1)(x-1)}{e^{x^3}} + \frac{\int_0^1 e^{t^2}\, dt}{e^{x^3}} < \int_{x-1}^{x} e^{t^2-x^3} dt < e^{x^2-x^3} \quad (*) .$$

Για $x \to +\infty$ είναι $e^{x^3} \to +\infty$. Επομένως $\frac{x-1}{e^{x^3}} \to 0$ όπως εύκολα προκύπτει από τον κανόνα του De l' Hospital και $\frac{\int_0^1 e^{t^2}\, dt}{e^{x^3}} \to 0$ αφού το $\int_0^1 e^{t^2}\, dt$ είναι σταθερός αριθμός. Επίσης για $x \to +\infty$ είναι $x^2 - x^3 \to -\infty$ άρα $e^{x^2-x^3} \to 0$. Συνέπεια τούτων και του κριτηρίου παρεμβολής στην $(*)$ είναι ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x-1}^{x} e^{t^2-x^3} dt = 0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

Σχολικό έτος 2013-2014

15.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

15.1.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z ισχύει $|z| = 1$.

1. Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών $w = 2z + 1$.

2. Με $w = 2z + 1$:

   (α′) Για ποια z οι εικόνες των μιγαδικών 0, z, w είναι σημεία συνευθειακά;

   (β′) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z\,w|$.

ΘΕΜΑ 2

1. Να λύσετε την εξίσωση $x + \frac{1}{x} = 1$.

2. (α′) Να αποδείξετε ότι αν $x + \frac{1}{x} = 1$ τότε ισχύει $x^3 + \frac{1}{x^3} = -2$.

   (β′) Να βρείτε μιγαδικό αριθμό z τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|z| = 1 \ \text{ και } \ z + \bar{z} = 1.$$

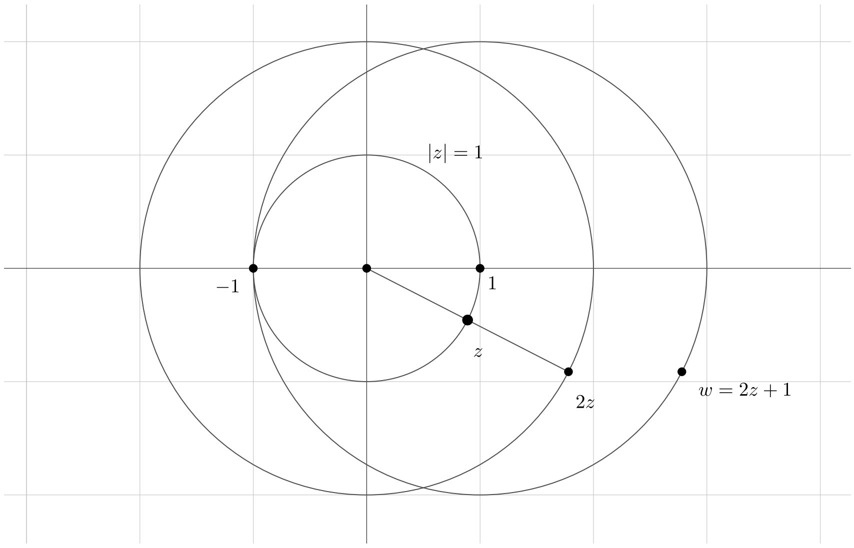
15.1.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α′ Μέρος § 2.3 Α8

2. (α′) Για να είναι οι εικόνες των 0, z, $w = 2z + 1$ σημεία συνευθειακά θα πρέπει οι τα αντίστοιχα διανύσματα των z, w να είναι συγγραμμικά που σημαίνει, αφού $z \neq 0$, ότι πρέπει $2z + 1 = \lambda z$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα πρέπει $\frac{2z+1}{z} \in \mathbb{R}$ και τελικά $z \in \mathbb{R}$. Αφού $|z| = 1$ οι μοναδικές τιμές για τις οποίες το z είναι πραγματικός είναι $z = 1$, $z = -1$.

(β′) Η εικονα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο $(1, 0)$ και ακτίνα 2. Προφανώς η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι 1 για $w = -1$ και η μέγιστη 3 για $w = 3$.



ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α′ Μέρος § 2.2 Α13 γ)

2. (α′) Αφού

$$x + \frac{1}{x} = 1,$$

είναι

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 1,$$

επομένως

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1,$$

από την οποία βρίσκουμε ότι

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = -2.$$

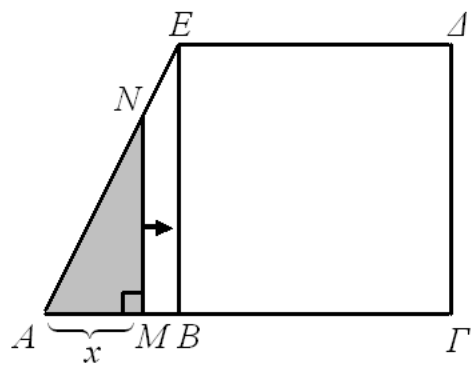
(β′) Αφού $|z| = 1$ είναι $\bar{z} = \frac{1}{z}$ και επομένως αναγόμαστε στην εξίσωση $z + \frac{1}{z} = 1$ που επιλύθηκε στο ερώτημα 1. Και οι δύο λύσεις έχουν μέτρο 1 επομένως είναι δεκτές.

15.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

15.2.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Στο σχήμα είναι, ΑΒ = 1, ΑΓ = 3 και ΓΔ = 2. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του x = ΑΜ , όταν το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.



2. Η συνάρτηση του προηγουμένου ερωτήματος:

   (α΄) Είναι αντιστρέψιμη;

   (β΄) Ποιο σύνολο τιμών έχει;

ΘΕΜΑ 2

Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$xf(x) = \text{συν}x - 1$$

1. Να βρείτε το $f(0)$.

2. (α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

   (β΄) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   (γ΄) Έστω ρ μία οποιαδήποτε θετική ρίζα της f. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\rho} f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

15.2.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 1.2 Β3

2. (α′) Είναι

$$E(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x-1 & , \quad 1 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

Η $E(x)$ είναι, προφανώς, γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,3]$. Επισης αν $x_1 \in [0,1]$ και $x_2 \in [1,3]$ με $x_1 < x_2$ τότε ή

- ή $x_1 < 1 \leq x_2$
- είτε $x_1 \leq 1 < x_2$

Στην πρώτη περίπτωση είναι $E(x_1) < E(1) \leq E(x_2)$ ενώ στην δεύτερη $E(x_1) \leq E(1) < E(x_2)$ οπότε σε κάθε περίπτωση είναι $E(x_1) < E(x_2)$. Επομένως η E είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$ άρα $1-1$ και αντστρέψιμη.

(β′) Έχουμε:

$$E([0,3]) = E([0,1] \cup [1,3]) = E([0,1]) \cup E([1,3]) \underset{E\updownarrow \text{ και συνεχής}}{=}$$

$$[E(0), E(1)] \cup [E(1), E(3)] = [0,1] \cup [1,5] = [0,5].$$

ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 1.8 Β3 i).

2. (α′) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{συν}x-1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Ισχύει $f(0) = 0$ και $f(0) = 0$. Αλλά $-\frac{2}{\pi} < \frac{1}{2}$ διότι αυτή ισοδυναμεί με την αληθή σχέση $4 > \pi$. Άρα

$$f(\pi) < -\frac{1}{2} < f(0)$$

και αφού η f είναι συνεχής από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής συπεραίνουμε ότι υπάρχει x στο $(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(x) = \frac{1}{2}$

(β′) Έχουμε:

$$\left|\frac{\text{συν}x-1}{x}\right| = \frac{|\text{συν}x-1|}{|x|} \leq \frac{|\text{συν}x| + |-1|}{|x|} \leq \frac{2}{|x|},$$

επομένως για όλα τα x θα ισχύει:

$$-\frac{2}{|x|} \leq f(x) \leq \frac{2}{|x|}.$$

Για $x \to -\infty$ είναι $\frac{2}{|x|} \to 0$ και $-\frac{2}{|x|} \to 0$ οπότε απο το κριτήριο της παρεμβολής θα ισχύει $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

(γ΄) Έχουμε

$$f(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho f(\rho) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}\rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{συν}\rho = 1 \Leftrightarrow \rho = 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Όποιο και αν είναι το ρ, κοντά στο ρ θα είναι συν$x < 1$ και επομένως $f(x) < 0$. Άρα

$$\lim_{x \to \rho} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι

$$\lim_{x \to \rho} f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \lim_{u \to -\infty} f(u) = 0.$$

15.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

15.3.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

ΘΕΜΑ 1

Για τον μιγαδικό αριθμό w είναι γνωστό ότι:

$$\left|w + \sqrt{2}i\right| = 2 + \left|w - \sqrt{2}i\right|$$

1. Να αποδείξετε ότι $w \neq 0$

6 Μονάδες

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{2}\,\text{Im}w = 1 + \left|w - \sqrt{2}i\right|$$

6 Μονάδες

3. Να βρείτε τον w αν είναι γνωστό ότι Re$w = 2$.

6 Μονάδες

4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του w

7 Μονάδες

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x), \qquad x \in [0, 2\pi]$$

1. Να βρείτε το πρόσημο της f.

7 Μονάδες

2. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{f(x)}$$

6 Μονάδες

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ ισχύει

$$2(\eta\mu x) f(x) - (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) f'(x) = 0$$

6 Μονάδες

4. Σε κάθε $x \in [0, 2\pi]$ αντιστοιχίζουμε την γωνία $\varphi(x)$ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $P(x, f(x))$ με τον $x'x$.
Με δεδομένο ότι η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της όταν $x = 0$.

6 Μονάδες

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 2x - 2, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

1. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \geq 2|x - y|$.

5 Μονάδες

2. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

5 Μονάδες

3. Υπάρχει η αντίστροφη της f.

5 Μοναδες

4. Η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

5 Μοναδες

5. Η συνάρτηση $g(x) = f^{-1}(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

5 Μοναδες

ΘΕΜΑ 4

Έστω μία γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = f(1-x)$.

6 Μοναδες

2. Έστω $a \in (0,1)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = (x-a)^2 f(x)$$

είναι παραγωγίσιμη στο a

6 Μοναδες

3. Έστω τυχόν $x \in (0,1)$.

(α΄) Να αποδείξετε ότι

- η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $P(x, f(x))$, $A(1,0)$

και

- η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$, $B(1,1)$

τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο M με τεταγμένη

$$r(x) = \frac{f(x)}{f(x) + 1 - x}$$

7 Μοναδες

(β΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $r(x)$ του προηγουμένου ερωτήματος είναι γνησίως αύξουσα.

6 Μοναδες

15.3.2 Απαντήσεις

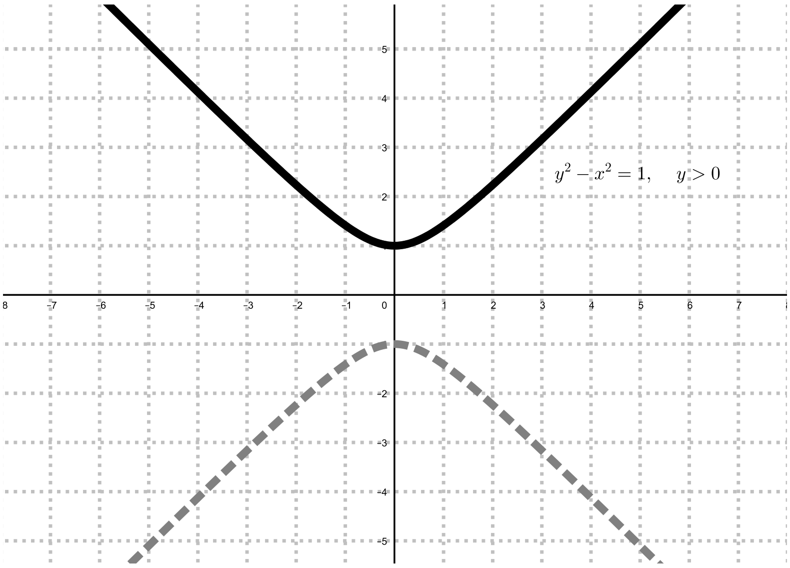
ΘΕΜΑ 1

1. Αν ήταν $w = 0$ θα έπρεπε να είναι $\left|0 + \sqrt{2}i\right| = 2 + \left|0 - \sqrt{2}i\right|$ δηλαδή $\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$ (άτοπο). Άρα $w \neq 0$

2. Υψώνοντας την σχέση $\left|w + \sqrt{2}i\right| = 2 + \left|w - \sqrt{2}i\right|$ στο τετράγωνο έχουμε:
$\left|w + \sqrt{2}i\right|^2 = 4 + \left|w - \sqrt{2}i\right|^2 + 4\left|w - \sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$\left(w + \sqrt{2}i\right)\left(\bar{w} - \sqrt{2}i\right) = 4 + \left(w - \sqrt{2}i\right)\left(\bar{w} + \sqrt{2}i\right) + 4\left|w - \sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$w\bar{w} - \left(\sqrt{2}i\right)^2 - w\sqrt{2}i + \bar{w}\sqrt{2}i = 4 + w\bar{w} - \left(\sqrt{2}i\right)^2 - \bar{w}\sqrt{2}i + w\sqrt{2}i + 4\left|w - \sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$-w\sqrt{2}i + \bar{w}\sqrt{2}i + \bar{w}\sqrt{2}i - w\sqrt{2}i = 4 + 4\left|w - \sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$-2w\sqrt{2}i + 2\bar{w}\sqrt{2}i = 4 + 4\left|w - \sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$-2\sqrt{2}i\left(w - \bar{w}\right) = 4 + 4\left|w - \sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$-2\sqrt{2}i\left(2\mathrm{Im}w \cdot i\right) = 4 + 4\left|w - \sqrt{2}i\right| \Rightarrow$
$\sqrt{2}\mathrm{Im}w = 1 + \left|w - \sqrt{2}i\right|$

3. Αν $w = x + yi$ είναι $x = 2$. Από την ισότητα $\sqrt{2}\mathrm{Im}w = 1 + \left|w - \sqrt{2}i\right|$ έχουμε $2y = 1 + \left|2 + yi - \sqrt{2}i\right|$ από την οποία συμπεραίνουμε αφ'Ενός ότι $y > 0$ και αφ'Ετέρου ότι $\sqrt{2}y = 1 + \left|2 + yi - \sqrt{2}i\right|$ από την οποία έχουμε $\sqrt{2}y = 1 + \sqrt{2^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2}$ δηλαδή $\left(\sqrt{2}y - 1\right)^2 = 2^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2$ και καταλήγουμε στην $y^2 - 5 = 5$ με ρίζες $y = \pm\sqrt{5}$ από τις οποίες η αρνητική απορρίπτεται και άρα $y = \sqrt{5}$ και $w = 2 + \sqrt{5}i$.

4. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\left|w + \sqrt{2}i\right| - \left|w - \sqrt{2}i\right| = 2$. Άρα η εικόνα του w είναι τέτοια ώστε η διαφορά των αποστάσεων της από τις εικόνες των $-\sqrt{2}i$ και $\sqrt{2}i$ να είναι ίση με 2. Άρα ανήκει σε υπερβολή με εστίες τα σημεία του $y'y$: $\left(0, \sqrt{2}\right), \left(0, -\sqrt{2}\right)$. Η υπερβολή θα έχει εξίσωση της μορφής $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ με $2\alpha = 2$, $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ και $\gamma = \sqrt{2}$ δηλαδή εξίσωση την $\frac{y^2}{1^2} - \frac{x^2}{1^2} = 1$. Πρόκειται για την ισοσκελή υπερβολή $y^2 - x^2 = 1$. Επειδή είναι $y > 0$ ο γεωμετρικός τόπος θα είναι ο «άνω» κλάδος της υπερβολής.



ΘΕΜΑ 2

1. Η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Θα βρούμε πρώτα τις ρίζες της. Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\text{ημ}x - \text{συν}x) = 0 \underset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\text{ημ}x - \text{συν}x = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{συν}x \underset{\text{συν}x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x} = 1 \Leftrightarrow \text{εφ}x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{εφ}x = \text{εφ}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα ρίζες της f είναι εκείνοι οι αριθμοί του $[0, 2\pi]$ που είναι της μορφής $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Αλλά είναι

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq k\pi \leq 2\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{7}{4} \underset{k \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} k = 0 \text{ ή } k = 1$$

Επομένως η f έχει ρίζες τους $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{5\pi}{4}$.

Αφού είναι συνεχής στα διαστήματα:

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right],$$

στα οποία δεν έχει ρίζα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο που για να βρεθεί αρκεί να δοκιμάσουμε στην f ένα μόνο αριθμό από κάθε διάστημα. Είναι

- $f(0) = e^0(0-1) = -1 < 0$ άρα στο πρώτο διάστημα η f είναι αρνητική.
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}(1-0) > 0$ άρα στο δεύτερο διάστημα η f είναι θετική
- $f(2\pi) = e^{2\pi}(0-1) < 0$ και επομένως στο τρίτο διάστημα η f είναι αρνητική.

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $f(x) < 0$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

2. Είναι
$$f'(x) = 2e^x \text{ημ}x$$
και επομένως
$$2(\text{ημ}x)f(x) - (\text{ημ}x - \text{συν}x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2(\text{ημ}x)e^x(\text{ημ}x - \text{συν}x) - (\text{ημ}x - \text{συν}x)2e^x\text{ημ}x = 0 \text{ που ισχύει.}$$

3. Ξέρουμε ότι
$$\text{εφ}\varphi(x) = f'(x)$$
οπότε
$$\varphi'(x)\,\text{εφ}'\varphi(x) = f''(x)$$
άρα
$$\varphi'(x)\frac{1}{\text{συν}^2\varphi(x)} = f''(x)$$
ή αλλιώς
$$\varphi'(x) = \frac{f''(x)}{1+\text{εφ}^2\varphi(x)}.$$
Επομένως
$$\varphi'(x) = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}.$$
Άρα
$$\varphi'(0) = \frac{f''(0)}{1+(f'(0x))^2} = 2.$$

ΘΕΜΑ 3

1. Έχουμε:
$$|f(x) - f(y)| = \left|\left(x^3+2x-2\right) - \left(y^3+2y-2\right)\right| =$$
$$= \left|(x-y)\left(x^2+yx+y^2+2\right)\right| =$$

$$= |x-y|\left|x^2+yx+y^2+2\right|.$$

Αλλά $x^2+yx+y^2 \geq 0$ διότι είναι τριώνυμο ως προς x με διακρίνουσα $-3y^2 \leq 0$. Επομένως:

$$\left|(x-y)\left(x^2+yx+y^2+2\right)\right| = |x-y|\left|x^2+yx+y^2+2\right|$$

$$= |x-y|\left(x^2+yx+y^2+2\right) \geq 2|x-y|.$$

Άρα η αποδεικτέα ισχύει.

2. Η f είναι γνησίως αύξουσα διότι με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^3 < x_2^3$ και επομένως $x_1^3+2x_1-2 < x_2^3+2x_2-2$ δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Επίσης η f είναι συνεχής ως πολυώνυμο και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ άρα έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ που περιέχει το μηδέν άρα η f έχει ρίζα που λόγω μονοτονίας είναι μοναδική.

3. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και $1-1$ άρα έχει αντίστροφη.

4. Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f επομένως το $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο τυχόν x_0 και επομένως είναι συνεχής. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Στην σχέση $|f(x)-f(y)| \geq 2|x-y|$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και όπου y το $f^{-1}(x_0)$. Θα έχουμε

$$\left|f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))\right| \geq 2\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)\right|.$$

δηλαδή

$$|x-x_0| \geq 2\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)\right|$$

άρα

$$\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)\right| \leq \frac{1}{2}|x-x_0|$$

οπότε

$$-\frac{1}{2}|x-x_0| \leq f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \leq \frac{1}{2}|x-x_0|$$

και επομένως

$$-\frac{1}{2}|x-x_0| + f^{-1}(x_0) \leq f^{-1}(x) \leq \frac{1}{2}|x-x_0| + f^{-1}(x_0)$$

Αλλά

$$\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{2}|x-x_0| + f^{-1}(x_0)\right)$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{2}|x-x_0| + f^{-1}(x_0)\right) = f^{-1}(x_0),$$

και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο τυχόν x_0 άρα συνεχής.

5. Θεωρούμε $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $g(x_1) > g(x_2)$. Αντικαθιστούμε στην σχέση $|f(x) - f(y)| \geq 2|x - y|$ όπου x και y τα $f^{-1}(x_2)$ και $f^{-1}(x_1)$ αντιστοίχως και βρίσκουμε

$$|f(f^{-1}(x_2)) - f(f^{-1}(x_1))| \geq 2|f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1)|,$$

δηλαδή ότι
$$|x_2 - x_1| > 2|f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1)|,$$

Αλλά

$$|x_2 - x_1| > 2|f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1)| > |f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1)| \geq f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1)$$

και αφού $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1$ έχουμε ότι:

$$x_2 - x_1 > f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1)$$

δηλαδή:
$$f^{-1}(x_1) - x_1 > f^{-1}(x_2) - x_2$$

οπότε
$$g(x_1) > g(x_2).$$

ΘΕΜΑ 4

1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(1 - x)$ απαρτίζεται από τα x για τα οποία το $1 - x$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f δηλαδή ισχύει $0 \leq 1 - x \leq 1$. Η ανίσωση αυτή έχει λύσεις τα x με $0 \leq x \leq 1$. Άρα η g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με την f το διάστημα $[0, 1]$. Η g είναι σύνθεση συνεχών και επομένως είναι συνεχής. Τέλος έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \underset{f \uparrow}{\Rightarrow}$$

$$f(1 - x_1) > f(1 - x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως το σύνολο τιμών της είναι το

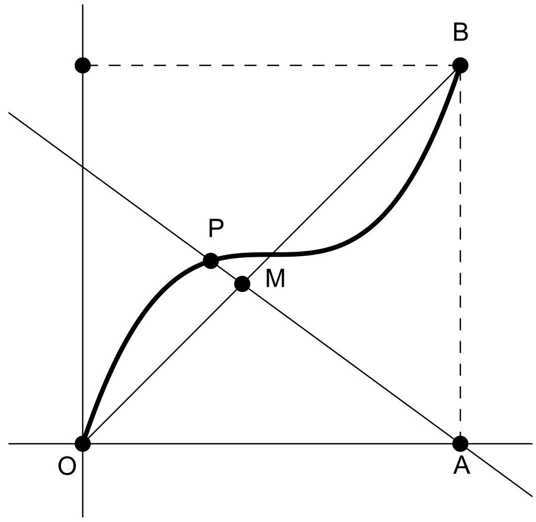
$$[g(1), g(0)] = [f(1-1), f(1-0)] = [f(0), f(1)] = [0, 1].$$

2. Ισχύει

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^2 f(x) - 0}{x - a} = \lim_{x \to a} (x - a) f(x) = 0 \cdot f(a) = 0,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι η f είναι συνεχής. Άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο a και $h'(a) = 0$.

3. (α΄) Έστω $M(p, q)$ τυχόν σημείο.



- Το M θα ανήκει στην ευθεία των P, A αν και μόνο αν τα P, A, M είναι συνευθειακά δηλαδή αν και μόνο αν $\det\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}\right) = 0$ δηλαδή αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x-1 & f(x) \\ p-1 & q \end{vmatrix} = 0$$

που αναπτύσσοντας ισοδυναμεί με την

$$f(x)\,p - (x-1)\,q = f(x)$$

- Το M θα ανήκει στην ευθεία των O, B που είναι η $y = x$ αν και μόνο αν

$$p = q$$

Το σημείο λοιπόν $M(p, q)$ ανήκει και στις δύο ευθείς αν το (p, q) είναι λύση του συστήματος (ως προς p, q):

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\,p - (x-1)\,q = f(x) \\ p - q = 0 \end{array}\right\}$$

Θα υπάρχουν δε τόσα κοινά σημεία όσες και λύσεις του συστήματος. Αντικαθιστώντας το $p = q$ στην πρώτη εξίσωση έχουμε την εξίσωση

$$(f(x) + 1 - x)\,q = f(x) \quad (*)$$

Για τον συντελεστή του q είναι $f(x) + 1 - x \geq 0$ (αφού λόγω μονοτονίας $f(x) \geq 0$ και $x \leq 1$). Επίσης για να είναι $f(x) + 1 - x = 0$ πρέπει να ισχύει $f(x) = 0$ και $x = 1$ πράγμα αδύνατον. Άρα $f(x) + 1 - x > 0$ και η εξίσωση $(*)$ έχει ακριβώς μία λύση $q = \frac{f(x)}{f(x)+1-x}$. Επομένως οι ευθείες έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. Η τεταγμένη του κοινού σημείου είναι

$$r(x) = \frac{f(x)}{f(x) + 1 - x}$$

(β΄) Θέλουμε να δείξουμε ότι $r \uparrow$.
Θέλουμε με $0 < x_1 < x_2 < 1$ να είναι

$$r(x_1) < r(x_2).$$

Πράγματι

$$\begin{gathered} r(x_1) < r(x_2) \Leftrightarrow \\ \underbrace{\frac{f(x_1)}{f(x_1)+1-x_1}}_{+} < \underbrace{\frac{f(x_2)}{f(x_2)+1-x_2}}_{+} \Leftrightarrow \\ f(x_1)(f(x_2)+1-x_2) < f(x_2)(f(x_1)+1-x_1) \Leftrightarrow \\ f(x_1)f(x_2)+f(x_1)-f(x_1)x_2 < \\ < f(x_1)f(x_2)+f(x_2)-f(x_2)x_1 \Leftrightarrow \\ f(x_1)-f(x_1)x_2 < f(x_2)-f(x_2)x_1 \Leftrightarrow \\ f(x_1)(1-x_2) < f(x_2)(1-x_1) \end{gathered}$$

Η τελευταία σχέση αληθεύει διότι μπορεί να προκύψει με πολλαπλασιασμό των ανισοτήτων

$$0 < f(x_1) < f(x_2), \quad 0 < 1-x_2 < 1-x_1$$

που ισχύουν.

15.4 Διαφορικός Λογισμός.

15.4.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$.

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την f.
2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ΘΕΜΑ 2

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

   $$|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2 \text{ για όλα τα } x, y$$

   Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

2. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

   - $|g(x) - g(y) - e^x + e^y + x - y| \le (x-y)^2$ για όλα τα x, y
   - $g(0) = 2$

   (α΄) Να βρείτε την g.

   (β΄) Να βρείτε το όριο της g στο $+\infty$.

15.4.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 2.7 Α4.

2. Έχουμε:
$$f'(x) = (\ln x + 1)\, e^{x\ln x}$$
και
$$f''(x) = e^{x\ln x}(1+\ln x)^2 + e^{x\ln x}\frac{1}{x} > 0.$$
Επομένως η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 2.6 Β1.

2. (α′) Έστω
$$h(x) = g(x) - e^x + x.$$
Από την υπόθεση έχουμε ότι
$$|h(x) - h(y)| \le (x-y)^2 \quad \text{για όλα τα} \;\; x, y.$$
Επομένως από το ερώτημα 1. η h είναι σταθερή. Αλλά $h(x) = h(0) = g(0) - e^0 + 0 = 2 - 1 = 1$. Επομένως
$$g(x) = e^x - x + 1.$$

(β′) Είναι
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(e^x - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty,$$
αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$.

15.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

15.5.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Να βρείτε συνάρτηση για την οποία ισχύει $f''(x) = 12x^2 + 2$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(1,1)$ έχει κλίση 3.

2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f του ερωτήματος 1., την εφαπτομένη της στο A και τον άξονα $x'x$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^{x-2} \frac{t}{e^t} dt$

1. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

2. Να λύσετε την εξίσωση το $f(x) = 1$.

15.5.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.1 Α4.

2. Είναι
$$f(x) = x^4 + x^2 + -3x + 2.$$
Επειδή η f είναι κυρτή η $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται πάνα από κάθε εφααπτομένη της. Η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση $y = 3x - 2$ επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:
$$E = \int_0^1 (f(x) - (3x-2))\, dx = \int_0^1 \left(x^4 + x^2 - 6x + 4\right) dx = \frac{23}{15}.$$

ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.5 Β3.

2. Μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f με ολοκλήρωση κατά παράγοντες:
$$f(x) = \int_0^{x-2} te^{-t} dt = \int_0^{x-2} t\left(-e^{-t}\right)' dt = \left[-te^{-t}\right]_0^{x-2} + \int_0^{x-2} e^{-t} dt =$$
$$\left[-te^{-t}\right]_0^{x-2} + \left[-e^{-t}\right]_0^{x-2} = (1-x)\, e^{2-x} + 1.$$
Επομένως η εξίσωση $f(x) = 1$ είναι ισοδύναμη με την
$$(1-x)\, e^{2-x} + 1 = 1,$$
που έχει μοναδική λύση $x = 1$.

15.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

15.6.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

6 Μοναδες

2. Να βρείτε τα ακρότατα της f και να εξετάσετε αν είναι ολικά.

6 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $x = 0$, $y = x$ είναι ασύμπτωτες της f.

6 Μοναδες

4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 f(x)\,dx$.

7 Μοναδες

ΘΕΜΑ 2

Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις φ, ψ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = \varphi(x) + 1$$

$$\varphi'(x) - x\psi'(x) = \varphi(x) - x$$

και

$$\varphi(0) = 1, \qquad \psi(0) = 0$$

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(x+1)\varphi'(x) = (x+1)\varphi(x).$$

5 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι $\varphi(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι $\psi(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5 Μοναδες

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των φ, ψ και τις ευθείες $x = 0$ και $x + y = e + 1$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$g\left(x\right) = x - \ln x$$

1. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία $y = ax + b$ ώστε

   $$\lim_{x \to +\infty} \left(g\left(x\right) - ax - b\right) = 0.$$

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να λύσετε την εξίσωση $g\left(x\right) = 1$.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε σημείο της γραφικής παράστασης της g που απέχει από το σημείο $A(1,0)$ ελάχιστη απόσταση.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση δύο φορές παργωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(x) > 1$ και $f''(x) > 0$ για κάθε x. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ είναι κυρτή.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

- $e^{-f(x)} f'\left(x\right) = 2 - f\left(x\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $f(x) \neq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1. Να δειχθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

   5 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να δειχθεί ότι η $f(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα-κυρτά και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία της C_f με αρνητικές τετμημένες.

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

5. Δίνεται επιπλέον ότι η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 2)$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι ισχύει:

$$f^{-1}(x) = \int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u} du, \quad x \in (-\infty, 2)$$

5 ΜΟΝΑΔΕΣ

15.6.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Είναι $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ και επομένως η f' είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ και αρνητική στα $(-1, 0)$, $(0, 1)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο καθένα από τα διαστήματα $[-\infty, -1]$, $[1, +\infty]$ και γνησίως φθίνουσα στο καθένα από τα $[-1, 0]$, $[0, 1]$). Τα συμπεράσματα συνοψίζονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

2. Από τον προηγούμενο πίνακα φαίνεται ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο -1 το -2 και τοπικό ελάχιστο στο 1 το 2. Το -2 δεν αποτελεί ολικό μέγιστο αφού η f παίρνει και μεγαλύτερες τιμές λ.χ. το 2. Ούτε το 2 αποτελεί ολικό ελάχιστο αφού η f παίρνει και μικρότερες τιμές όπως το -2.

3. Είναι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ επομένως η ευθεία $x = 0$ αποτελεί κατακόρυφη ασύμπτωτη της f. Επίσης $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0$ άρα η ευθεία $y = x$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της f τόσο στο $+\infty$ όσο και στο $-\infty$.

4. Είναι:
$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_2^3 = \frac{5}{2} + \ln 3 - \ln 2$

ΘΕΜΑ 2

1. Λύνουμε την πρώτη σχέση ως προς $\psi'(x)$ και βρίσκουμε
$\psi'(x) = \varphi(x) + 1 - \varphi'(x)$
αντικαθιστώντας στην δεύτερη σχέση έχουμε: $\varphi'(x) - x\varphi(x) - x + x\varphi'(x)$
$= \varphi(x) - x$
οπότε:
$\varphi'(x) + x\varphi'(x) = \varphi(x) + x\varphi(x)$
άρα και
$(1+x)\varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$

2. Από την $(1+x)\varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$ έχουμε ότι για $x \neq -1$ είναι $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Εργαζόμενοι όπως σε γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου έχουμε ότι για $x \neq -1$ είναι:
$\left(\frac{\varphi(x)}{e^x}\right)' = \frac{\varphi'(x)e^x - e^x\varphi(x)}{\varphi(x)} = 0$
Επομένως σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$ η $\frac{\varphi(x)}{e^x}$ είναι σταθερή, Θα υπάρχουν λοιπόν αριθμοί c_1, c_2 ώστε

- Για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ να ισχύει $\frac{\varphi(x)}{e^x} = c_1$
- Για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ να ισχύει $\frac{\varphi(x)}{e^x} = c_2$

Μέχρι στιγμής ξέρουμε ότι

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 e^x & x < -1 \\ ; & x = 1 \\ c_2 e^x & x > -1 \end{cases}$$

Θέτοντας όπου x το 0 βρίσκουμε ότι $c_2 = 1$ και επομένως για $x > -1$ είναι $\varphi(x) = e^x$. Αλλά η $\varphi(x) = e^x$ ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής επομένως:
$\lim_{x \to -1^-} \varphi(x) = \varphi(-1) = \lim_{x \to -1^+} \varphi(x)$ Δηλαδή:
$c_1 e^{-1} = \varphi(-1) = e^{-1}$
Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι $c_1 = 1$ και επομένως $\varphi(x) = e^x$ και για τα $x < -1$. Φυσικά $\varphi(x) = e^x$ και για το $x = -1$ λόγω της $\varphi(-1) = e^{-1}$. Τελικά $\varphi(x) = e^x$ ια όλα τα x.

3. Αντικαθιστώντας στην $\varphi'(x) + \psi'(x) = \varphi(x) + 1$ το $\varphi(x) = e^x$ βρίσκουμε ότι $\psi'(x) = 1$ και επομένως $\psi(x) = x + k$. Αλλά $\psi(0) = 0$ άρα $\psi(x) = x$ για κάθε x.

4. Από την γνωστή σχέση $\ln x \leq x - 1$ έχουμε $\ln e^x \leq e^x - 1$ δηλαδή ότι για όλα τα x ισχύει $e^x \geq x + 1$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι για όλα τα x ισχύει $e^x > x$. Άρα η $\mathcal{C}_\varphi$ είναι πάνω από την $\mathcal{C}_\psi$.

Το σημείο τομής A της $\mathcal{C}_\varphi$ με την ευθεία $x+y=e+1$ βρίσκεται αν λύσουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \\ x + y = e + 1 \end{array}\right\}$$

η επίλυση του οποίου ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης:

$$x + e^x = e + 1$$

που με την σειρά της ανάγεται στην εύρεση των ριζών της συνάρτησης

$$r\left(x\right) = x + e^x - e - 1$$

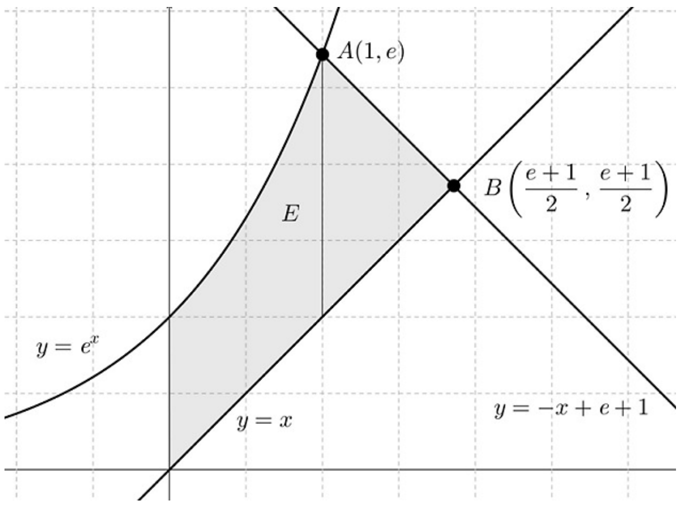
Η συνάρτηση αυτή έχει προφανή ρίζα το 1 και αφού

$$r'\left(x\right) = 1 + e^x > 0$$

η r είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα είναι μοναδική. Άρα $x = 1$, $y = e$ και είναι $A(1,e)$.
Το σημείο τομής B της $\mathcal{C}_\psi$ με την ευθεία $x + y = e + 1$ βρίσκεται αν λύσουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ x + y = e + 1 \end{array}\right\}$$

από το οποίο εύκολα προκύπτει ότι $B\left(\frac{e+1}{2}, \frac{e+1}{2}\right)$.



Για το ζητούμενο εμβαδόν E έχουμε:

$$E = \int_0^1 \left(\varphi\left(x\right) - x\right) dx + \int_1^{\frac{e+1}{2}} \left(-x + e + 1 - x\right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(e^x - x\right) dx + \int_1^{\frac{e+1}{2}} \left(-x + e + 1 - x\right) dx =$$

$$\left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-x^2 + ex + x\right]_1^{\frac{e+1}{2}} = \frac{1}{2}e - \frac{5}{4} + \frac{1}{4}e^2.$$

ΘΕΜΑ 3

1. Η g ορίζεται στο $(0,+\infty)$. Είναι:
   $g(x) = x - \ln x$
   $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$
   $g''(x) = \frac{1}{x^2}$
   Άρα $g''(x) > 0$ γιά κάθε $x \in (0,+\infty)$ και επομένως η g είναι κυρτή.

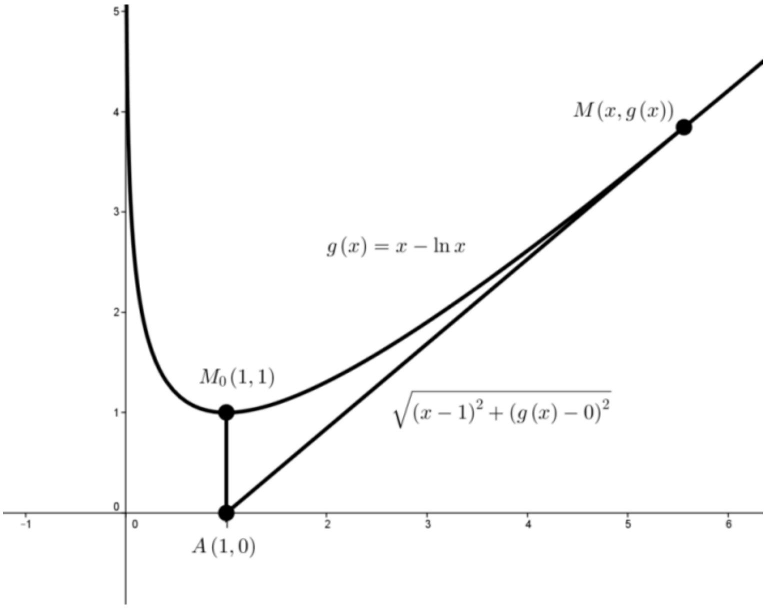
2. Αν μία τέτοια ευθεία υπάρχει θα πρέπει να είναι ασύμπτωτη της g στο $+\infty$. Τότε
   $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ και
   $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - ax) = \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x)$
   Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = -\infty$ ενώ πρέπει $b \in \mathbb{R}$.
   Επομένως δεν υπάρχει ευθεία με αυτή την ιδιότητα.

3. Είναι $g(x) = 1 \Leftrightarrow x - \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = x - 1$.
   Όμως γνωρίζουμε ότι για όλα τα $x > 0$ ισχύει $\ln x \le x - 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.
   Άρα η εξίσωση $g(x) = 1$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

4. Έστω τυχόν σημείο $M(x, g(x))$ της $\mathcal{C}_g$. Θέλουμε η απόσταση του
   $$\sqrt{(x-1)^2 + (g(x) - 0)^2}$$
   από το $A(1,0)$ να είναι ελάχιστη. Αρκεί το υπόρριζο να γίνει ελάχιστο δηλαδή η
   $$s(x) = (x-1)^2 + g(x)^2 \quad x > 0,$$
   να γίνει ελάχιστη. Είναι
   $$s'(x) = 2\frac{2x^2 - 2x - (\ln x)x + \ln x}{x} = \frac{2(x-1)(2x - \ln x)}{x}.$$
   Επειδή για θετικά x είναι $2x > x > x - 1 \ge \ln x$ ο παράγοντας $2x - \ln x$ είναι θετικός άρα το πρόσημο της $s'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $x - 1$. Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής της $s(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$s'(x)$		$-$	0	$+$	
$s(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

   Επομένως η $s(x)$ γίνεται ελάχιστη για $x = 1$ και το σημείο το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από το A είναι το $M_0(1, g(1))$ δηλαδή το $M-0(1,1)$.



5. Έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = f(x) - \ln f(x)$$

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(g \circ f)''(x) = f''(x) - \frac{f''(x) f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} =$$

$$\frac{f''(x) f^2(x) - f''(x) f(x) + (f'(x))^2}{f^2(x)} =$$

$$\frac{\overbrace{f''(x)}^{+}\overbrace{(f(x)-1)}^{+}\overbrace{f(x)}^{+} + \overbrace{(f'(x))^2}^{\geq 0}}{f^2(x)} > 0$$

Άρα η $g \circ f$ είναι κυρτή.

ΘΕΜΑ 4

1. Είναι $e^{-f(x)} f'(x) = 2 - f(x)$ και επομένως $f'(x) = \frac{2-f(x)}{e^{-f(x)}}$. Η συνάρτηση $\frac{2-f(x)}{e^{-f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων επομένως και η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη. Άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

2. Η $2 - f(x)$ ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Αφού είναι ορισμένη σε διάστημα και δεν έχει ρίζα διατηρεί πρόσημο. Είναι $2 - f(0) = 1 > 0$. Άρα η $2 - f(x)$ είναι παντού θετική και $f(x) < 2$.

3. Από την $f'(x) = \frac{2-f(x)}{e^{-f(x)}}$ και το γεγονός ότι $2 - f(x) > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) > 0$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

4. Έχουμε $f''(x) =$
$\left(\frac{2-f(x)}{e^{-f(x)}}\right)' = \frac{-f'(x)e^{-f(x)}-(-f'(x))e^{-f(x)}(2-f(x))}{e^{-2f(x)}} =$
$\frac{-f'(x)e^{-f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}(2-f(x))}{e^{-2f(x)}} = \frac{f'(x)e^{-f(x)}(1-f(x))}{e^{-2f(x)}}$
Για $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 1$ και για $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 1$.
Άρα στο $(-\infty, 0]$ είναι $f''(x) > 0$ και επομένως η f είναι κυρτή ενώ στο $[0, +\infty)$ είναι $f''(x) < 0$ και η f είναι κοίλη.
Έστω τώρα $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $C(x_3, f(x_3))$ τρία σημεία της $\mathcal{C}_f$ με αρνητικές τετμημένες $x_1 < x_2 < x_3 < 0$.
Για τους συντελεστές διευθύνσεως των AB, BC έχουμε
$\lambda_{AB} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \underset{\text{ΘΜΤ}}{=} f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_1, x_2)$
$\lambda_{BC} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \underset{\text{ΘΜΤ}}{=} f'(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_2, x_3)$
Αλλά αφού η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα και επομένως με $\xi_1 < x_2 < \xi_2$ είναι $f'(\xi_2)$ άρα $\lambda_{AB} < \lambda_{BC}$ και τα A, B, C δεν είναι συνευθειακά.

5. Η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $1-1$ άρα και αντιστρέψιμη.
Υποθέτουμε τώρα ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 2)$ και θα δείξουμε ότι η αντίστροφη της είναι η $\int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u}du$, $x \in (-\infty, 2)$.
Α Τροπος: Από την υπόθεση έχουμε για κάθε t είναι:
$\frac{e^{-f(t)}f'(t)}{2-f(t)} = 1.$
Επομένως και
$\int_0^x \frac{e^{-f(t)}f'(t)}{2-f(t)}dt = \int_0^x 1dt.$
Αλλάζουμε μεταβλητή θέτοντας $u = f(x)$ και έχουμε:
Άρα έχουμε εκφράσει το x συναρτήσει του $y = f(x)$:
$\int_1^y \frac{e^{-u}}{2-u}dt = x.$
Άρα έχουμε βρεί ότι:
$f^{-1}(x) = \int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u}du, \quad x \in (-\infty, 2)$
Β Τροπος: Θεωρούμε την συνάρτηση
$g(x) = \int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u}du, \quad x \in (-\infty, 2).$
Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε $f(x) \in (-\infty, 2)$. Επομένως ορίζεται η $g \circ f$.
Είναι $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)) = f'(x)\frac{e^{-f(x)}}{2-f(x)} = 1 = (x)'$.
Επομένως $(g \circ f)(x) = x + c$.
Αλλά $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$. Άρα $c = 0$ και επομένως:
$(g \circ f)(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$
Οι g και f^{-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού: το $(-\infty, 2)$. Επίσης αν $x \in (-\infty, 2)$ τυχόν τότε
$(g \circ f)\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(x)$ και επομένως $g(x) = f^{-1}(x)$ άρα $g = f^{-1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

Σχολικό έτος 2014-2015

16.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

16.1.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 να αποδείξετε ότι

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

2. Έστω $\mathcal{C}$ ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Υποθέτουμε ότι η εικόνα του w ανήκει στον $\mathcal{C}$ και ότι για τον μιγαδικό αριθμό u ισχύει

$$|u+w|^2+|u-w|^2=4.$$

Να αποδείξετε ότι και η εικόνα του u ανήκει στον $\mathcal{C}$.

ΘΕΜΑ 2

1. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $z\neq 0$. Να δείξετε ότι ο $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2\leq\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}\leq 2$.

2. Έστω $\alpha\in[-2,2]$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών $z\neq 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}=\alpha$$

16.1.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Α΄ Μέρος § 2.3 Α9

2. Από την υπόθεση και το ερώτημα 1. έχουμε ότι

$$2|u|^2 + 2|w|^2 = 4$$

και αφού $|w| = 1$ θα είναι $|u| = 1$ επμένως η εικόνα του u ανήκει στον $\mathcal{C}$..

ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Α΄ Μέρος § 2.2 Β6

2. Έχουμε τις ισοδυναμίες

$$\frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} = a \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 = az\bar{z} \underset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}$$

$$(x+yi)^2 + (x-yi)^2 = a\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$(2-a)\,x^2 - (2+a)\,y^2 = 0 \underset{2-a\geq 0,\ 2+a\geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\sqrt{2-a}\cdot x\right)^2 - \left(\sqrt{2+a}\cdot y\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2-a}\cdot x - \sqrt{2+a}\cdot y = 0 \quad \text{ή} \quad \sqrt{2-a}\cdot x + \sqrt{2+a}\cdot y = 0.$$

Η εξίσωση $\sqrt{2-a}\cdot x - \sqrt{2+a}\cdot y = 0$ είναι εξίσωση ευθείας διότι δε μπορούν και οι δύο συντελεστές των x, y να είναι μηδέν. Για τον ίδιο λόγο και η εξίσωση $\sqrt{2-a}\cdot x + \sqrt{2+a}\cdot y = 0$ είναι εξίσωση ευθείας και ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι το σχήμα που απαρτίζεται από τις δύο αυτές ευθείες που τέμνονται στην αρχή των αξόνων.

16.2 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

16.2.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$\varphi(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{x^2-1}}.$$

Βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\varphi\circ\varphi)(x)$

ΘΕΜΑ 2

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις

$$f(0) < g(0) \quad \text{και} \quad f(1) > g(1)$$

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,1]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

2. Δίνεται επιπλέον ότι οι f, g είναι γνησίως μονότονες και η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι το ξ του ερωτήματος 1. είναι μοναδικό.

16.2.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 1.7 Α3 v).

2. Η φ ρίζεται στα x για τα οποία ισχύει:

   - $x^2 - 1 \geq 0$ και
   - $x - \sqrt{x^2-1} \neq 0$.

   Η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται όταν $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ και η δεύτερη που είναι ισοδύναμη με την $x \neq \sqrt{x^2-1}$ η οποία προφανώς ισχύει για αρνητικά x ενώ για μη αρνητικά x ισχύει αν και μόνο αν $x^2 \neq x^2 - 1$ δηλαδή πάντα. Επομένως $\mathcal{D}_f = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.

   Έχουμε

   $$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x - |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \underset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

   Επίσης για $x < 0$ είναι $\varphi(x) > 1$ διότι

   $$\varphi(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}} > 1 \underset{x-\sqrt{x^2-1}<0}{\Leftrightarrow} x-\sqrt{x^2+1} < x-\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+1} < -\sqrt{x^2-1},$$

   και η τελευταία σχέση ισχύει. Άρα κοντά στο $-\infty$ είναι $\varphi(x) > 1$, ορίζεται η $\varphi \circ \varphi$ και

ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 1.8 Β4.

2. Αποκλείεται αμφότερες οι f, g να είναι γνησίως αύξουσες διότι τότε θα είχαμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$$

και $g \circ f \uparrow$ (άτοπο). Όμοια αποκλείεται να είναι $f \downarrow$ και $g \downarrow$. Επομένως κάποια από τις δύο συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσα και η άλλη γνησίως φθίνουσα. Αν συνέβαινε $f \downarrow$ και $g \uparrow$ θα είχαμε ότι $f(1) < f(0) < f(0) < g(1)$ πο αντίκειται στην υπόθεση. Άρα $f \uparrow$ και $g \downarrow$. Εύκολα προκύπτει τότε ότι $-g \uparrow$ και $f - g \uparrow$ άρα είναι $1-1$ και έχει το πολύ μια ρίζα. Άρα και η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα. Αλλά ξέρουμε ότι έχει ρίζα άρα είναι μοναδική.

16.3 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

16.3.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

ΘΕΜΑ 1

Έστω $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει:

$$9f(x) - 3xf'(x) - f''(x) = 9.$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε η f είναι γνησίως αύξουσα.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x) = f(x)$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύουν:

- $\left|z - \frac{1}{4}\right| = \mathrm{Re}(z) + \frac{1}{4}$

- $\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) > 0$

1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η καμπύλη:
$$y = \sqrt{x}, \qquad x > 0.$$

8 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι $\left|z - \frac{13}{2}\right| \geq \frac{5}{2}$.

8 Μοναδες

3. Αν, επιπλέον, ισχύει
$$z^2 - |z|^2 = 2(z - \bar{z})(2 + i)$$
να βρείτε τον z.

9 Μοναδες

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 1$, έτσι ώστε
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = k \in \mathbb{R}.$$

1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 2$.

6 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

6 Μοναδες

3. Έστω ότι $k = \frac{3}{4}$.

   (α′) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $M(1,2)$.

   6 Μοναδες

   (β′) Ένα σημείο K με τετμημένη μικρότερη του 1 κινείται στην εφαπτομένη (ε). Αν η τετμημένη του K αυξάνει με ρυθμό μεταβολής $\frac{2m}{\sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OKM (O η αρχή των αξόνων).

   7 Μοναδες

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = x^{2015}$ και
- $g(x) = 1 - x^n$ όπου n θετικός ακέραιος.

1. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

8 Μοναδες

2. Για τον ξ του ερωτήματος 1.

   (α′) Να αποδείξετε ότι $\xi > \frac{1}{2}$.

7 Μοναδες

   (β′) Έστω διάστημα (α, β) τέτοιο ώστε:
   - $(\alpha, \beta) \subseteq (0,1)$
   - $\xi \in (\alpha, \beta)$

   Να αποδείξετε ότι

$$(f(\alpha) - g(\alpha))(f(\beta) - g(\beta)) < 0.$$

6 Μοναδες

3. Έστω ότι $n < 3$. Υποθέτουμε ότι η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z ανήκει στο χωρίο που περικλείεται μεταξύ των θετικών ημιαξόνων Ox, Oy και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g. Να αποδείξετε ότι $|z| \leq 1$.

4 Μοναδες

16.3.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Είναι $f(x) = x^3 + x + 1$, $f'(x) = 3x^2 + 1$ και $f''(x) = 6x$. Επομένως: $9f(x) - 3xf'(x) - f''(x) = 9\left(x^3 + x + 1\right) - 3x\left(3x^2 + 1\right) - 6x = 9$

2. Αν $x_1 < x_2$ τότε και $x_1^3 < x_2^3$ οπότε $x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2$ και $x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^3 + x_2 + 1$ δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

3. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχει σύνολο τιμών $f((-\infty, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$.

4. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και $1-1$. Άρα έχουμε τις ισοδυναμίες:

   $(f\circ f)(x) = f(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x^3+x+1 = x \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = -1$

ΘΕΜΑ 2

1. Θέτουμε $z = x+yi$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $xy>0$. Είναι:

$$\left|z-\frac{1}{4}\right| = \mathrm{Re}(z)+\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left|x+yi-\frac{1}{4}\right| = x+\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2} = x+\frac{1}{4} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2}^{\,2} = \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2 = \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}+y^2 = x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$y^2 = x \overset{(**)}{\Leftrightarrow}$$

$$y=\sqrt{x},\ \ x>0.$$

   Η ισοδυναμία $(**)$ ισχύει διότι τα x, y πρέπει να είναι ομόσημα και λόγω της $y^2=x$ είναι $x>0$. Η συνεπαγωγή $(*)$ αν $y=\sqrt{x}, x>0$ είναι ισοδυναμία επομένως από την υπόθεση $y=\sqrt{x}, x>0$ προκύπτει η $\left|z-\frac{1}{4}\right| = \mathrm{Re}(z)+\frac{1}{4}$.

2. Έχουμε:

$$\left|z-\frac{13}{2}\right| \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left|x+\sqrt{x}i-\frac{13}{2}\right| \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$x^2-12x+\frac{169}{4} \geq \frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 12x + 36 \geq 0$$

$$(x-6)^2 \geq 0.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει επομένως ισχύει και η αποδεικτέα.

3. Η σχέση $z^2 - |z|^2 = 2(z - \bar{z})(2+i)$ μας δίνει την $\left(x + \sqrt{x}i\right)^2 - \sqrt{x^2 + \sqrt{x}^2}^2 = 2\left(2i\sqrt{x}\right)(2+i)$ από την οποία προκύπτει ότι $-2x + 2ix\sqrt{x} = -4\sqrt{x} + 8i\sqrt{x}$ που μας δίνει τις $-2x = -4\sqrt{x}$ και $2x\sqrt{x} = 8\sqrt{x}$ που, αφού $x > 0$, επαληθεύονται για $x = 4$. Άρα $y = \sqrt{4} = 2$ και $z = 4 + 2i$.

ΘΕΜΑ 3

1. Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1}$, $x \neq 1$. Θα είναι $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = k$ και $f(x) = (x-1)g(x) + \sqrt{x+3}$. Άρα αφού η f είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)g(x) + \sqrt{x+3}\right) = 0 \cdot k + \sqrt{1+3} = 2$.

2. Είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)g(x)+\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(g(x) + \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to 1}\left(g(x) + \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(g(x) + \frac{\sqrt{x+3}^2 - 4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 1}\left(g(x) + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right) = k + \frac{1}{4} \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

3. (α΄) Αφού $k = \frac{3}{4}$ η παράγωγος της f στο 1 είναι $f'(1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ επομένως η εξίσωση εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $M(1,2)$ θα είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ που γίνεται $y - 2 = 1 \cdot (x-1)$ δηλαδή $y = x + 1$.

   (β΄) Αν $x(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης της τετμημένης του σημείου K και $y(t)$ η συνάρτηση θέσης της τεταγμένης είναι $y(t) = x(t) + 1$ και $x'(t) = \frac{2m}{\sec}$. Το τρίγωνο OKM έχει εμβαδόν

$$E(t) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM}\right)\right| =$$

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc} x(t) & x(t)+1 \\ 1 & 2 \end{array}\right\| = \frac{1}{2}|x(t) - 1| = \frac{1}{2}(1 - x(t))$$

   Επομένως $E'(t) = -\frac{1}{2}x'(t) = -\frac{1\,m^2}{\sec}$.

ΘΕΜΑ 4

1. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi) - g(\xi) = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = x^{2015} + x^n - 1$. Αυτή ως πολυωνυμική είναι συνεχής και ακόμη $h(0)h(1) = -1$ επομένως από το θεώρημα του Bolzano έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (0,1)$,

   Έστω $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2$. Αφού είναι θετικοί αριθμοί θα είναι $x_1^{2015} < x_2^{2015}$ και $x_1^n < x_2^n$ άρα $x_1^{2015} + x_1^n - 1 < x_2^{2015} + x_2^n - 1$ δηλαδή $h(x_1) < h(x_2)$ και η h είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα της $\xi \in (0,1)$ είναι μοναδική.

2. (α′) Για τον ξ ισχύει $h(\xi) = 0$ δηλαδή $\xi^{2005} + \xi^n = 1$. Ας υποθέσουμε ότι $\xi \le \frac{1}{2}$. Τότε

   $$\xi^{2005} + \xi^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2005} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2005} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1(\text{άτοπο}).$$

   Άρα $\xi > \frac{1}{2}$.

   (β′) Έχουμε $0 < \alpha < \xi < \beta < 1$ και από τη μονοτονία της $h(x) = f(x) - g(x)$ έχουμε $h(\alpha) < h(\xi) < h(\beta)$ δηλαδή $f(\alpha) - g(\alpha) < 0 < f(\beta) - g(\beta)$ άρα $(f(\alpha) - g(\alpha))(f(\beta) - g(\beta)) < 0$.

3. Είδαμε ότι με $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$ είναι $x_1^n < x_2^n$ και επομένως $-x_1^n > -x_2^n$ άρα $1 - x_1^n > 1 - x_2^n$ και επομένως η g είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού είναι συνεχής και $g(0) = 1$, $g(1) = 0$ το σύνολο τιμών της θα είναι το $[0,1]$. Έστω $z = x + yi$. Θα είναι $0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le g(x)$. Άρα

   $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{x^2 + g(x)^2} = \sqrt{x^2 + (1 - x^n)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^n + x^{2n}}.$$

   Θέλουμε $|z| \le 1$ δηλαδή θέλουμε να ισχύει $\sqrt{x^2 + 1 - 2x^n + x^{2n}} \le 1$ ή ισοδύναμα $x^2 + 1 - 2x^n + x^{2n} \le 1$ και τελικά

   $$x^2 - 2x^n + x^{2n} \le 0 \quad (\#).$$

   Αφού $n < 3$ θα είναι $n = 1$ ή $n = 2$.

   - Για $n = 1$ η $(\#)$ γίνεται $2x(x - 1) \le 0$ που ισχύει.
   - Για $n = 2$ η $(\#)$ γίνεται $x^2(x - 1)(x + 1) \le 0$ που πάλι ισχύει.

   Τελικά για $n < 3$ ισχύει $|z| \le 1$.

16.4 Διαφορικός Λογισμός.

16.4.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$.

1. Να βρείτε τις τιμές των α,β ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει ακρότατ-τα στα σημεία $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

2. Για τις τιμές των α,β που βρήκατε στο ερώτημα 1.

   (α′) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής.

   (β′) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f.

Θεμα 2

1. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}.$$

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση $g : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} p & \text{αν} \quad x = 0 \\ \frac{\eta\mu x}{\ln(x+1)} & \text{αν} \quad x \in (-1,0) \cup (0,+\infty) \end{cases}$$

   (α′) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη.

   (β′) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος g' της g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(3, 7)$.

16.4.2 Απαντήσεις

Θεμα 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 2.7 Α5.

2. (α′) Από το ερώτημα 1. έχουμε $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ επομένως

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

   Έχουμε $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, $f''(x) = 6x$, επομένως η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ κυρτή στο $[0, +\infty,)$ και το σημείο $(0, 1)$ είναι σημείο καμπής της.

   (β′) Ο πίνακας μεταβολής της f είναι:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			τμ		σκ		τε		

Στα $-\infty$, $+\infty$ η f έχει όρια $-\infty$, $+\infty$ και στα -1, 1 παίρνει τις τιμές 3 και -1. Επομένως η f έχει από μία ρίζα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο B′ μέρος § 2.9 A4 i).

2. (α′) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε, λόγω συνεχείας, οτι $p = 1$. Η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρήσεων. Για την παραγωγισιμότητα στο 0 έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x+1}}{\frac{x\ln(x+1)+\ln(x+1)+x}{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x\ln(x+1)+\ln(x+1)+x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\eta\mu x}{\ln(x+1)+2} = \frac{1}{2}.$$

(β′) Από το ερώτημα 2 (α′) η g είναι παραγωγίσιμη. Είναι $g(\pi) = g(2\pi) = 0$ επομένως από το θεώρημα του Rolle η g' έχει ρίζα στο $(\pi,2\pi)$. Αλλά $3 < \pi < 2\pi < 7$ επομένως η ρίζα αυτή ανήκει και στο $(3,7)$.

16.5 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

16.5.1 Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ 1

Έστω $g(h) = \int_2^{2+h}\sqrt{5+t^2}dt$. Να βρείτε τα όρια:

1. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}g(h)$

2. $\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{1}{h^2}g(h)$

ΘΕΜΑ 2

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x-3)$.

1. (α′) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία A,B που τέμνει τον άξονα των x.

   (β′) Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων να αποδείξετε ότι η $\mathcal{C}_f$ χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{2}{1}$.

2. Έστω:

   - S_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείται από την $\mathcal{C}_f$ και τον $x'x$.
   - S_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείται από την $\mathcal{C}_f$ και τους άξονες $x'x$, $y'y$.

   Να αποδείξετε ότι $S_1=S_2$

16.5.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.5 Β6.

2. Για $h>0$ έχουμε

$$g(h)=\int_2^{2+h}\sqrt{5+t^2}dt>\int_2^{2+h}tdt=2h+\frac{1}{2}h^2$$

και αφού $\lim\limits_{h\to+\infty}\left(2h+\frac{1}{2}h^2\right)=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{h\to+\infty}g(h)=+\infty$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του de l' Hospital έχουμε:

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{1}{h^2}g(h)=\lim_{h\to+\infty}\frac{\int_2^{2+h}\sqrt{5+t^2}dt}{h^2}\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}$$

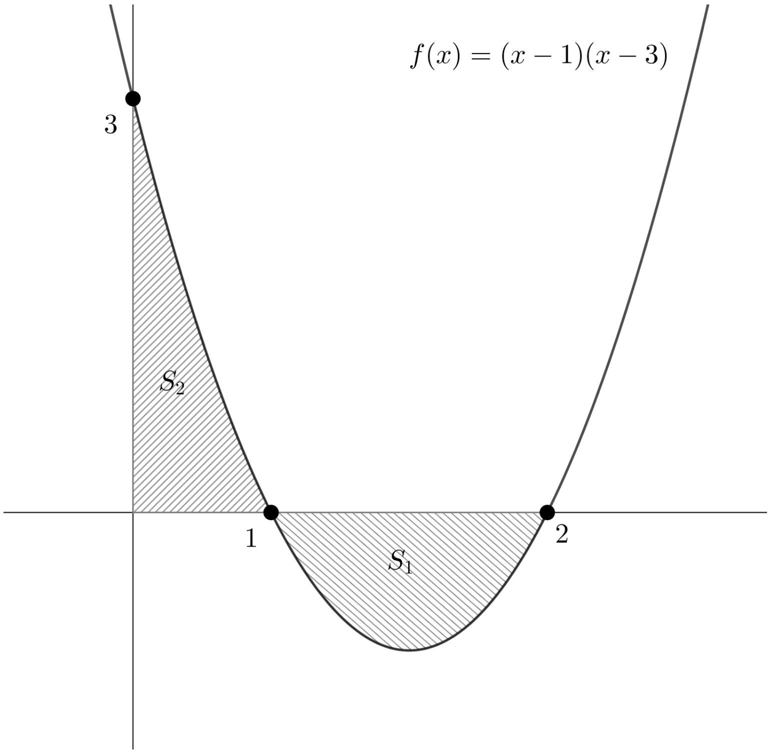
$$\lim_{h\to+\infty}\frac{\sqrt{h^2+4h+9}}{2h}\underset{h>0}{=}\lim_{h\to+\infty}\frac{h\sqrt{1+\frac{4}{h}+\frac{9}{h^2}}}{2h}=\frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ μέρος § 3.7 Β12.

2. Η f εκτός των ριζών της 1 και 3 παίρνει θετικές τιμές, μεταξύ των ριζών αρνητικές. Άρα

$$S_1=-\int_1^3 f(x)\,dx,\quad S_2=\int_0^1 f(x)\,dx.$$



Είναι:

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = -\int_1^3 f(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_0^3 = 0.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει άρα και η πρώτη.

16.6 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

16.6.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

ΘΕΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της.

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \leq 1$ ισχύει

$$f(x) \leq 6$$

6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $\mathcal{C}_f$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

7 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- $f(0) = f'(0) = 2$
- $f(x + y) = \frac{1}{2} f(x) f(y)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

8 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x f(x)\, dx$.

9 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 3

Για τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι:

1. $f(x) = (\ln(e^x + 1) - x)'$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. $g(x) - (e^x + 1) g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
3. $g(0) = \frac{1}{2}$

1. Να βρείτε την f.

3 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

8 Μοναδες

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g.

6 Μοναδες

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 g(x)\,dx < 1$$

8 Μοναδες

ΘΕΜΑ 4

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\int_1^{f(x)} \frac{1}{e^t - t - 1}dt = \frac{x-1}{e-2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$.

7 Μοναδες

2. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

3 Μοναδες

3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $A(1, f(1)$.

7 Μοναδες

4. Αν $a > 1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, a)$ έτσι ώστε

$$\int_a^{x_0} f(t)\,dt = x_0 - f(x_0)$$

8 Μοναδες

16.6.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Είναι $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ και $f''(x) = 12x - 18$. Οι ρίζες και τα πρόσημα των f' και f'' , τα διαστήματα μονοτονίας και τα διαστήματα όπου η f είναι κοίλη ή κυρτή απεικονίζονται στον πίνακα:

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Η f παρουσιάζει στα 1 και 2 αντιστοίχως τοπικό μέγιστο $f(1) = 6$ και τοπικό ελάχιστο $f(2) = 5$ που δεν είναι ολικά. Επίσης στο $\frac{3}{2}$ παρυσιάζει καμπή με αντίστοιχο σημείο καμπής το $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

2. Παίρνοντας τα σύνολα τιμών της f στα διατήματα που είναι γνησίως μονότονη βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι $f(\mathbb{R}) = f((-\infty,1]) \cup f([1,2]) \cup f([2,+\infty)) = (-\infty,6] \cup [5,6] \cup [5,+\infty) = \mathbb{R}$. Στο διάστημα $(-\infty,6]$ η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα η οποία λόγω μονοτονίας είναι μοναδική ενώ στα $[5,6],[5,+\infty)$ δεν έχει ρίζα. Επομένως η f έχει ακριβώς μία ρίζα.

3. Στο $(-\infty,1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως αν $x \le 1$ θα είναι $f(x) \le f(1)$ άρα $f(x) \le 6$.

4. Για $0 \le x \le 1$ λόγω της μονοτονίας της f είναι $f(0) \le f(x)$και επομένως $1 \le f(x)$. Άρα στο $[0,1]$ η f παίρνει θετικές τιμές και το ζητούμενο εμβαδόν είναι δηλαδή

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 + x\right]_0^1 = \frac{9}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2

1. Έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=\frac{1}{2}f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2}{h-0}.$$

Αλλά
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-2}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f'(0)=2.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x_0)=f(x_0)$ για όλα τα x_0. Αλλά οι συναρτήσεις που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f'=f$ είναι της μορφής ce^x

2. Από το προηγούμενο ισχύει $f'(x)=f(x)$ για όλα τα x άρα $f(x)=ce^x$. Θέτοντας $x=0$ βρίσκουμε $f(x)=2e^x$.

3. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες βρίσκουμε:

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 2xe^x dx=\int_0^1 2x\left(e^x\right)' dx=\left[2xe^x\right]_0^1-\int_0^1 (2x)' e^2 dx=$$

$$\left[2xe^x\right]_0^1-\int_0^1 2e^x dx=2.$$

ΘΕΜΑ 3

1. $f(x)=\left(\ln\left(e^x+1\right)-x\right)'=\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}-1=\frac{e^x}{e^x+1}-1=-\frac{1}{e^x+1}$

2. Η δοθείσα σχέση αν διαιρέσουμε με e^x+1 ισοδύναμα γράφεται $g'(x)-\frac{1}{e^x+1}g(x)=0$ δηλαδή
$$g'(x)+r'(x)g(x)=0$$
όπου $r(x)=\ln\left(e^x+1\right)-x$. Πολλαπλασιάζοντας με $e^{r(x)}$ έχουμε την ισοδύναμη σχέση
$$e^{r(x)}g'(x)+r'(x)e^{r(x)}g(x)=0$$
δηλαδή την
$$\left(e^{r(x)}g(x)\right)'=0.$$
Άρα $e^{r(x)}g(x)=k$ και επομένως $e^{\ln\left(e^x+1\right)-x}g(x)=k$ δηλαδή
$$\frac{e^x+1}{e^x}g(x)=k.$$
Θέτοντας $x=0$ βρίσκουμε $k=1$ και επομένως $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$.

3. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επομένως το όριο της σε οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό είναι η τιμή της σε αυτόν άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

για $x \to +\infty$ Βρίσκουμε τα

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{e^x}\right)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1+0} \cdot 0 = 0$$

και

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - 0 \cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{e^x}\right)} = 1$$

και έχουμε ότι η $y = \alpha x + \beta$ δηλαδή η $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της g στο $+\infty$.

για $x \to -\infty$ Με

$$\alpha = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

και

$$\beta = \lim_{x\to-\infty} \left(g(x) - 0 \cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0$$

η $y = \alpha x + \beta$ δηλαδή ο $x'x$ είναι ασύμπτωτη της g για $x \to -\infty$.

4. **Α΄ Τρόπος** Είναι

$$g'(x) = \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} > 0$$

και επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα. Άρα για $0 \le x \le 1$ είναι

$$g(0) \underset{(*)}{\le} g(x) \underset{(**)}{\le} g(1)$$

και η $(*)$ ισχύει σαν ισότητα μόνο όταν $x = 0$ ενώ η $(**)$ ισχύει σαν ισότητα μόνο αν $x = 1$. Άρα για όλα τα $x \in [0,1]$ ισχύει

$$g(x) - \frac{1}{2} \ge 0 \quad \text{και} \quad \frac{e}{e+1} - g(x) \ge 0$$

χωρίς η ισότητα να ισχύει για όλα τα x. Άρα $\int_0^1 \left(g(x) - \frac{1}{2}\right) dx > 0$ και $\int_0^1 \left(\frac{e}{e+1} - g(x)\right) dx > 0$ από τις οποίες έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{2} dx < \int_0^1 g(x)\, dx < \int_0^1 \frac{e}{e+1} dx$ και επομένως $\frac{1}{2}x < \int_0^1 g(x)\, dx < \frac{e}{e+1}$. Αλλά $\frac{e}{e+1} < 1$ και έχουμε το αποδεικτέο.

Β΄ Τρόπος Θέτουμε $u = e^x + 1$ και $e^x dx = du$ και έχουμε

$$\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx =$$

$$\int_2^{e+1} \frac{1}{u} du = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln \frac{e+1}{2}.$$

Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι $\frac{1}{2} < \ln \frac{e+1}{2} < 1$ ή ισοδύναμα $\sqrt{e} < \frac{e+1}{2} < e$ που ισχύει αφού $e = 2,71$.

Γ′ Τρόπος Έστω G οποιαδήποτε παράγουσα της g. Είναι

$$\int_0^1 g(x)\,dx = G(1) - G(0) = \frac{G(1) - G(0)}{1 - 0} = G'(\xi), \quad \xi \in (0,1)$$

από το θεώρημα μέσης τιμής για την G στο $[0,1]$. Θέλουμε $\frac{1}{2} < G'(\xi) < 1$ δηλαδή $\frac{1}{2} < \frac{e^{\xi}}{e^{\xi}+1} < 1$. Για το πρώτο σκέλος $\frac{1}{2} < \frac{e^{\xi}}{e^{\xi}+1}$ θέλουμε $e^{\xi} + 1 < 2e^{\xi}$ δηλαδή $1 < e^{\xi}$ που ισχύει αφού $\xi > 0$. Το δεύτερο σκέλος $\frac{e^{\xi}}{e^{\xi}+1} < 1$ είναι προφανές.

ΘΕΜΑ 4

1. Κατ'αρχάς θα χρειασθεί να βρούμε το πεδίο ορισμού της $\int_1^{f(x)} \frac{1}{e^t - t - 1}dt$. Πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{e^t-t-1}$. Με $h(t) = e^t - t - 1$ είναι $h'(t) = e^t - 1$ και επομένως $h'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0$ και $h'(t) < 0 \Leftrightarrow t < 0$. Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και επομένως έχει ελάχιστο στο 0 το 0. Είναι $h(t) > 0$ για $t \neq 0$ και $h(0) = 0$. Άρα ο ολοκληρωτέος $\frac{1}{e^t-t-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Για ν ορίζεται το ολοκλήρωμα πρέπει αμφότερα τα άκρα του να ανήκουν σε μόνο από τα διαστήματα που απαρτίζουν το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{e^t-t-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Επειδή το άκρο 1 ανήκει στο $(0, +\infty)$ θα πρέπει και το άλλο άκρο $f(x)$ να ανήκει και αυτό στο $(0, +\infty)$. Άρα $f(x) > 0$.

2. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_1^{f(x)} \frac{1}{e^t-t-1}dt$ είναι παραφωγίσιμη ως σύνθεση των $\int_1^{x} \frac{1}{e^t-t-1}dt, f(x)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι
$$\left(\int_1^{f(x)} \frac{1}{e^t - t - 1}dt\right)' = \left(\frac{x-1}{e-2}\right)'$$
και επομένως
$$f'(x)\frac{1}{e^{f(x)} - f(x) - 1} = \frac{1}{e-2}.$$
Επειδή $f(x) > 0$ είναι $e^{f(x)} - f(x) - 1 > 0$ και αφού $\frac{1}{e-2} > 0$ είναι και $f'(x) > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

3. Είναι $f'(x) = \frac{1}{e-2}\left(e^{f(x)} - f(x) - 1\right)$ και επομένως
$$f''(x) = \frac{1}{e-2}f'(x)\left(e^{f(x)} - 1\right).$$
Αφού $f(x) > 0$ και $f'(x) > 0$ το β′ μέλος της παραπάνω ισότητας είναι θετικό άρα $f''(x) > 0$ και η f είναι κυρτή.
Για να βρούμε την ζητούμενη εφαπτομένη θα βρούμε πρώτα το $f(1)$. Είναι $\int_1^{f(1)} \frac{1}{e^t-t-1}dt = 0$. Επειδή $\frac{1}{e^t-t-1} > 0$ αν ήταν $f(1) > 1$ θα είχαμε $\int_1^{f(1)} \frac{1}{e^t-t-1}dt > 0$. Αν ήταν $f(1) < 1$ θα είχαμε $\int_1^{f(1)} \frac{1}{e^t-t-1}dt =$

$-\int_{f(1)}^{1} \frac{1}{e^t-t-1}dt < 0$. Άρα $f(1) = 1$. Επίσης $f'(1) = \frac{1}{e-2}\left(e^{f(1)} - f(1) - 1\right) = \frac{1}{e-2}(e-2) = 1$. Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ δηλαδή ή $y = x$.

4. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt - x + f(x)$ στο $[a,1]$.

   - $g(1) = \int_a^1 f(t)\,dt - 1 + f(1) = \int_a^1 f(t)\,dt > 0$ αφού $f(t) > 0$ στο $[a,1]$.
   - $g(a) = \int_a^a f(t)\,dt - a + f(a) = f(a) - a$. Αλλά αφού η f είναι κυρτή κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο σημαείο οποιασδήποτε εφαπτομένης της εκτός αν αυτό είναι το σημείο επαφής. Άρα για την εφαπτομένη στο $(1,1)$ αφού $a < 1$ είναι $f(a) > a$ και $g(a) > 0$.

   Από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_0 \in (a,1)$ έτσι ώστε $g(x_0) = 0$ δηλαδή $\int_a^{x_0} f(t)\,dt = x_0 - f(x_0)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17

Σχολικό έτος 2015-2016

17.1 Όρια και συνέχεια Συνάρτησης.

17.1.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+2}{x^{10}+x+3}.$$

1. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $t \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ η εξίσωση $f(x) = t$ έχει τουλάχιστον μία θετική λύση.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Να βρείτε συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$(g \circ f)(x) = |\text{συν}x| \text{ για κάθε } x$$

αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο $[-\pi, \pi]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και τέτοια ώστε να ισχύει

$$(g \circ f)(x) = |\text{συν}x| \text{ για κάθε } x$$

αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

17.1.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 1.7 Α1 vi).

2. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - t$ ορίζεται σε κάθε σημείο του διαστήματος $[0, +\infty]$ και είναι συνεχής σε αυτό. Έχουμε:

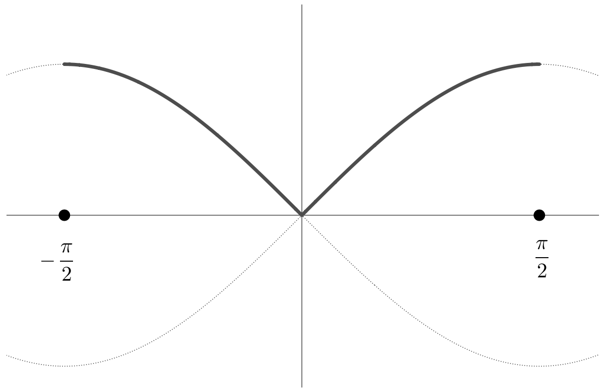
   - $g(0) = \frac{2}{3} - t > 0$
   - Από το πρώτο ερώτημα η f έχει στο $+\infty$ όριο μηδέν επομένως θα υπάρχει $a > 0$ ώστε $f(a) < t$ που σημαίνει ότι $g(a) < 0$. Από το θεώρημα του Bolzano η g θα έχει ρίζα στο $(0, a)$ δηλαδή θα έχει θετική ρίζα που φυσικά θα είναι ρίζα της $f(x) = t$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

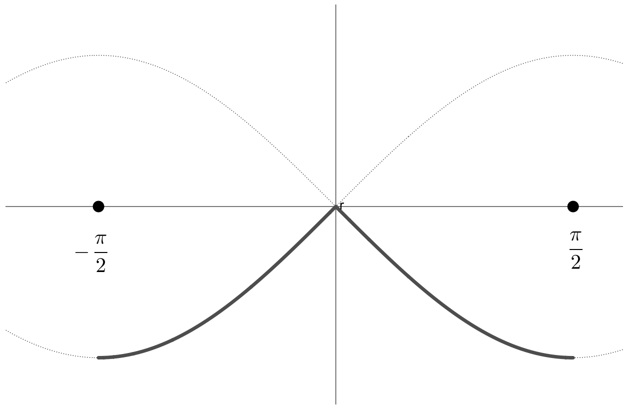
1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 1.2 Β6 iii).

2. Θα ισχύει
$$\sqrt{1 - f^2(x)} = |\text{συν} x|$$
απ΄την οποία έχουμε διαδοχικά ότι $1 - f^2(x) = \text{συν}^2 x$, $1 - f^2(x) = 1 - \text{ημ}^2 x$, $f^2(x) = \text{ημ}^2 x$. Επομένως για δοθέν x θα ισχύει
$$f(x) = \text{ημ} x \quad \text{ή} \quad f(x) = -\text{ημ} x.$$
Ρίζες της f είναι οι ρίζες της ημ η οποία στο $[-\pi, pi]$ έχει ρίζες τα $-\pi$, 0, π. Επομένως η f δεν έχει ρίζα στα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα σε κάθε ένα από αυτά διατηρεί πρόσημο. Άρα κατ΄ αρχάς έχουμε τις εξής επιλογές

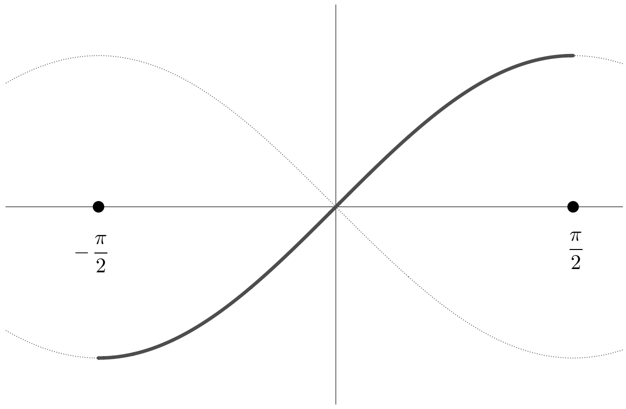
   - $$f(x) = \begin{cases} -\text{ημ} x & , \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \text{ημ} x & , \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$



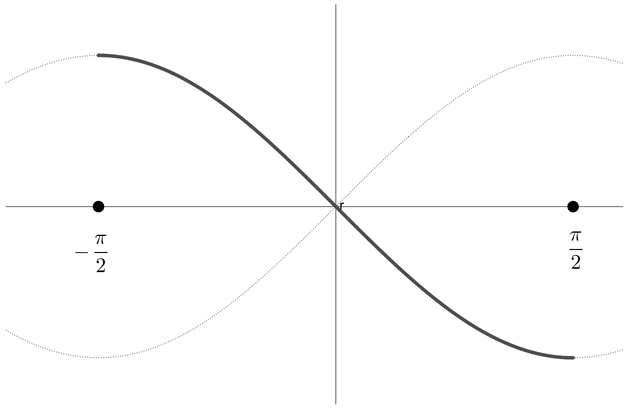
- $$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x & , \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ -\eta\mu x & , \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$



- $f(x) = \eta\mu x$



- $f(x) = -\eta\mu x$



Από αυτές μόνο η τρίτη είναι γνησίως αύξουσα. Τελικά $f(x) = \eta\mu x$.

17.2 1ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

17.2.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

1. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της $A(1, f(1))$.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Έστω $\xi > 0$. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $B(\xi, f(\xi))$ και $\Gamma(-\xi, 0)$ εφάπτεται στην $\mathcal{C}_f$ στο σημείο B.

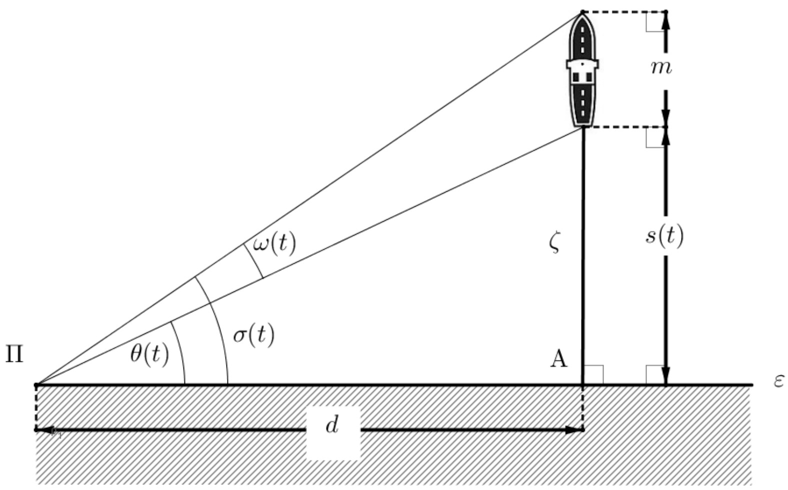
   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να δειχθεί ότι η f είναι άρτια και να γίνει πρόχειρα η γραφική της παράσταση.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

ΘΕΜΑ 2

Ένα πλοίο έχει μήκος m και απομακρύνεται από την προκυμαία κινούμενο σε ευθεία ζ που είναι κάθετη στο σύνορο ε της προκυμαίας στο σημείο Α. Η απόσταση της πρύμνης του πλοίου από την προκυμαία είναι συναρτήσει του χρόνου $s(t) = vt$ όπου v σταθερά.



Ένας παρατηρητής στέκεται στο σημείο Π της ε σε απόσταση d από το Α και η γωνία με την οποία βλέπει το πλοίο είναι $\omega(t)$ ενώ η γωνίες με τις οποίες βλέπει τα τμήματα πρύμνη-Α και πλώρη-Α είναι αντιστοίχως $\theta(t)$ και $\sigma(t)$ όπου οι συναρτήσεις $\theta(t)$ και $\sigma(t)$ είναι παραγωγίσιμες.

1. Να εκφράσετε την εφ$\omega(t)$ συναρτήσει των d, m, v, t.

15 Μοναδες

2. Να εκφράσετε τον ρυθμό μεταβολής της $\omega(t)$ συναρτήσει των d, m, v, t.

10 Μοναδες

Σημειωση: Δίνεται ότι $\text{εφ}(\alpha-\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha-\text{εφ}\beta}{1+\text{εφ}\alpha\cdot\text{εφ}\beta}$

ΘΕΜΑ 3

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\text{συν} f(x) = x - f(x) \quad \text{για όλα τα} \quad x\in\mathbb{R}.$$

1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

8 Μοναδες

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

8 Μοναδες

3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$

9 Μοναδες

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(2x+y)=2f(x)+f(y), \quad \text{για κάθε} \quad x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(0)=0$.

5 Μοναδες

2. $f(2x)=2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5 Μοναδες

3. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

5 Μοναδες

4. Αν f συνεχής στο 0, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

5 Μοναδες

5. Αν f παραγωγίσιμη στο 0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

5 Μοναδες

17.2.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Η συνάρτηση της απόλυτης τιμής $a(x) = |x|$ είναι συνεχής και η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας $r(x) = \sqrt{x}$ είναι επίσης συνεχής. Η f είναι η σύνθεση $r \circ a$ και είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

   Είναι γνωστό ότι οι $a(x), r(x)$ είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους εκτός από το 0. Επομένως η σύνθεση τους παραγωγίζεται σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ εκτός, ίσως, από το 0. Ισχύει

$$|x| = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

   και επομένως

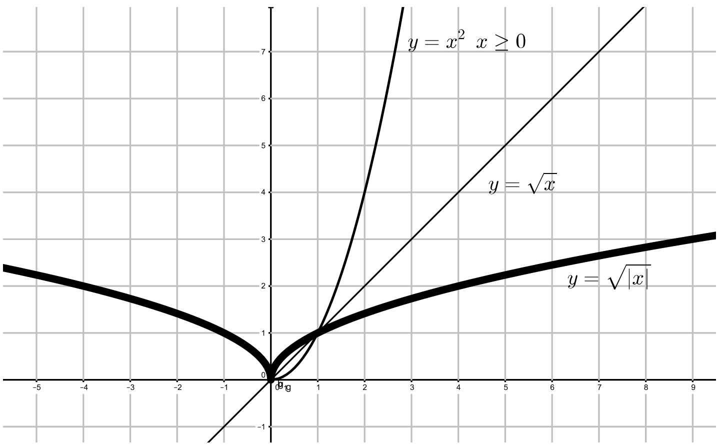
$$(|x|)' = \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & , & x < 0 \\ \text{Δεν υπάρχει} & , & x = 0 \\ 1 & , & x > 0 \end{array} \right\} = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0.$$

   Την παραγωγισιμότητα στο 0 θα την εξετάσουμε χωριστά με την βοήθεια του ορισμού της παραγώγου: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{1}{|x|}} = +\infty$ Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

2. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο τυχόν σημείο με τετμημένη x_0 όπου η f παραγωγίζεται είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Εδώ $x_0 = 1$, $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3. Αν $\lambda_{B\Gamma}$ είναι συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας $B\Gamma$ έχουμε $\lambda_{B\Gamma} = \frac{f(\xi)-0}{\xi+(-\xi)} = \frac{\sqrt{\xi}}{2\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = f'(\xi)$. Άρα ευθεία $B\Gamma$ και η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο B διέρχονται από το ίδιο σημείο (το B) και έχουν το ίδιο συντελεστή διευθύνσεως άρα συμπίπτουν.

4. Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και $f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x)$ επομένως η f είναι άρτια.
Επειδή η f είναι άρτια έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Επομένως για να παραστήσουμε γραφικά την f αρκεί να παραστήσουμε μόνο το μέρος της $\mathcal{C}_f$ που αντιστοιχεί στα μη αρνητικα x. Το υπόλοιπο που αντιστοιχεί σε αρνητικά x θα βρεθεί με συμμετρία. Για $x \geq 0$ είναι $f(x) = \sqrt{x}$. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση $sqrtx$, $x \geq 0$ είναι αντίστροφη της συνάρτησης x^2, $x \geq 0$ που έχει γνωστή γραφική παράσταση. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις τους είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Άρα για να βρούμε την $\mathcal{C}_f$ αρκεί να παραστήσουμε την x^2, $x \geq 0$ να βρούμε την συμμετρική της ως προς $y = x$ και αυτού που βρούμε να πάρουμε το συμμετρικό ως προς την $x = 0$.



ΘΕΜΑ 2

1. Είναι $\omega(t) = \sigma(t) - \theta(t)$ και από τα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος έχουμε:
$$\varepsilon\varphi\sigma(t) = \frac{s(t)+m}{d}, \qquad \varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{s(t)}{d}$$
Είναι
$$\varepsilon\varphi\omega(t) = \varepsilon\varphi(\sigma(t) - \theta(t)) =$$
$$= \frac{\varepsilon\varphi\sigma(t) - \varepsilon\varphi\theta(t)}{1 + \varepsilon\varphi\sigma(t) \cdot \varepsilon\varphi\theta(t)} = \frac{\frac{s(t)+m}{d} - \frac{s(t)}{d}}{1 + \frac{s(t)+m}{d} \cdot \frac{s(t)}{d}} =$$
$$= \frac{md}{d^2 + s^2(t) + s(t)m} = \frac{md}{v^2t^2 + vmt + d^2}$$

2. Παραγωγίζοντας την $\varepsilon\varphi\omega\left(t\right)=\frac{md}{v^2t^2+vmt+d^2}$ ως προς t βρίσκουμε:

$$\omega'\left(t\right)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega\left(t\right)}=\frac{-mdv\left(2vt+m\right)}{\left(d^2+v^2t^2+vtm\right)^2}$$

Αλλά
$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega\left(t\right)}=1+\varepsilon\varphi^2\omega\left(t\right)=1+\left(\frac{md}{v^2t^2+vmt+d^2}\right)^2$$
Επομένως:

$$\omega'\left(t\right)\left(1+\left(\frac{md}{v^2t^2+vmt+d^2}\right)^2\right)=\frac{-mdv\left(2vt+m\right)}{\left(d^2+v^2t^2+vtm\right)^2}$$

από την οποία βρίσκουμε:

$$\omega'\left(t\right)=\frac{-mdv\left(2vt+m\right)}{m^2d^2+\left(d^2+v^2t^2+vtm\right)^2}$$

ΘΕΜΑ 3

1. Για όλα τα x ισχύει $x=\sigma\upsilon\nu f\left(x\right)+f\left(x\right)$. Αν $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ είναι και $\sigma\upsilon\nu f\left(x_1\right)=\sigma\upsilon\nu f\left(x_2\right)$. Επομένως

$$x_1=\sigma\upsilon\nu f\left(x_1\right)+f\left(x_1\right)=\sigma\upsilon\nu f\left(x_2\right)+f\left(x_2\right)=f\left(x_2\right).$$

Επομένως η f είναι 1-1 άρα και αντιστρέφεται. Αν στη σχέση $x=\sigma\upsilon\nu f\left(x\right)+f\left(x\right)$ ονομάσουμε $y=f\left(x\right)$ βρίσκουμε $x=\sigma\upsilon\nu y+y$ δηλαδή $f^{-1}\left(y\right)=\sigma\upsilon\nu y+y$. Άρα $f^{-1}\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x+x$.

2. Η f^{-1} είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών. Είναι $f^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)f^{-1}\left(0\right)=-\frac{\pi}{2}<0$ και επομένως από το θεώρημα του Bolzano συνάγουμε ότι έχει μία τουλάχιστο ρίζα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ η οποία λόγω του ότι η f^{-1} είναι 1-1 είναι μοναδική.

3. Παρατηρούμε ότι $f^{-1}\left(0\right)=\sigma\upsilon\nu 0+0=1$ και επομένως $f(1)=0$. Για το ζητούμενο όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{f\left(x\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=f'\left(1\right)$$

Θα βρούμε την $f'\left(1\right)$ μέσω της $f'\left(x\right)$ παραγωγίζοντας την ισότητα $\sigma\upsilon\nu f\left(x\right)=x-f\left(x\right)$. Βρίσκουμε $f'\left(x\right)\left(-\eta\mu f\left(x\right)\right)=1-f'\left(x\right)$ και επομένως $f'\left(x\right)\left(1-\eta\mu f\left(x\right)\right)=1$. Θέτοντας $x=1$ έχουμε $f'\left(1\right)=0$ και επομένως $\lim\limits_{x\to1}\frac{f\left(x\right)}{x-1}=1$.

ΘΕΜΑ 4

1. Θέτοντας $x = y = 0$ στην $f(2x + y) = 2f(x) + f(y)$ βρίσκουμε $f(0) = 2f(0) + f(0)$ από την οποία έχουμε $2f(0) = 0$ και $f(0) = 0$.

2. Θέτοντας $y = 0$ στην $f(2x + y) = 2f(x) + f(y)$ βρίσκουμε $f(2x + 0) = 2f(x) + f(0)$ και αφού $f(0) = 0$ έχουμε $f(2x) = 2f(x)$.

3. Θέτοντας όπου x το $\frac{x}{2}$ στην $f(2x+y) = 2f(x)+f(y)$ βρίσκουμε $f(2\frac{x}{2} + y) = 2f(\frac{x}{2}) + f(y)$. Αλλά $2f(\frac{x}{2}) = f(2\frac{x}{2}) = f(x)$. Επομένως για όλα τα x, y ισχύει $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \underset{x=x_0+h}{=} \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} (f(x_0) + f(h)) =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x_0) + \lim_{h\to 0} (f(h)) \underset{f \text{ συνεχής στο } 0}{=} f(x_0) + f(0)$$

Επομένως $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

5. Ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) + f(h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = f'(0).$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

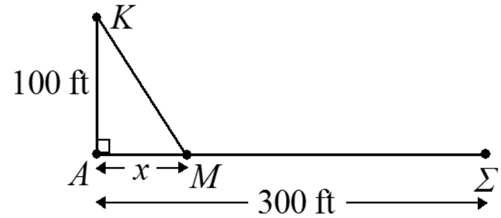
17.3 Διαφορικός Λογισμός.

17.3.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

Ένας κολυμβητής Κ βρίσκεται στη θάλασσα $100ft$ μακριά από το πλησιέστερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του Σ βρίσκεται $300ft$ μακρυά από το σημείο Α. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα $3ft/s$ και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα $5ft/s$.



1. (α′) Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή ΚΜΣ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$\mathrm{T}(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}$$

   (β′) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του·

2. Να αποδείξετε ότι η διαφορά των χρόνων που απαιτούνται για δύο οποιεσδήποτε διαδρομές ΚΜΣ που μπορεί να πραγματοποιήσει ο κολυμβητής (το Μ μεταξύ των Α, Σ) δεν υπερβαίνει τα $19sec$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

1. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

2. (α′) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2, 2)$ με $x_1 \neq x_2$ώστε οι εφαπτομένες της $\mathcal{C}_f$ στα σημεία της με τετμημένες x_1, x_2 να είναι παράλληλες.

   (β′) Υποθέτουμε ότι $f(0) = 3$. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{για κάθε } x \in [-2, 2].$$

17.3.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 2.7 Β13.

2. Από το ερώτημα 1. προκύπτει ότι το ελάχιστο της T είναι το $T(75) = \frac{260}{3}$. Επειδή στο διάστημα $[0, 75]$ η T είναι γνησίως φθίνουσα ενώ στο $[75, 300]$ είναι γνησίως αύξουσα η μέγιστη τιμή της T στο $[0, 300]$ θα εμφανίζεται

σε κάποιο από τα άκρα 0, 300. Είναι $T(0) = \frac{280}{3}$ και $T(300) = \frac{100}{3}\sqrt{10}$. Η δεύτερη τιμή είναι η μέγιστη.

Η διαφορά των χρόνων μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδρομών είναι δεν υπερβαίνει την διαφορά μεταξύ μέγιστου και ελάχιστου χρόνου άρα είναι μικρότερη του $T(300) - T(75)$. Είναι

$$T(300) - T(75) = \frac{100}{3}\sqrt{10} - \frac{260}{3} = \frac{20}{3}\left(5\sqrt{10} - 13\right)$$

και θα είναι $\frac{20}{3}\left(5\sqrt{10} - 13\right) < 19$ αν είναι $5\sqrt{10} - 13 < 3 \cdot 19$ δηλαδή αν $5\sqrt{10} < 57 + 13$ ή $\sqrt{10} < 14$ που ισχύει.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 2.8 Β5.

2. (α′) Είδαμε ότι η f'' δεν έχει ρίζες. Αν είχαμε δύο παράλληλες εφαπτομένες στα $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < x_2$ θα ήταν $f'(x_1) = f'(x_2)$ και από το θεώρημα του Rolle η f'' θα είχε ρίζα μεταξύ x_1, x_2 (άτοπο). Άρα δεν υπάρχουν παράλληλες εφαπτομένες.

   (β′) Θεωρώντας την το α′ μέλος της

   $$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$$

   ως τριώνυμο του $f(x)$ με $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = x^2 - 3$ έχουμε ότι η διακρίνουσα του είναι $\Delta = 4 - 4\left(x^2 - 3\right) = 4\left(4 - x^2\right)$. Αφού $x \in [-2, 2]$ θα είναι $\Delta \geq 0$ για δοθέν x θα είναι

   $$f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{ή} \quad f(x) = 1 - \sqrt{4 - x^2}$$

   Παρατηρούμε ότι το $f(x) - 1$ είναι πάντα ίσο με $\pm\sqrt{4 - x^2}$ και γίνεται μηδέν αν και μόνο αν το $\sqrt{4 - x^2}$ δηλαδή το $4 - x^2$ γίνει μηδέν. Άρα η συνεχής συνάρτηση $f(x) - 1$ έχει ρίζες μόνο τα ± 2 και επομένως στο $(-2, 2)$ αφού δεν έχει ρίζα διατηρεί πρόσημο. Αλλά από την υπόθεση $f(0) = 3$ επομένως το πρόσημο είναι +. Συμπεραίνουμε ότι για $x \in (-2, 2)$ θα είναι $f(x) - 1 = \sqrt{4 - x^2}$ και επειδή η ισότητα αυτή αληθεύει και για $x = \pm 2$ βρίσκουμε ότι τελικά

   $$f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{για όλα τα } x \in [-2, 2].$$

17.4 Ολοκληρωτικός Λογισμός.

17.4.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου S που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$ και $g(x) = 2x - x^2$.

2. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με την γραφική παράσταση της f χωρίο με εμβαδόν 2016 τμ.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi} \big(f(x) + f''(x)\big)\,\text{ημ}x\,dx = 2$$

και $f(\pi) = 1$.

1. Με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες να υπολογίσετε το $f(0)$.

2. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ ώστε $f(x_0) + f''(x_0) = 1$.

17.4.2 Απαντήσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1

1. Σχολικό βιβλίο Β΄ Μέρος § 3.7 Α4.

2. Η τυχούσα ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής $y = ax$ καθώς και η $x = 0$. Η τελευταία τέμνει την C_f μόνο στην αρχή των αξόνων και δεν μας ενδιαφέρει. Η $y = ax$ τέμνει την C_f σε σημεία που οι συντεταγμένες τους είναι λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} y = ax \\ y = x^3 \end{array}\right\}$$

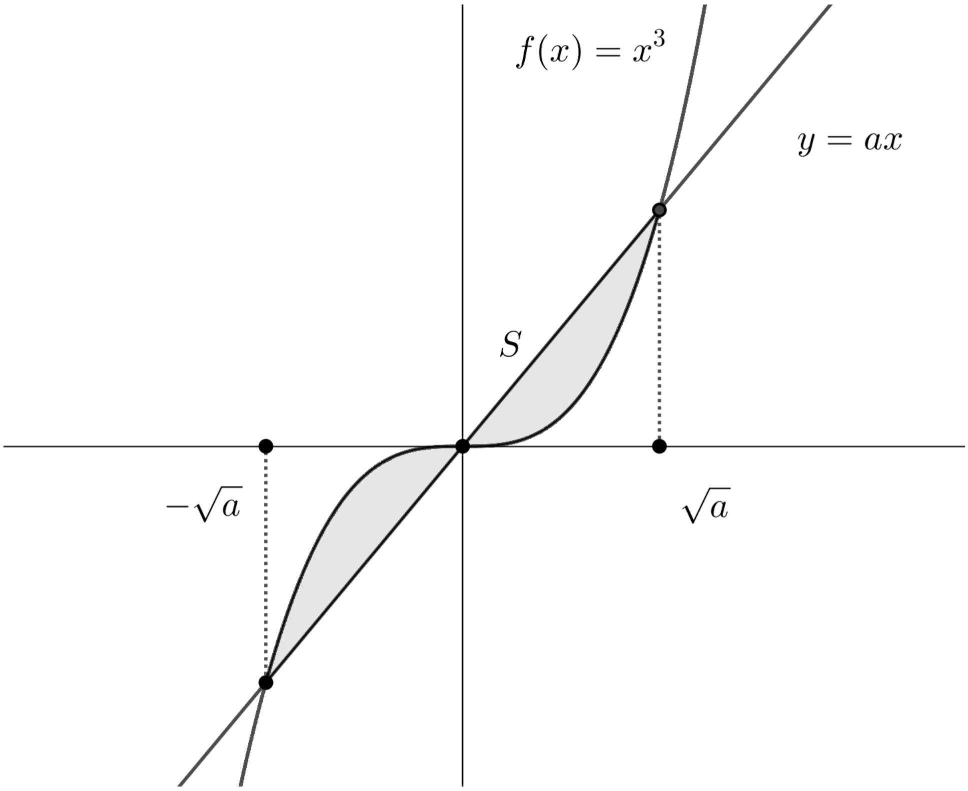
και οι τετμημένες τους λύσεις της εξίσωσης

$$x^3 = ax.$$

Τελευταία για $a \leq 0$ έχει λύση $x = 0$ που αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο τομης ενώ για $a > 0$ έχει λύσεις

$$x = 0,\ \ x = \sqrt{a},\ \ x = -\sqrt{a}.$$

Εργαζόμαστε λοιπόν στην περίπτωση όπου $a > 0$.



Επειδή οι συναρτήσεις ax, x^3 είναι περιττές το χωρίο που σχηματίζουν είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων επομένως το εμβαδόν του E είναι διπλάσιο του εμβαδού του μέρους του που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο Θα είναι

$$E = 2\int_0^{\sqrt{a}} \left|x^3 - ax\right| dx.$$

Στο διάστημα $\left[0, \sqrt{a}\right]$ είναι $x^3 - ax \le 0$ επομένως

$$E = 2\int_0^{\sqrt{a}} \left(ax - x^3\right) dx = \frac{1}{2}a^2.$$

Για να είναι το εμβαδόν 2016 αρκεί να επιλέξουμε το $a > 0$ έτσι ώστε $\frac{1}{2}a^2 = 2016$ δηλαδή $a = 24\sqrt{7}$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

1. Σχολικό βιβλίο Β′ Μέρος § 3.5 Β11.

2. Θεωρούε την συνεχή συνάρτηση

$$w(x) = f(x) + f''(x), \quad x \in [0, \pi].$$

Αν για κάποιο x_0 είναι $w(x_0) = 1$ το αποδεικτέο ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι $w(x_0) \neq 1$ για όλα τα x_0. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι

- Δε μπορεί να είναι $w(x) > 1$ για όλα τα x διότι τότε τότε έχουμε το άτοπο συμπέρασμα:

$$2 = \int_0^{\pi} (f(x) + f''(x))\, \text{ημ}x dx = \int_0^{\pi} w(x)\, \text{ημ}x dx > \int_0^{\pi} \text{ημ}x dx = 2.$$

- Όμοια δε μπορεί να είναι $w(x) < 1$ για όλα τα x διότι πάλι καταλήγουμε σε άτοπο:

$$2 = \int_0^{\pi} (f(x) + f''(x))\, \text{ημ}x dx = \int_0^{\pi} w(x)\, \text{ημ}x dx < \int_0^{\pi} \text{ημ}x dx = 2.$$

Άρα θα υπάρχουν x_1, x_2 ώστε $w(x_1) > 1$ και $w(x_2) < 1$. Αλλά τότε από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής θα υπάρχει και κάποιο x_0 μεταξύ τους με $w(x_0) = 1$ (άτοπο).

17.5 2ο Τρίωρο Διαγώνισμα.

17.5.1 Εκφωνήσεις

Διδάσκοντες: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Αλκιβιάδης Τζελέπης, Σωτήριος Χασάπης

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + x$$

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

   6 ΜΟΝΑΔΕΣ

2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $\mathcal{C}_f$.

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

3. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$

   7 ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

- $g(0) = 0$
- $g'(x) = \frac{f'(x)}{f'(g(x))}$ για κάθε x.

5 Μοναδες

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

1. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

8 Μοναδες

2. Έστω $t \in [\alpha, \beta]$ και $E(t)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο την $\mathcal{C}_f$, την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της με τετμημένη t και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$. Να βρείτε για ποια τιμή του t το $E(t)$ γίνεται ελάχιστο.

9 Μοναδες

3. Υποθέτουμε ότι για τον $\rho \in (\alpha, \beta)$ ισχύει
   - $f'(\rho) = 0$ και
   - $f(\rho) > 0$

   Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

8 Μοναδες

ΘΕΜΑ 3

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- Η f είναι παραγωγίσιμη.
- $f(x+y) \leq f(x) f(y)$ για όλα τα x, y.
- $f(0) = 1$

1. Να αποδειχθεί ότι για κάθε x ισχύει $f(x) f(-x) \geq 1$.

5 Μοναδες

2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε x ισχύει $f(x) > 0$.

5 Μοναδες

3. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ Να αποδειχθεί ότι:

   (α′) Για κάθε $h > 0$ ισχύει:

   $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \le f(x_0)\frac{f(h) - 1}{h}$$

   (β′) Για κάθε $h < 0$ ισχύει:

   $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \ge f(x_0)\frac{f(h) - 1}{h}$$

5 Μοναδες

4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σταθερός αριθμός a ώστε:

   $$f'(x) = af(x)$$

   για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5 Μοναδες

5. Να βρεθεί η f αν είναι γνωστό ότι $\int_0^1 f(x) f'(x)\,dx = 2$.

5 Μοναδες

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με

- $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
- Έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$.

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 1$.

6 Μοναδες

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

6 Μοναδες

3. $f'(x) < 0$ για κάθε $x \ge 0$.

7 Μοναδες

4. $f(x) > 0$ για κάθε $x \ge 0$.

6 Μοναδες

17.5.2 Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

1. Είναι $f'(x) = e^x+1 > 0$ και επομένως $f \uparrow$. Η f είναι συνεχής και επομένως το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, \infty)$.

2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επομένως η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Εξετάζουμε την ύπαρξη πλάγιων-οριζοντίων ασυμπτώτων.

   (α΄) Στο $-\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x \frac{1}{x} + 1\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 1\cdot x) = 0$. Επομένως έχει ασύμπτωτη την $y = x$.
   Στο $+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} + 1\right)$. Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$. Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ και η $\mathcal{C}_f$ δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

3. Το ζητούμενο εμβαδόν E είναι ίσο με $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)\,dx|$. Είναι $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{e}}{2\sqrt{e}} > 0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $f(x) > 0$ στο $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Επομένως $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)\,dx| = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = (e-1)\,e^{-\frac{1}{2}}$ και η τιμή αυτή είναι το E.

4. Έχουμε $g'(x) = \frac{f'(x)}{f'(g(x))} \Leftrightarrow g'(x) f'(g(x)) = f'(x) \Leftrightarrow (f(g(x)))' = f'(x) \Leftrightarrow f(g(x)) = f(x) + c$. Θέτοντας στην τελευταία ισότητα όπου x το 0 βρίσκουμε $f(g(0)) = f(0) + c$ δηλαδή $f(0) = f(0) + c$ και $c = 0$. Αλλά τότε $f(g(x)) = f(x)$ και επειδή η f είναι $1-1$ ως γνησίως αύξουσα συνάγουμε ότι $g(x) = x$ για όλα τα x.

ΘΕΜΑ 2

1. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$h(x) = \frac{f(\alpha) + f(x)}{2} - f\left(\frac{\alpha + x}{2}\right).$$

ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Είναι

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{2} - \frac{1}{2} f'\left(\frac{\alpha + x}{2}\right).$$

Για $\alpha < x < \beta$ είναι $\alpha < \frac{\alpha+x}{2} < x$ και αφού $f' \uparrow$ θα είναι $f'(x) > f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)$ οπότε $h'(x) > 0$. Άρα η παραγωγίσιμη συνάρτηση h στο $(\alpha, \beta])$ έχει θετική παράγωγο και επομένως είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $h(\beta) > h(\alpha)$. Αλλά $h(\alpha) = 0$ επομένως $h(\beta) > 0$ δηλαδή $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ από την οποία έχουμε το αποδεικτέο.

2. Η εξίσωση εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $P(t, f(t)$ είναι η

$$y = f'(t)(x-t) + f(t).$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ θα ισχύει

$$f(x) \geq f'(t)(x-t) + f(t),$$

για όλα τα $x \in [\alpha, \beta]$. Επομένως

$$E(t) = \int_\alpha^\beta \left[f(x) - \left(f'(t)(x-t) + f(t)\right)\right] dx.$$

Άρα

$$E(t) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f'(t)\,x dx + \int_\alpha^\beta f'(t)\,t dx + \int_\alpha^\beta f(t)\,dx.$$

Δηλαδή:

$$E(t) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - f'(t)\int_\alpha^\beta x dx + f'(t)\,t\int_\alpha^\beta 1 dx - f(t)\int_\alpha^\beta 1 dx$$

ή

$$E(t) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - f'(t)\left(\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha\right) + f'(t)\,t(\beta-\alpha) - f(t)(\beta-\alpha).$$

Παραγωγίζοντας ως προς t βρίσκουμε:

$$E'(t) = 0 - f''(t)\left(\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha\right) + f''(t)\,t(\beta-\alpha) + f'(t)(\beta-\alpha) - f'(t)(\beta-\alpha)$$

ή

$$E'(t) = f''(t)(\beta-\alpha)\left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Είναι $f''(t) > 0$, $\beta - \alpha$ και επομένως $E'(t) > 0 \Leftrightarrow t > \frac{\alpha+\beta}{2}$. Συμπεραίνουμε ότι στο διάστημα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ είναι $E'(t) < 0$ και $E(t) \downarrow$ ενώ στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ είναι $E'(t) > 0$ και $E(t) \uparrow$ άρα η $E(t)$ έχει ελάχιστο για $t = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

3. Η f' είναι γνησίως αύξουσα και αφού μηδενίζεται στο ρ στο $[\alpha, \rho)$ θα είναι αρνητική και στο $(\rho, \beta]$ θα είναι θετική. Άρα η f έχει ελάχιστο $f(\rho)$ στο ρ που είναι θετικό. Αφού το ελάχιστο της f είναι θετικό είναι $f(x) > 0$ για όλα τα x.

ΘΕΜΑ 3

1. Θέτοντας στην σχέση $f(x+y) \le f(x) f(y)$ όπου y το $-x$ βρίσκουμε ότι $f(0) \le f(x) f(-x)$ από την οποία έχουμε το αποδεικτέο.

2. Από την σχέση $f(x) f(-x) \ge 1$ συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει ρίζες. Πράγματι αν υποτεθεί ότι ο x_0 είναι ρίζα της f αντικαθιστώντας το στην σχέση αυτή βρίσκουμε ότι $0 \cdot f(-x_0) \ge 1$ δηλαδή $0 \ge 1$ (άτοπο). Η συνεχής f στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ δεν έχει ρίζες επομένως διατηρεί σε αυτό πρόσημο. Είναι $f(0) = 1$ επομένως $f(x) > 0$ γιά κάθε x.

3. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_0 + h) \le f(x_0) f(h) \Rightarrow$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \le f(x_0) f(h) - f(x_0) \Rightarrow$$

Αν τώρα $h > 0$ διαιρώντας στην τελευταία ανισότητα με h βρίσκουμε ότι

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \le f(x_0) \frac{f(h) - 1}{h}$$

Όμοια αν $h < 0$ πάλι διαιρώντας βρίσκουμε:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ge f(x_0) \frac{f(h) - 1}{h}$$

4. Η f είναι παραγωγίσιμη και

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Για $h > 0$ από την $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le f(x_0) \frac{f(h)-1}{h}$ βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le \lim\limits_{h \to 0^+} f(x_0) \frac{f(h)-1}{h}$ δηλαδή $f'(x_0) \le f(x_0) f'(0)$

Για $h < 0$ από την $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge f(x_0) \frac{f(h)-1}{h}$ έχουμε $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge \lim\limits_{h \to 0^-} f(x_0) \frac{f(h)-1}{h}$ οπότε $f'(x_0) \ge f(x_0) f'(0)$. Τελικά $f'(x_0) = f(x_0) f'(0)$. Επειδή το x_0 είναι τυχόν έχουμε ότι αν ονομάσουμε $a = f'(0)$ έχουμε ότι $f'(x) = a f(x)$ για όλα τα x.

5. Για κάθε x είναι $\frac{f'(x)}{f(x)} = a$ οπότε $(\ln|f(x)|)' = (ax)'$. Αφού $f(x) > 0$ είναι $\ln f(x) = ax + c$. Θέτοντας $x = 0$ βρίσκουμε $c = 0$ και επομένως $\ln f(x) = ax$ άρα $f(x) = e^{ax}$. Αντικαθιστούμε στην $\int_0^1 f(x) f'(x)\,dx = 2$ βρίσκουμε $\int_0^1 a e^{ax} e^{ax} dx = 2$ οπότε $\int_0^1 a e^{2ax} dx = 2$ και $\left[\frac{e^{2ax}}{2}\right]_0^1 = 2$. Από την τελευταία σχέση έχουμε $\frac{e^{2a}}{2} - \frac{1}{2} = 2$ και $a = \frac{1}{2}\ln 5$. Άρα $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$.

ΘΕΜΑ 4

1. Είναι $f' \uparrow$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x-1,x]$, $[x,x+1]$ και έχουμε ότι:
$$f(x)-f(x-1)=\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=f'(x_1),\ \ x_1\in(x-1,x),$$
$$f(x+1)-f(x)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(x_2),\ \ x_2\in(x,x+1).$$
Είναι $x-1<x_1<x<x_2<x+1$ και επομένως $f'(x_1)<f'(x)<f'(x_2)$ από την οποία προκύπτει ότι
$$f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x).$$

2. Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμτωτη τον $x'x$ και επειδή είναι ορισμένη στο στο $[0,+\infty]$ θα είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε λοιπόν ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Έχουμε ακόμη:
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x-1) \underset{x-1=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=0$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) \underset{x+1=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=0$

   Αν τώρα στην ανισότητα
$f(x)-f(x-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$
εφαρμόσουμε το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3. Αν υποτεθεί ότι το αποδεικτέο δεν ισχύει θα υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0)\geq 0$. Θεωρούμε $x_1>x_0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα θα είναι $f'(x_1)>f'(x_0)\geq 0$. Για κάθε $x\in(x_1,+\infty)$ από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει κατάλληλο $\xi\in(x_1,x)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi)$. Επειδή $f'(\xi)>f'(x_1)$ είναι $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}>f'(x_1)$ από την οποία έχουμε ότι $f(x)>f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)\right)=+\infty$ (διότι $f'(x_1)>0$). Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (άτοπο). Άρα πράγματι η παράγωγος της f είναι αρνητική σε όλα τα x.

4. Αν υποτεθεί ότι για κάποιο x_0 είναι $f(x_0)\leq 0$ θεωρούμε $x_1>x_0$. Επειδή η f έχει αρνητική παράγωγο άρα είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x>x_1$ είναι $0\geq f(x_0)>f(x_1)>f(x)$. Στην $f(x_1)>f(x)$ παίρνουμε ορια στο $+\infty$ και έχουμε το άτοπο συμπέρασμα$f(x_1)>0$. Άρα $f(x)>0$ για κάθε x.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18

Μια επιλογή εκφωνήσεων από τεστ.

18.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

18.1.0.1 Σχολικό έτος 1999-2000

Έστω $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$.

1. Να βρείτε τον $z_1 + z_2$.
2. Να βρείτε τον $z_1 z_2$.
3. Να βρείτε τον $\frac{z_1}{z_2}$.
4. Να λύσετε την εξισωση $z_2 (x + 1) = z_1 + z_2$.
5. Να βρείτε τον $(z_1 - z_2)^2$.
6. Να βρείτε τα μέτρα των z_1 και z_2.
7. Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τους z_1, z_2, $\bar{z}_2$, $-\bar{z}_2$.
8. Να βρείτε την απόσταση d των εικόνων των z_1, z_2.
9. Να βρείτε το πρωτεύον όρισμα του z_1.
10. Υπάρχει πραγματικός λ έτσι ώστε $z_1 = \lambda z_2$;

18.1.0.2 Σχολικό έτος 2004-2005

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2 + 3i$ και $z_2 = 1 - i$

1. Να υπολογίσετε τον $z_1^2 z_2$.
2. Να υπολογίσετε το μέτρο του z_1
3. Να γράψετε σε κανονική μορφή $\alpha + \beta i$ το μιγαδικό $\frac{z_1 + \bar{z}_2}{z_1 + z_2}$.
4. Να βρείτε το μέτρο του w αν είναι γνωστό ότι $w z_1 - z_2 = \bar{z}_1$.
5. Υπολογείστε το $Re\left(z_1^2\right) + Im\left(z_2^{2004}\right)$.

18.1.0.3 Σχολικό έτος 2006-2007

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2 - 3i$ και $z_2 = 1 + i$.

1. Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τον $\bar{z}_1 z_2$.
2. Να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.
3. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ αν είναι γνωστό ότι
$$\frac{1}{z_1} = \kappa + (\kappa + 1)\, i$$
4. Να υπολογίσετε το
$$\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2} + i\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2} \right)^2 - z_2$$
5. Να υπολογίσετε το
$$\left(\frac{z_2}{\bar{z}_2} \right)^{1996}$$

18.1.0.4 Σχολικό έτος 2008-2009

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + 2i$ και $z_2 = -2 + i$.

1. Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τον $\frac{z_2}{z_1}$.
2. Να λύσετε την εξίσωση $z_1 (z + i) = z_2$.
3. Για ποιά τιμή του πραγματικού λ είναι $|\lambda i + z_1| = 10$;
4. Να βρείτε το $\mathrm{Re}\,(z_1 z_2)$.
5. Να υπολογίσετε το $z_1^{2008} - z_2^{2008}$.

18.1.0.5 Σχολικό έτος 2014-2015

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 2 + 3i$ και $w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$.

1. Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τον $\frac{1}{z+1}$.
2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z+1} \right) - \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z+1} \right).$$
3. Να βρείτε το $\left| z w^3 \right|$.
4. Να αποδείξετε ότι $w^2 + w + 1 = 0$.
5. Να υπολογίσετε το
$$w^{2012} + w^{2013} + w^{2014}$$

18.2 20 Όρια σε 20 λεπτά.

18.2.0.1 Σχολικό έτος 1999-2000

Να βρείτε τα παρακάτω όρια. Στην περίπτωση που κάποιο όριο δεν υπάρχει να σημειώσετε την ένδειξη $*$:

1. $\lim\limits_{x\to 0} e^x =$
2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \text{ημ}x =$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x =$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \text{ημ}\frac{1}{x} =$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{ημ}x}{x} =$
6. $\lim\limits_{x\to 0} |x| =$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\text{ημ}x}{x} =$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} |x| =$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+1}{2x+1} =$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} =$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2 - x + 1\right) =$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x + x) =$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} =$
14. $\lim\limits_{x\to +1} \text{ημ}\,(\pi x) =$
15. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+1} =$
16. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x+1} =$
17. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} =$
18. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x+1}{x} =$
19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \text{εφ}x =$
20. $\lim\limits_{x\to 1} e^5 =$

18.2.0.2 Σχολικό έτος 2005-2006

Να βρείτε τα παρακάτω όρια. Στην περίπτωση που κάποιο όριο δεν υπάρχει να σημειώσετε την ένδειξη $*$:

1. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} =$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 - x - 1} =$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x+1}{x} - \ln x\right) =$
4. $\lim\limits_{x\to 3\pi} \frac{1}{\text{συν}x+2} =$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} =$
6. $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1+x}{1-x} =$
7. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x+1}{x-2} =$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{ημ}(2x+\pi)}{2x+\pi} =$
9. $\lim\limits_{x\to e^2} \frac{\ln x-2}{ex} =$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{ημ}x}{\ln x} =$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\left|x^2-1\right| - x^2 + \frac{1}{x}\right) =$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x-1}{3x+3} =$

13. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x\sqrt{3x}}\right) =$

14. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \text{ημ}\,(2x)\right) =$

15. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3 - x\right) =$

16. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{|x^2-1|}\right) =$

17. $\lim\limits_{x\to 3}\left(e^{3-x} + \ln\frac{x}{3}\right) =$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{ημ}|x|}{x} =$

19. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) =$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x + \frac{1}{x}\right) =$

18.2.0.3 Σχολικό έτος 2006-2007

Να βρείτε τα παρακάτω όρια. Στην περίπτωση που κάποιο όριο δεν υπάρχει να σημειώσετε την ένδειξη $*$:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(-x)^{-2} =$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3 + \frac{1}{x}\right) =$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \eta\mu\left(\frac{x}{|x|}\right)\right) =$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3+x-2} =$

5. $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\text{ημ}u}{u} =$

6. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3-1}{x^3+x-2} =$

7. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi x\right) =$

8. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\text{ημ}x}{x} =$

9. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\frac{1}{\left(x-\sqrt{2}\right)^2} =$

10. $\lim\limits_{x\to m}\frac{x^2-m^2}{x-m} =$

11. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\text{ημ}x}{x} =$

12. $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+2}{x-2} =$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - 2\ln x\right) =$

14. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} =$

15. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x\left(x + |x|\right) =$

16. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3} =$

17. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\eta\mu x}{x-1} =$

18. $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^x =$

19. $\lim\limits_{x\to +3}\text{συν}\,(\pi x) =$

20. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3 - \sqrt{x}\right) =$

18.2.0.4 Σχολικό έτος 2008-2009

Να βρείτε τα παρακάτω όρια. Στην περίπτωση που κάποιο όριο δεν υπάρχει να σημειώσετε την ένδειξη $*$:

1. $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3} =$

2. $=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3 + \left|x^3 - 1\right| - x\right) =$

3. $=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} =$

4. $=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3 - \sigma\upsilon\nu x\right) =$

5. $=\lim\limits_{x\to 3}\ln(x-3) =$

6. $=\lim\limits_{x\to t}\sqrt{x^2 - t^2} =$

7. $= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} =$

8. $= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\eta\mu t-2)x^2+1}{x+3} =$

9. $= \lim_{x\to m} \frac{x^3-m^3}{x^2-m^2} =$

10. $= \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} =$

11. $= \lim_{x\to+\infty} (x+e^x) =$

12. $= \lim_{x\to 5} e^{\frac{1}{|x-5|}} =$

13. $= \lim_{x\to 0} \left(\ln x - \sqrt{x}\right) =$

14. $= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x\sqrt{x}} =$

15. $= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x-1}{(x-2)^2} =$

16. $= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2-3x+2} =$

17. $= \lim_{x\to y} (x+y) =$

18. $= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^x =$

19. $= \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) =$

20. $= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2^x+1}{2^x-1}\right) =$

18.2.0.5 Σχολικό έτος 2010-2011

Να βρείτε τα παρακάτω όρια. Στην περίπτωση που κάποιο όριο δεν υπάρχει να σημειώσετε την ένδειξη $*$:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$
2. $\lim_{x\to \pi} e =$
3. $\lim_{x\to \pi} \sigma\upsilon\nu x =$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} =$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} =$
6. $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} =$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x^2+6x+1}{-x^3+x+1} =$
8. $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x}} =$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} =$
10. $\lim_{x\to 0} (\ln x + x) =$
11. $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} =$
12. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x =$
13. $\lim_{x\to 10} \sqrt{2x+5} =$
14. $\lim_{x\to-\infty} (|x-1|+x) =$
15. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} =$
16. $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \eta\mu 2x =$
17. $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x+1}{x^2+1}} =$
18. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) =$
19. $\lim_{x\to-\infty} \left(x^{2005} + x^{2004}\right) =$
20. $\lim_{x\to+\infty} (1+\eta\mu x) =$

18.3 20 Παράγωγοι σε 20 λεπτά.

18.3.0.1 Σχολικό έτος 2005-2006

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
2. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$
3. $f(x) = ημx + x^3$
4. $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$
5. $f(x) = x^{x-1}$
6. $f(x) = t^{x-1}$
7. $f(x) = x^{t-1}$
8. $f(x) = \log\left(x^2+10\right)$
9. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{5}$
10. $f(x) = |x| + x, \quad x \neq 0$
11. $f(x) = x\ln x$
12. $f(x) = \left(x^2+\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$
13. $f(x) = \sqrt{x(x+1)} \quad x \neq 0, -1$
14. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}$
15. $f(x) = εφπx$
16. $f(x) = εφx^{\pi} + \pi$
17. $f(x) = \log_x x$
18. $f(x) = 2^{(2^x)}$
19. $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^3$
20. $f(x) = px^2 + qx + s$

18.3.0.2 Σχολικό έτος 2006-2007

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = |x|, \quad x \neq 0$
2. $f(x) = 4x^3$
3. $f(x) = 4 - x$
4. $f(x) = 2\sqrt{x}$
5. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$
6. $f(x) = xημx$
7. $f(x) = e^x + x^2$
8. $f(x) = \left(x^2+1\right)(x-1)$
9. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$
10. $f(x) = \frac{x}{e^x}$
11. $f(x) = \sqrt{x^3+1}$
12. $f(x) = \left(x^2+1\right)^{18}$
13. $f(x) = συνx^3$
14. $f(x) = συν^4 x$
15. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
16. $f(x) = ημ\frac{x}{3} + ημ\frac{\pi}{2}$
17. $f(x) = e^{x^4-1}$
18. $f(x) = \left(x^3-1\right)^e$
19. $f(x) = \sqrt[6]{x}$
20. $f(x) = \left(x^2+1\right)^x$

18.4 20 Ολοκληρώματα σε 20 λεπτά.

18.4.0.1 Σχολικό έτος 2005-2006

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1. $\int x^4 dx =$
2. $\int \frac{1}{2x+3} dx =$
3. $\int e^x (x-2)\, dx =$
4. $\int \text{ημ}(3x)\, dx =$
5. $\int x^2 2^{x^3} dx =$
6. $\int 0 dx =$
7. $\int \frac{x+1}{x} dx =$
8. $\int \text{εφ}^2 x dx =$
9. $\int \ln x dx =$
10. $\int \sqrt[3]{x^5} dx =$
11. $\int (2x+3)^4\, dx =$
12. $\int x(x-1)\, dx =$
13. $\int \left(x^3 + 3^x\right) dx =$
14. $\int_{-1}^{1} x^3 dx =$
15. $\int_0^2 x(x-1)\, dx =$
16. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx =$
17. $\int_0^{4\pi} \text{συν} x dx =$
18. $\int_0^{4\pi} 1 dx =$
19. $\int_x^{x+1} t dt =$
20. $\int_0^1 \sqrt{x} dx =$

18.4.0.2 Σχολικό έτος 2005-2006

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1. $\int_1^2 x dx =$
2. $\int \frac{x+1}{x} dx =$
3. $\int 2^x dx =$
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{συν} x dx =$
5. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx =$
6. $\int_x^{x+1} x dt =$
7. $\int \frac{x}{x+1} dx =$
8. $\int_1^1 \frac{\text{ημ} x}{x} dx =$
9. $\int 2x e^{x^2} dx =$
10. $\int_{-1}^{1} x^3 dx =$
11. $\int \ln x dx =$
12. $\int \left(1 + \text{εφ}^2 x\right) dx =$
13. $\int_0^1 x e^x dx =$
14. $\int \frac{1}{x^2-4} dx =$
15. $\int_0^s x^4 dx =$
16. $\int_{-1}^{1} |u|\, du =$
17. $\int x(x+1)\, dx =$
18. $\int \sqrt{x} dx =$
19. $\int \text{ημ}^2 x dx =$
20. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx =$

18.4.0.3 Σχολικό έτος 2010-2011

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 x dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$
3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x\varepsilon\varphi x)' (x\varepsilon\varphi x)\, dx$
4. $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$
5. $\int_0^{2\pi} \eta\mu^2 x dx$
6. $\int_0^1 2^x dx$
7. $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^x dx$
8. $\int_e^{e^2} \ln x dx$
9. $\int_{-2}^{2} |x|\, dx$
10. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$
11. $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$
12. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx$
13. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
14. $\int_{-1}^{1} e^{-x} dx$
15. $\int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu 3x dx$
16. $\int_0^2 (2x+y)\, dy$
17. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2} dt$
18. $\int_0^1 \sqrt{2t} dt$
19. $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$
20. $\int_2^2 e^{-x^2} dx$

18.4.0.4 Σχολικό έτος 2011-2012

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 x\sqrt{x} dx =$
2. $\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx =$
3. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x+1} dx =$
4. $\int_{m-1}^{m+1} (x-m)\, dx =$
5. $\int_0^1 2xe^{x^2} dx =$
6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx =$
7. $\int_t^{t^2} x^3 dx =$
8. $\int_{-1}^{3} |x|\, dx =$
9. $\int_2^4 \frac{2x}{x^2+4} dx =$
10. $\int_{-1}^{1} e^{x+1} dx =$
11. $\int_{-1}^{1} x^2 dx =$
12. $\int_1^1 e^{-x^2} dx =$
13. $\int_e^{e^2} \ln(2x)\, dx =$
14. $\int_0^{\pi} \eta\mu (3x)\, dx =$
15. $\int_0^1 (ax+b)\, dx =$
16. $\int_a^b 1 dx =$
17. $\int_0^1 2^x dx =$
18. $\int r ds =$
19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \varepsilon\varphi^2 x\right) dx =$
20. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx =$

18.4.0.5 Σχολικό έτος 2013-2014

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1. $\int_1^2 x dx =$
2. $\int_2^1 \frac{x+1}{x} dx =$
3. $\int_0^2 2^x dx =$
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{συν} x dx =$
5. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx =$
6. $\int_x^{x+1} x dt =$
7. $\int_0^2 \frac{x}{x+1} dx =$
8. $\int_1^1 \frac{\text{ημ} x}{x} dx =$
9. $\int_{-1}^0 2xe^{x^2} dx =$
10. $\int_{-1}^1 x^3 dx =$
11. $\int_1^e \ln x dx =$
12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \text{εφ}^2 x\right) dx =$
13. $\int_0^1 xe^x dx =$
14. $\int_1^2 \frac{1}{x^2-4} dx =$
15. $\int_0^s x^4 dx =$
16. $\int_{-1}^1 |u| du =$
17. $\int_{-1}^1 x(x+1) dx =$
18. $\int_0^4 \sqrt{x} dx =$
19. $\int_0^{\pi} \text{ημ} 2x dx =$
20. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx =$

18.5 5 ερωτήσεις θεωρίας σε 20 λεπτά.

18.5.0.1 Σχολικό έτος 2008-2009

1. Ποιες είναι οι δυνατές δυνάμεις του i;
2. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, , $\alpha \neq 0$ και $\Delta < 0$.
3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.
4. Να αποδείξετε ότι αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και

   - η f είναι συνεχής στο Δ και
   - $f'(x) = 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,

   τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.
5. Τι ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ;

18.5.0.2 Σχολικό έτος 2009-2010

1. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και τι τιμή της f στο $x \in A$;

3. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

4. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ′ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

5. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

   - όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
   - κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

18.5.0.3 Σχολικό έτος 2011-2012

1. Έστω f μία συνάρτηση και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Πότε η f ονομάζεται γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, αύξουσα, φθίνουσα στο Δ;

2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

3. Πως ορίζεται η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο της A;

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ακόμη να αποδείξετε ότι αν και συνεχής στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη σ′ αυτό.

5. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ′ ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και G μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

18.5.0.4 Σχολικό έτος 2012-2013

1. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και $\Delta < 0$.

2. Έστω f μία συνάρτηση και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Πότε η f ονομάζεται γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, αύξουσα, φθίνουσα στο Δ;

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$ είαι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$.

4. Να αποδείξετε ότι αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και

- Οι f, g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x) = g'(x)$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c.$$

5. Να διατυπώσετε τους κανόνες του De l' Hospital.