

Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Κυρτές Συναρτήσεις



ΑΘΗΝΑ 2022

Κυρτές Συναρτήσεις

Ν.Σ. ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗΣ

Κυρτές Συναρτήσεις

ΑΘΗΝΑ 2022

Ν.Σ. Μαυρογιάννης Μαθηματικός MSc, PhD
<http://nsmavrogiannis.gr/>
mavrogiannis@gmail.com



Για την σύνθεση του παρόντος χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά δωρεάν λογισμικό.

- Στοιχειθετήθηκε σε L^AT_EX στο TeXnicCenter συνδεδεμένο με το Sumatra PDF χρησιμοποιώντας την διανομή TeX Live.
- Για την καταχώριση των βιβλιογραφικών παραπομπών σε αρχείο bib αξιοποιήθηκε το JabRef.
- Για ορισμένες εξισώσεις χρησιμοποιήθηκε το TeXaide.
- Τα σχήματα έγιναν στην Geogebra και για κάποια διαγράμματα του TikZ ο κώδικας παρήχθη με το TikzEdt.
- Για εικόνες και γραφικά χρησιμοποιήθηκαν τα IrfanView και Inkscape.



ISBN 978-618-00-3971-9

©2022 Νικόλαος Σ. Μαυρογιάννης

Το παρόν διανέμεται σύμφωνα με την άδεια Creative Commons:

CC by-nc-nd

Αναφορά Δημιουργού-Μη Εμπορική Χρήση-Όχι Παράγωγα Έργα 4.0
Διεθνές .

Αντίγραφο της άδειας :

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

Αντί προλόγου

Την 17η Δεκεμβρίου 2017 σε Ημερίδα που συνδιοργανώθηκε από το Παράρτημα Ιωαννίνων της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και τον Σύλλογο Εκπαιδευτικών Φροντιστών Βορειοδυτικής Ελλάδος έδωσα μία ομιλία με τίτλο «Κυρτές Συναρτήσεις». Για τις ανάγκες της ομιλίας είχα γράψει ένα αρχικό κείμενο, που ως ήταν φυσικό, περιείχε περισσότερα από όσα κατέστη δυνατόν να αναπτυχθούν στην ομιλία. Στους παριστάμενους στην ημερίδα έδωσα ένα, βραχύβιο, σύνδεσμο για τη μεταφόρτωση του κειμένου με την βεβαιότητα ότι σύντομα θα μπορέσω να το δουλέψω πάλι ώστε να πάρει «οριστική» μορφή.

Δυστυχώς άλλες πειστικές υποχρεώσεις με εμπόδισαν να ετοιμάσω το τελικό κείμενο και αυτή η καθυστέρηση είχε σαν αποτέλεσμα να μου δοθεί η δυνατότητα να το εμπλουτίσω σε αρκετά σημεία. Από αυτή την επεξεργασία προέκυψε το παρόν.

Αντικείμενο του είναι οι κυρτές συναρτήσεις με αφετηρία την τρέχουσα σχολική ύλη. Απευθύνεται κυρίως σε όσους διδάσκουν τα σχετικά θέματα στο Λύκειο και αποσκοπεί βασικά στον εμπλουτισμό της διδασκαλίας. Περιλαμβάνει τρία κεφάλαια:

- Το πρώτο κεφάλαιο δεν ξεπερνάει κατά πολύ το ισχύον σχολικό βιβλίο. Σε αυτό επιχειρείται μία συζήτηση της «σχολικής» εκδοχής της κυρτότητας. Ορισμένα μέρη του μπορούν να αξιοποιηθούν στην διδασκαλία. Φέρουν την ένδειξη ΠΡΟΤΑΣΗ ϕ. Πολλά τα έχω κατά καιρούς και με διάφορες μορφές, δοκιμάσει στην τάξη την περίοδο που δίδασκα. Η ανάπτυξη τους είναι σκόπιμα αναλυτική με επιδίωξη να στηρίζεται αποκλειστικά στις γνώσεις του σχολικού βιβλίου. Σε κάποιες περιπτώσεις, σε αυτό το κεφάλαιο, χρησιμοποιούνται γνώσεις που υπερβαίνουν μεν το σχολικό βιβλίο αλλά όχι εκείνες που αντιστοιχούσαν στην ύλη των Δεσμών. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει σήμανση με αστερίσκο.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο συζητούνται κάποια συμπληρωματικά θέματα. Ξεφεύγουν μεν από την σχολική ύλη αλλά, κατά την γνώμη μου η συνάφεια τους με αυτή παρουσιάζει ενδιαφέρον.
- Το τρίτο κεφάλαιο είναι μια μικρή συλλογή ασκήσεων με τις λύσεις τους. Οι ασκήσεις μπορούν να αντιμετωπιστούν αποκλειστικά με υλικό του πρώτου κεφαλαίου επομένως με τον ένα ή τον άλλο τρόπο μπορούν να αξιοποιηθούν στην διδασκαλία. Για τις ασκήσεις που περιέχονται όπου ήταν δυνατόν παρέθεσα και την πηγή από την οποία αντλήθηκαν αλλά για πολλούς λόγους αυτό δεν μπορεί να αποτελέσει τον κανόνα.

Ο κατάλογος παραπομπών που υπάρχουν στο τέλος είναι κατάλογος από βιβλία και άρθρα που συνδέονται με κάποια σημεία του κειμένου. Σε καμία περίπτωση δεν αποτελεί βιβλιογραφία του θέματος. Θεωρώ ότι η μελέτη του 19ου κεφαλαίου του [61] και των [55], [64], [63], [54], [60] είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Οφείλω ευχαριστίες στους διοργανωτές για την πρόσκληση και την φιλοξενία και ιδιαίτερος στον συνάδελφο Γιώργο Τερκίδαγλη με τον οποίο έγιναν οι συνεννοήσεις. Επίσης στον συνάδελφο Δρ Σταύρο Παπαδόπουλο που είχε την καλοσύνη να διαβάσει ένα μέρος του κειμένου.

Ελπίζω να μπορέσω να επανέλθω σε νέα εκδοχή του παρόντος με προσθήκες και βελτιώσεις.

7 Ιουλίου 2022
Ν.Σ.Μ.

Περιεχόμενα

1	Οι Κυρτές Συναρτήσεις. Βασικές έννοιες.	1
1.1	Ο ορισμός της κυρτής γραμμής από τον Αρχιμήδη.	1
1.2	Η σημασία της κυρτότητας-κοιλότητας	3
1.3	Οι κυρτές συναρτήσεις στο σχολικό βιβλίο.	5
1.4	Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου	8
1.5	Κυρτές συναρτήσεις και εφαπτομένες	11
1.6	Κυρτές συναρτήσεις και ασύμπτωτοι.	15
1.7	Κυρτές συναρτήσεις και χορδές.	23
1.8	Κυρτότητα και πράξεις.	37
1.9	Κυρτότητα, μονοτονία και ακρότατα.	44
1.10	Σχετικές θέσεις και εφαπτομένες.	48
1.10.1	Κοινά σημεία	49
1.10.2	Εφαπτομένες από σημείο.	50
1.11	Σημεία καμπής.	66
1.11.1	Σημεία καμπής. Γενικά.	66
1.11.2	Κριτήρια για τα σημεία καμπής.	70
1.11.3	Σημεία καμπής πολυωνύμων.	71
1.12	Υπερ-κυρτές συναρτήσεις.	77
1.13	Κυρτές συναρτήσεις και ανισότητες.	81
1.13.1	Η ανισότητα του Jensen	82
1.13.2	Μερικές εφαρμογές της ανισότητας Jensen	87
1.13.3	Κυρτότητα και ολοκλήρωση.	93
1.13.4	Η ανισότητα του Young για ολοκληρώματα.	94
1.13.5	Οι ανισότητες των Hölder και Minkowski για ολοκληρώματα.	100
1.13.6	Η ανισότητα του Cauchy για ολοκληρώματα.	102
1.13.7	Η γενική μορφή της ανισότητας Karamata	103
1.13.8	Η ανισότητα Karamata συνεπάγεται την ανισότητα Jensen.	108
1.13.9	Η ανισότητα Jensen για ολοκληρώματα.	109
1.13.10	Η ανισότητα Hermite-Hadamard	110
1.14	Οι κυρτές συναρτήσεις σε θέματα εξετάσεων.	113

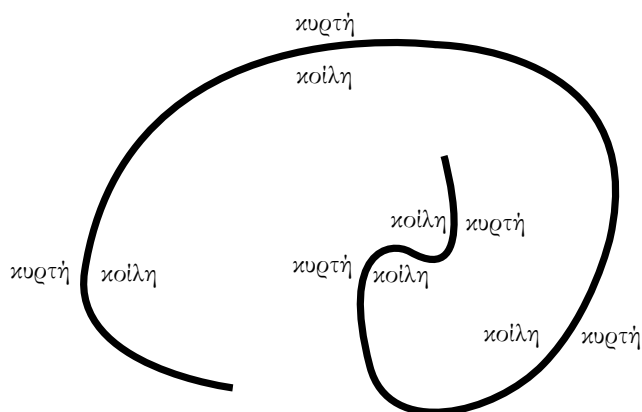
2	Κυρτές συναρτήσεις. Μερικές επεκτάσεις	123
2.1	Ο γενικός ορισμός της κυρτότητας.	123
2.2	Κυρτές συναρτήσεις και κυρτά σχήματα.	127
2.2.1	Σύνδεση της κυρτότητας σχημάτων και της κυρτότητας συναρτήσεων.	127
2.2.2	Γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας Jensen	132
2.2.3	Ευθείες υποστήριξης	135
2.3	Η κατά τα μέσα κυρτότητα	136
2.4	Το 4ο θέμα του 2003.	148
2.4.1	Η διατύπωση του θέματος	148
2.4.2	Γιατί το θέμα ήταν λάθος.	148
2.4.3	Η υπεκφυγή του γενικού ορισμού.	149
2.4.4	Γιατί το θέμα ήταν λάθος ακόμη και με τον γενικό ορισμό.	149
2.5	Κυρτές Συναρτήσεις και Επαναληπτικές Μέθοδοι.	163
2.5.1	Η μέθοδος της διχοτόμησης.	163
2.5.2	Η μέθοδος της εσφαλμένης θέσης (regula falsi) ή μέθοδος των χορδών.	164
2.6	Καμπυλότητα.	169
2.6.1	Εύρεση της καμπυλότητας με τη μέθοδο του Νεύτωνα.	174
2.6.2	Εύρεση της καμπυλότητας με την βοήθεια του κύκλου καμπυλότητας.	177
2.6.3	Εύρεση της καμπυλότητας με την βοήθεια του μήκους καμπύλης.	178
2.6.4	Παραδείγματα στον υπολογισμό της καμπυλότητας	183
3	Μία μικρή συλλογή ασκήσεων	187
	Παραπομπές	218
	Εύρετήριο	219

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι Κυρτές Συναρτήσεις. Βασικές έννοιες.

1.1 Ο ορισμός της κυρτής γραμμής από τον Αρχιμήδη.

Η έννοια του κοίλου και του κυρτού σε μία γραμμή (αλλά και επιφάνεια) υπάρχει στην καθημερινή ζωή, και απεικονίζει ένα ποιοτικό γεωμετρικό χαρακτηριστικό της γραμμής (ή της επιφάνειας):



Στην Ελληνική γλώσσα απαντάται από την αρχαιότητα για να περιγράψει γεωμετρικές ιδιότητες γραμμών και επιφανειών. Μερικά ενδεικτικά παραδείγματα:

1. Θουκυδίδης (*Ιστορία*, 3ο Βιβλίο, 107)

«...ὁ Δημοσθένης δέισας μὴ κυκλωθῇ λοχίζει ἐς ὁδὸν τινα **κοίλην** καὶ λοχμώδη ὀπλίτας καὶ φιλοὺς ξυναμφοτέρους...»

2. Αρριανός, *Αλεξάνδρου Ανάβασις*, Βιβλίο 1, κεφ. 8, παρ. 3

«τοὺς μέντοι Θηβαίους ἐς τὴν **κοίλην** ὁδὸν τὴν κατὰ τὸ Ἡράκλειον φέρουσιν οἱ ἅμα αὐτῷ εἰσπεσόντες ὁμοῦ τοῖς παρ' Ἀλεξάνδρου τοξόταις συνέκλεισαν.»

3. Στραβων (Γεωγραφικά, Βιβλίο 9, κεφ. 1, παρ. 2)

«Οὕτω δ' εἰρηκότος Εὐδόξου, μαθηματικοῦ ἀνδρὸς καὶ σχημάτων ἐμπείρου καὶ κλιμάτων καὶ τοὺς τόπους τούτους εἰδότος, δεῖ νοεῖν τήνδε τὴν πλευρὰν τῆς Ἀττικῆς σὺν τῇ Μεγαρίδι τὴν ἀπὸ Σουνίου μέχρι Ἰσθμοῦ **κοίλην** μὲν ἀλλ' ἐπὶ μικρόν.»

Στα Μαθηματικά οι γραμμές υπάρχουν ως προϊόν αφαίρεσης. Η έννοια της κυρτότητας και της κοιλότητας εμφανίζεται περιγραφικά σε αρκετά μαθηματικά κείμενα (βλ. και [34]). Παραθέτουμε τρία χαρακτηριστικά:

1. Αριστοτέλης (Μηχανικά. 847β)

πρῶτον μὲν γὰρ τῇ περιεχούσῃ γραμμῇ τὸν κύκλον, πλάτος οὐθὲν ἔχούσῃ, τάναντία πῶς προσεμφαίνεται, τὸ **κοῖλον** καὶ τὸ **κυρτόν**. ταῦτα δὲ διέστηκεν ἀλλήλων ὃν τρόπον τὸ μέγα καὶ τὸ μικρόν· ἐκείνων τε γὰρ μέσον τὸ ἴσον καὶ τούτων τὸ εὐθύ.

Βλέπουμε ότι ο Αριστοτέλης θεωρεί το κοίλο και το κυρτό ως δυϊκές έννοιες τις οποίες συγκρίνει με το μικρό και το μεγάλο και όπως μεταξύ του μικρού και του μεγάλου βρίσκεται το ίσο έτσι και μεταξύ του κοίλου και του κυρτού βρίσκεται η ευθεία.

2. Ευκλείδης (Στοιχεία, Βιβλίο 3, Πρόταση 8.)

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὥς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἑγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Βλέπουμε ότι στον Ευκλείδη το κυρτό και το κοίλο σχετίζονται με την θέση από την οποία παρατηρεῖται η καμπύλη.

3. Ἡρων (Ὅροι, 36)

Πᾶσα περιφέρεια κατὰ μὲν τὴν πρὸς τὸ περιεχόμενον χωρίον νόησιν κοίλη καλεῖται, κατὰ δὲ τὴν πρὸς τὸ περιέχον κυρτή.

Στο παράθεμα από τον Ἡρώνα βλέπουμε ότι το κυρτό και το κοίλο συνδέεται με το εξωτερικό και το εσωτερικό του χωρίου του κύκλου.

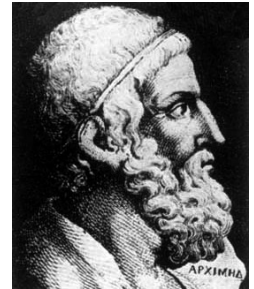
Η διαισθητική έννοια της κυρτότητας ή κοιλότητας επιδέχεται αυστηρή μαθηματική περιγραφή δηλαδή ένα ορισμό. Ο πρώτος ορισμός της κοίλης (άρα και της κυρτής) καμπύλης δόθηκε από τον Αρχιμήδη στο έργο του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου» (βλ. και [13] καθώς και [12] σελ.44)

Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ **κοίλην** καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμὴν, ἐν ᾗ ἂν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιονοῦν αἱ μεταξύ τῶν σημείων εὐθεῖαι ᾗτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

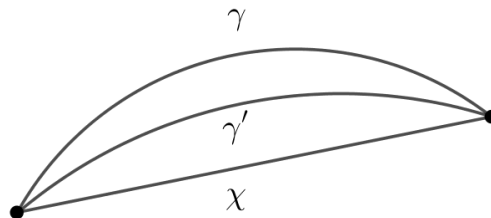
Σε μετάφραση του Ευάγγελου Σταμάτη:

Προς τό αὐτό μέρος καλῶ κοίλην ἐκείνην τὴν γραμμὴν, εἰς τὴν ὁποῖαν, ἀφοῦ ληφθῶσι δύο οἰαδήποτε σημεία, ἐάν αἱ μεταξύ των σημείων εὐθεῖαι ὅλαι πίπτουσι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη τῆς γραμμῆς, ἢ ἄλλαι μὲν πίπτουσι πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, ἄλλαι δὲ ἐπ' αὐτῆς, οὐδεμία δὲ εἰς τὰ ἄλλα μέρη.

Ο Αρχιμήδης συνέδεσε την κυρτότητα τα μήκη δεχόμενος ως αξίωμα ότι αν έχουμε μία κοίλη καμπύλη γ και μία χορδή της χ τότε κάθε άλλη κοίλη καμπύλη γ' που περιέχεται μεταξύ των γ και χ έχοντας τα ίδια άκρα με την χ έχει μικρότερο μήκος από την γ' . Το αξίωμα αυτό το χρησιμοποίησε για την προσέγγιση του μήκους του κύκλου.



Αρχιμήδης
287-212 π.Χ.



ΣΧΗΜΑ 1.1. Ο Αρχιμήδης αξιοποίησε την κυρτότητα για την προσέγγιση μηκών και εμβαδών.

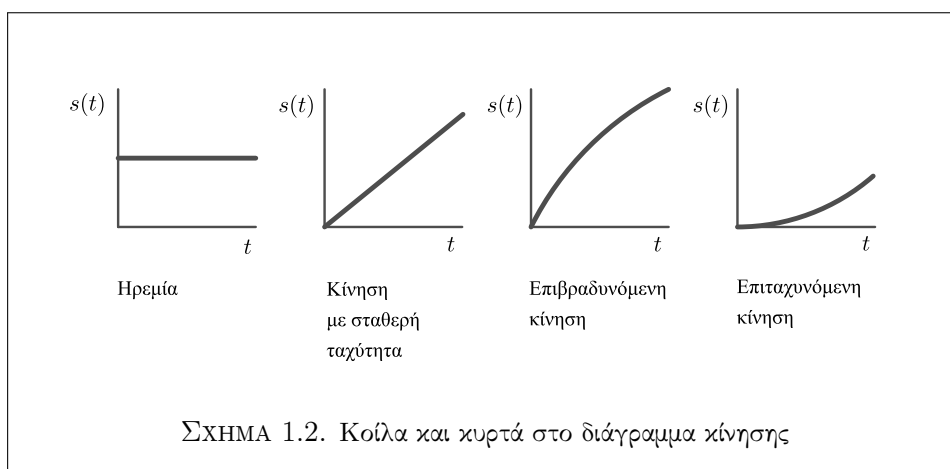
1.2 Η σημασία της κυρτότητας–κοιλότητας

Η γνώση της κυρτότητας–κοιλότητας μίας καμπύλης μας δίνει μία ιδέα προς τα που «στρίβει» η καμπύλη χωρίς όμως ποσοτικές πληροφορίες (σχετικά βλ. ενότητα 2.6) που να περιγράφουν ακριβέστερα το σχήμα της. Το ίδιο γίνεται και όταν έχουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που είναι μια ειδική

περίπτωση καμπύλης. Ωστόσο όπως θα δούμε στην περίπτωση της συνάρτησης ακόμη και αυτές οι ποιοτικές πληροφορίες συνδέονται με ανισότητες και σημαντικές αναλυτικές ιδιότητες με πολλές εφαρμογές.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι:

1. Αν έχουμε ένα μέγεθος που περιγράφεται από μία κυρτή συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα και επιθυμούμε να το ελαχιστοποιήσουμε τότε η ελαχιστοποίηση επιτυγχάνεται το πολύ σε μία θέση (ΠΡΟΤΑΣΗ 426) και επομένως η επεξεργασία του προβλήματος της ελαχιστοποίησης είναι ευχερέστερη.
2. Αν μια κυρτή συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano σε ένα κλειστό διάστημα τότε σε αυτό έχει μοναδική ρίζα η οποία μπορεί πάντοτε με κατάλληλη επαναληπτική μέθοδο να υπολογιστεί κατά προσέγγισιν (βλ. ΕΝΟΤΗΤΑ 2.5).
3. Οι πληροφορίες για την κυρτότητα μιας συνάρτησης που συνδέεται με ένα φυσικό μέγεθος μπορούν να μεταφραστούν σε πληροφορίες για τη μεταβολή του μεγέθους. Ως παράδειγμα (βλ. και [39]) αναφέρουμε το διάγραμμα $t - s(t)$ μετατόπισης ενός κινητού στο ΣΧΗΜΑ 1.2.



Johan Ludvig William
Valdemar Jensen
1859 – 1925

Συστηματική μελέτη της κυρτότητας των συναρτήσεων έγινε από τον Jensen ([19]) για την σπουδαιότητα της οποίας έγραψε σχετικά:

Μου φαίνεται ότι η έννοια της κυρτής συνάρτησης, είναι τόσο θεμελιώδης όσο η έννοια της θετικής ή της αύξουσας συνάρτησης. Αν δεν κάνω λάθος σε αυτό, θα πρέπει η έννοια να βρει την θέση της στις στοιχειώδεις παρουσιάσεις της θεωρίας των πραγματικών συναρτήσεων.

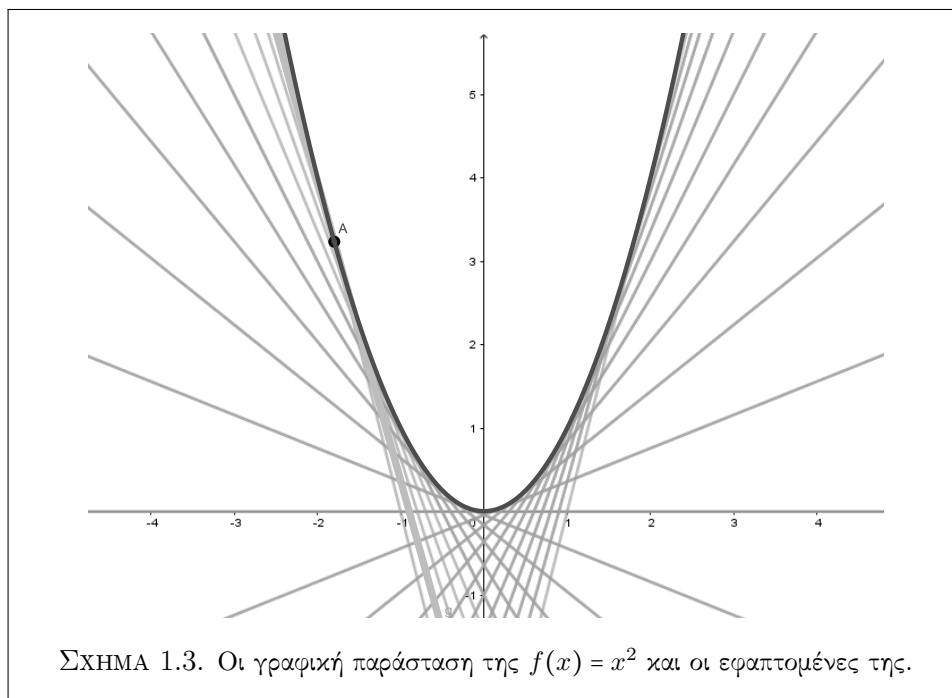
1.3 Οι κυρτές συναρτήσεις στο σχολικό βιβλίο.

Εκτός από τον ορισμό του Αρχιμήδη που εφαρμόζεται άμεσα στις συναρτήσεις έχουν δοθεί και άλλοι ορισμοί για τις κυρτές καμπύλες και φυσικά για τις συναρτήσεις. Σε κάποιους από αυτούς θα αναφερθούμε ενδιάμεσα. Θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό του σχολικού βιβλίου και θα επανέλθουμε στον ορισμό του Αρχιμήδη στο δεύτερο κεφάλαιο. Ο ορισμός της κυρτότητας που υιοθετείται στο ισχύον σχολικό βιβλίο είναι ειδικότερος του ορισμού του Αρχιμήδη και προϋποθέτει την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης. Φαίνεται ότι εισήχθη από τον Johan Bernoulli ([15], σελ. 91).

Στο σχολικό βιβλίο αφορμή για την εισαγωγή της έννοιας της κυρτότητας είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{|x|}$. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν μεν τα ίδια διαστήματα μονοτονίας αλλά διαφορετική συμπεριφορά στη μεταβολή της κλίσης των εφαπτομένων. Οι κυρτές



Johann Bernoulli
1667-1748

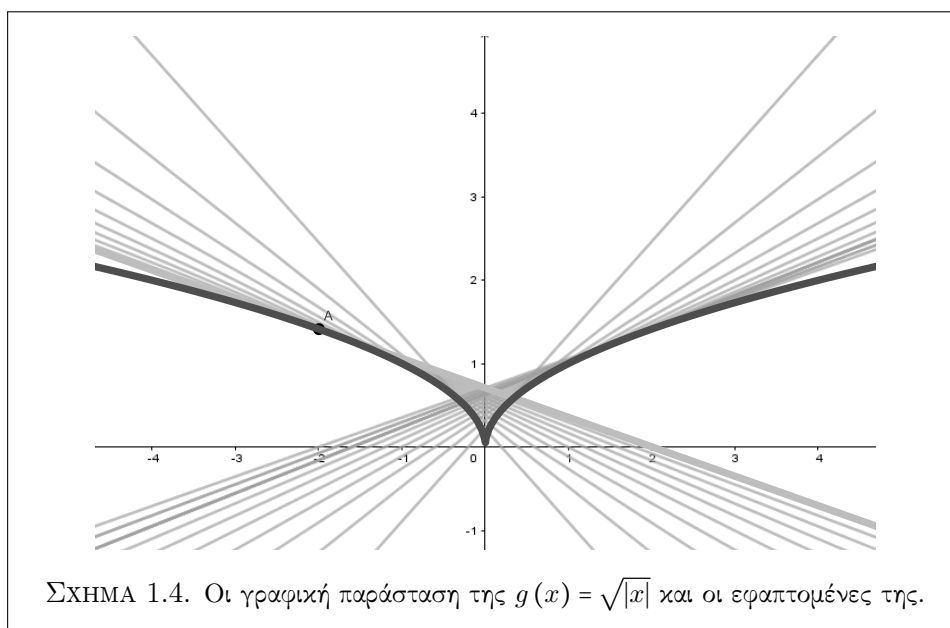


Από σχεδίασμα του
Johann Bernoulli
για τις κυρτές συναρτήσεις

(και αντίστοιχα οι κοίλες) συναρτήσεις εισάγονται στο σχολικό βιβλίο με τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .



- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Ο ορισμός αυτός αν και διαδεδομένος¹ έχει το μειονέκτημα ότι:
- Περιγράφει ένα γεωμετρικό χαρακτηριστικό με αναλυτικούς όρους.
- Χρησιμοποιεί δύο σύνθετες έννοιες: της μονοτονίας και της παραγώγου και μάλιστα της μονοτονίας της παραγώγου.

Το σχολικό βιβλίο κάνει μια γεωμετρική αναφορά σε σχόλιο όπου σημειώνεται:

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» (αντιστοίχως «πάνω») από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Με το θέμα αυτό θα ασχοληθούμε στην ενότητα 1.5.



Ο ορισμός της κυρτότητας που παρέχει το σχολικό βιβλίο δεν απαιτεί την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος, εφ' όσον είναι πεπερασμένα. Απαιτείται μόνο η συνέχεια. Αν όμως συμβαίνει κάποιο από τα άκρα να είναι πεπερασμένο και η συνάρτηση σε αυτό είναι παραγωγίσιμη τότε το

¹Ενδεικτικά βλ. [5] σελ. 202, [26] σελ. 204, [45] σελ. 186

πεδίο ορισμού της παραγώγου δεν περιλαμβάνει μόνο τα εσωτερικά σημεία αλλά και κάποια από τα άκρα. Η επόμενη ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ μας πληροφορεί η μονοτονία στα εσωτερικά σημεία μεταφέρεται στο πεδίο ορισμού της παραγώγου.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 1. Έστω f κυρτή στο διάστημα Δ . Τότε η f' είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Το πεδίο ορισμού $\mathcal{D}_{f'}$ της f' όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ και ενδεχομένως κάποια από τα άκρα του. Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_{f'}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f'(x_1) < f'(x_2) \quad (*).$$

Το αποδεικτέο προφανώς ισχύει αν τα x_1, x_2 είναι εσωτερικά σημεία του Δ . Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει ακόμη και αν κάποιο (ή και τα δύο) είναι άκρο. Ας υποθέσουμε ότι το x_1 είναι κάτω άκρο του Δ (η περίπτωση όπου το x_2 είναι άνω άκρο αντιμετωπίζεται όμοια) οπότε θα είναι κάποιος πραγματικός αριθμός α στον οποίο η f παραγωγίζεται. Προφανώς αρκεί να αποδειχθεί ότι η $(*)$ ισχύει όταν το x_2 είναι εσωτερικό σημείο του Δ . Έστω πως το αποδεικτέο δεν ισχύει. Τότε $f'(\alpha) \geq f'(x_2)$ και αν θεωρήσουμε m με $\alpha < m < x_2$ θα ισχύει

$$f'(m) < f'(x_2) \geq f'(\alpha).$$

Θεωρούμε αριθμό t με

$$f'(m) < t < f'(\alpha)$$

και την συνάρτηση g ορισμένη στο Δ με

$$g(x) = f(x) - t(x - m).$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} = g'(\alpha) = f'(\alpha) - t > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow m^-} \frac{g(x) - g(m)}{x - m} = g'(m) = f'(m) - t < 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχουν x_3, x_4 με $\alpha < x_3 < x_4 < m$ ώστε:

$$\frac{g(x_3) - g(\alpha)}{x_3 - \alpha} > 0, \quad \frac{g(x_4) - g(m)}{x_4 - m} < 0,$$

άρα

$$g(x_3) > g(\alpha), \quad g(x_4) > g(m) \quad (**).$$

Η συνεχής συνάρτηση g στο $[\alpha, m]$ έχει μέγιστο που λόγω των $(**)$ παρουσιάζεται σε κάποιο εσωτερικό σημείο του x_5 . Από το θεώρημα του Fermat θα είναι $g'(x_5) = 0$ δηλαδή $f'(x_5) = t$ με $f'(x_5) = t > f'(m)$ με $x_5 < m$ κάτι που αντίκειται στη μονοτονία της f' και επομένως μας οδηγεί σε άτοπο. Ο.Ε.Δ.

1.4 Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου

Το πιο εύχρηστο κριτήριο μονοτονίας που έχουμε για την κλάση των παραγωγισίμων συναρτήσεων είναι εκείνο της παραγώγου: Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα, παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία και έχει παντού παράγωγο θετική τότε είναι γνησίως αύξουσα. Ως είναι φυσικό έχουμε ένα αντίστοιχο κριτήριο² για την κυρτότητα και την κοιλότητα. Το σχολικό βιβλίο το διατυπώνει ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Η παράγωγος έχει μια ιδιομορφία: Το κριτήριο της μονοτονίας με βάση το πρόσημο της πρώτης παραγώγου παρέχει μια ικανή συνθήκη αλλά όχι αναγκαία. Δηλαδή θετική παράγωγος συνεπάγεται ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα αλλά μπορεί μια συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα χωρίς να έχει παντού θετική παράγωγο: Το γεγονός ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα μπορεί να εξασφαλίσει ότι η παράγωγος είναι απλώς μη αρνητική και όχι ότι είναι θετική. Το πιο προσιτό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση x^3 που αν και γνησίως αύξουσα η παράγωγος της μηδενίζεται στο 0. Η δυσκολία αυτή αίρεται με μια επιπλέον υπόθεση που αφορά το σύνολο των σημείων μηδενισμού της παραγώγου. Να είναι αρκούντως «αραιωμένο» η για να μιλήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια να μην περιέχει κανένα διάστημα.

ΠΡΟΤΑΣΗ ♦ 2. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Ισχύει:

- (α') $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
- (β') Το σύνολο των σημείων όπου η f' μηδενίζεται δεν περιέχει κανένα διάστημα.

2. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από το 1. προκύπτει το 2. Η συνθήκη $f'(x) \geq 0$ που ισχύει για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ μας εξασφαλίζει ότι η f είναι αύξουσα. Πράγματι έστω

²Σε παλαιότερο σχολικό βιβλίο ([52] σελίδα 188) η συνθήκη $f''(x) \geq 0$ χρησιμοποιείται για τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης. Συγκεκριμένα δίνεται ο ορισμός: «Αν για κάθε $x \in \Delta$ είναι $f''(x) \geq 0$, θα λέμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ .»

x_1, x_2 δύο σημεία του Δ με $x_1 < x_2$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ του οποίου τα εσωτερικά σημεία είναι και εσωτερικά σημεία του Δ και είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) . Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0}$$

Άρα και το α' μέλος σε αυτήν την ανισότητα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός και επομένως $f(x_1) \leq f(x_2)$. Επομένως η f είναι αύξουσα. Θα δείξουμε ότι είναι και γνησίως αύξουσα. Πράγματι αν υποθεθεί ότι για σημεία a, b του Δ ισχύει $a < b$ αλλά $f(a) = f(b)$ τότε για κάθε x με $a \leq x \leq b$ είναι $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ και αφού $f(a) = f(b)$ έχουμε $f(x) = f(a)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αλλά τότε η f είναι σταθερή στο $[a, b]$ και επομένως για κάθε $x \in [a, b]$ είναι $f'(x) = 0$. Άρα το διάστημα $[a, b]$ περιέχεται στο σύνολο των σημείων μηδενισμού της f' (άτοπο). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και η f είναι κυρτή.

Από το 2. προκύπτει το 1. Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Για τυχόν x_0 είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{> 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0$$

επομένως η συνθήκη (α') του 1. ισχύει.

Αν υποθεθεί ότι το σύνολο των σημείων μηδενισμού της f' περιέχει κάποιο διάστημα τότε θα περιέχει αριθμούς p, q με $p < q$ και θα περιέχει το διάστημα $[p, q]$. Στο διάστημα αυτό η f' θα είναι μηδέν και η f θα είναι σταθερή άρα όχι γνησίως αύξουσα (άτοπο). Άρα και η συνθήκη (β') του 1. ισχύει. Ο.Ε.Δ.

Η προηγούμενη πρόταση προσαρμόζεται άμεσα και στην δεύτερη παράγωγο ώστε να έχουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια συνάρτηση να είναι κυρτή:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 3. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Ισχύει:

(α') $f''(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

(β') Το σύνολο των σημείων όπου η f'' μηδενίζεται δεν περιέχει κανένα διάστημα.

2. Η f είναι κυρτή στο Δ .

Μπορούμε να έχουμε και μια συνθήκη κυρτότητας που είναι σε γεωμετρική διατύπωση:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 4. Έστω ότι η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ . Αν

- $f''(x) \geq 0$ για όλα τα x και
- δεν υπάρχει υποδιάστημα του Δ στο οποίο η f να συμπίπτει με συνάρτηση της μορφής $ax + \beta$

τότε η f είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ξέρουμε ότι (ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 3) ότι η f θα είναι κυρτή αν το σύνολο των ριζών της δεύτερης παραγώγου, ως το συμβολίσουμε $Z(f)$, δεν περιέχει διάστημα. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι κυρτή οπότε το $Z(f)$ περιέχει διάστημα I . Στο I ισχύει $f''(x) = 0$ οπότε $f'(x) = k$ για κάποιο k και επομένως $f(x) = kx + d$ για κάθε $x \in I$ δηλαδή στο I συμπίπτει με συνάρτηση της μορφής $ax + \beta$ (άτοπο). Ο.Ε.Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Έστω

$$h(x) = \frac{1}{6} \left((x-1)^2 |x-1| + (x-2)^2 |x-2| \right) - \frac{x^2}{2}.$$

Μπορούμε δουλεύοντας χωριστά στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ να διαπιστώσουμε ότι η h είναι παραγωγίσιμη σε αυτά. Δουλεύοντας στα 1 και 2 με τον ορισμό βρίσκουμε ότι η h παραγωγίζεται και σε αυτά τα σημεία επομένως είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η παράγωγος της είναι

$$h'(x) = ((x-2)|x-2| + (x-3)|x-3|) - x$$

Εραγαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι η h' είναι και αυτή παραγωγίσιμη (επομένως η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) και ισχύει:

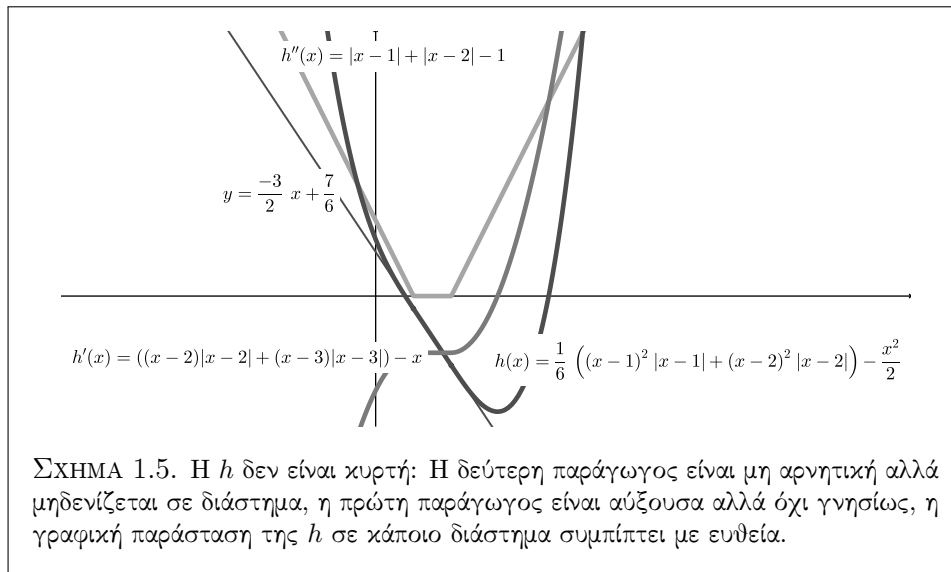
$$h''(x) = |x-1| + |x-2| - 1$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι $h''(x) \geq 0$.

Η h δεν είναι κυρτή για ένα οποιονδήποτε από τους παρακάτω λόγους:

- Η $h''(x)$ στο διάστημα $[1, 2]$ είναι μηδέν.
- Η $h'(x)$ στο διάστημα $[1, 2]$ είναι σταθερή.
- $h(x)$ στο διάστημα $[1, 2]$ συμπίπτει με την ευθεία $y = 7x - 6$.

Σύμφωνα με την εξεταστέα ύλη των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ' Τάξης οι ασκήσεις που αναφέρονται στις κυρτές και κοίλες συναρτήσεις θα πραγματεύονται μέσω του κριτηρίου της δευτέρας παραγώγου δηλαδή μέσω του προσήμου της δευτέρας παραγώγου και όχι μέσω της μονοτονίας της πρώτης παραγώγου. Συγκεκριμένα η εγκύκλιος της εξεταστέας ύλης αναφέρει:



Θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους.

Η ρύθμιση αυτή στις ασκήσεις απαλλάσσει τους διδάσκοντες και τους διδασκόμενους από την υποχρέωση να εργάζονται με την κάπως γενικότερη συνθήκη ότι η παράγωγος είναι γνησίως αύξουσα και να έχουν ως υπόθεση ότι η δεύτερη παράγωγος είναι θετική ή εν πάση περιπτώσει είναι μη αρνητική αλλά μηδενίζεται σε «λίγα» σημεία.

1.5 Κυρτές συναρτήσεις και εφαπτομένες

Η σχετική θέση μιας κυρτής συνάρτησης και της εφαπτομένης της αποδίδει νόημα στις κυρτές (και κατ' επέκτασιν στις κοίλες συναρτήσεις) και αξίζει τον κόπο να αποδεικνύεται ως άσκηση στην τάξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ ◊ 5. Έστω f μια συνάρτηση που είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και ε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης της $\mathcal{C}_f$ στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$ όπου x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ . Έστω σημείο M της $\mathcal{C}_f$ που είναι διάφορο του P και N το σημείο της ε που έχει την ίδια τεταγμένη με το M . Να αποδείξετε ότι η τεταγμένη του σημείου M είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη του σημείου της N .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Α ΤΡΟΠΟΣ Έστω x η τεταγμένη του M . Η τεταγμένη του είναι $f(x)$. Για να βρούμε την τεταγμένη του σημείου N χρησιμοποιούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο P που είναι η

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

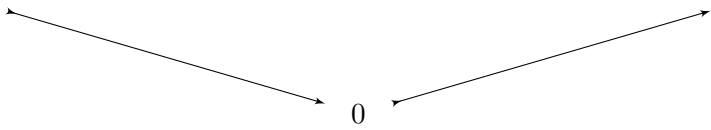
Η τεταγμένη του P είναι $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ και θέλουμε για $x \neq x_0$ να ισχύει:

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ για κάθε } x \neq x_0 \quad (1.1)$$

Η (1.1) είναι ισοδύναμη με την $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$ για $x \neq x_0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ ορισμένη στο Δ . Στα εσωτερικά σημεία του Δ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα για τα εσωτερικά σημεία x του Δ που είναι $x > x_0$ θα είναι $f'(x) > f'(x_0)$ δηλαδή $g'(x) > 0$. Όμοια για τα εσωτερικά σημεία x του Δ που είναι $x < x_0$ θα είναι $g'(x) < 0$. Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής της g :

x	x_0		
$g'(x)$	-	0	+
g			

Από τον πίνακα συνάγουμε ότι είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \neq x_0$ και επομένως το αποδεδειγμένο ισχύει.

Β' ΤΡΟΠΟΣ. Όπως πριν θέλουμε να αποδείξουμε την (1.1). Αυτή ισοδυναμεί με την

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$$

για $x \neq x_0$. Για $x = x_0$ η αποδεικτέα ισχύει σαν ισότητα. Για $x \neq x_0$ τα x, x_0 ορίζουν διάστημα στο οποίο μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα μέσης τιμής. Θα υπάρξει λοιπόν ξ μεταξύ των x, x_0 ώστε $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. Οπότε η προς απόδειξη ανισότητα γίνεται:

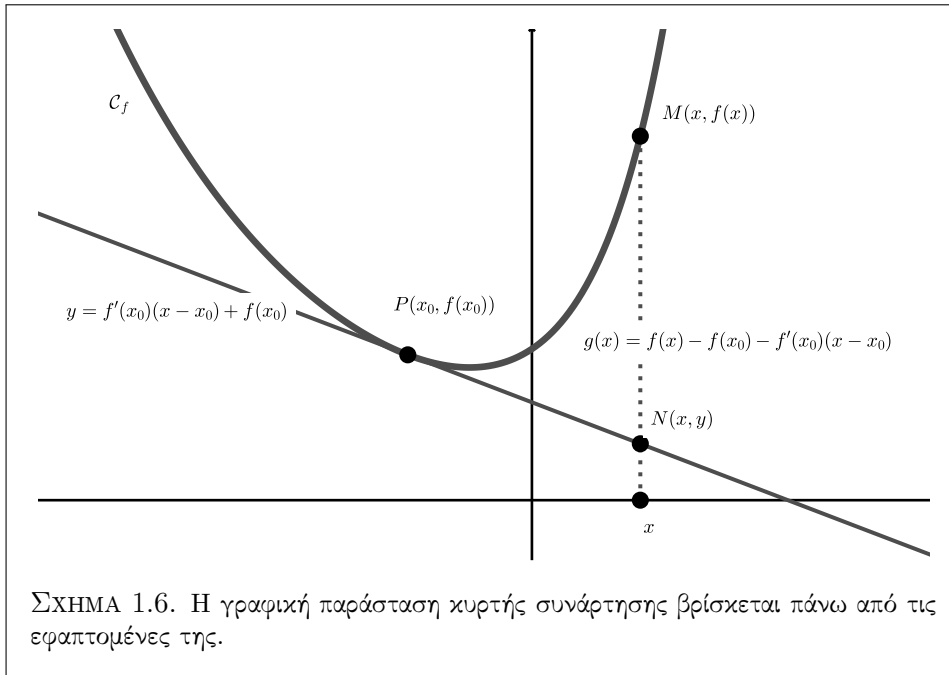
$$f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$$

ή αλλιώς

$$(f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) > 0 \quad (*)$$

Για να αποδείξουμε την ανισότητα $(*)$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $x < x_0$ οπότε έχουμε την διάταξη $x < \xi < x_0$. Λόγω της μονοτονίας της παραγώγου είναι $f'(\xi) < f'(x_0)$ και φυσικά $x < x_0$. Άρα και οι δύο παράγοντες του γινομένου $(f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0)$ είναι αρνητικοί και η ανισότητα $(*)$ ισχύει.



- $x > x_0$ εργαζόμαστε ανάλογα.

Εύλογο είναι το ερώτημα αν ισχύει το αντίστροφο δηλαδή αν η ιδιότητα της γραφικής παράστασης να βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες εξασφαλίζει την κυρτότητα. Η απάντηση είναι καταφατική. Σχετικά έχουμε την:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 6. Έστω f μια συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία. Αν για κάθε ζεύγος x_0, x εσωτερικών σημείων του Δ με $x \neq x_0$ ισχύει

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

τότε η f είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε δύο εσωτερικά σημεία x_1, x_2 του Δ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f'(x_1) < f'(x_2)$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση μία φορά παίρνοντας ως x_0 το x_1 και x το x_2 και μια ως x_0 το x_2 και ως x το x_1 και έχουμε:

$$f(x_2) > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \quad (1.2)$$

και

$$f(x_1) > f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2) \quad (1.3)$$

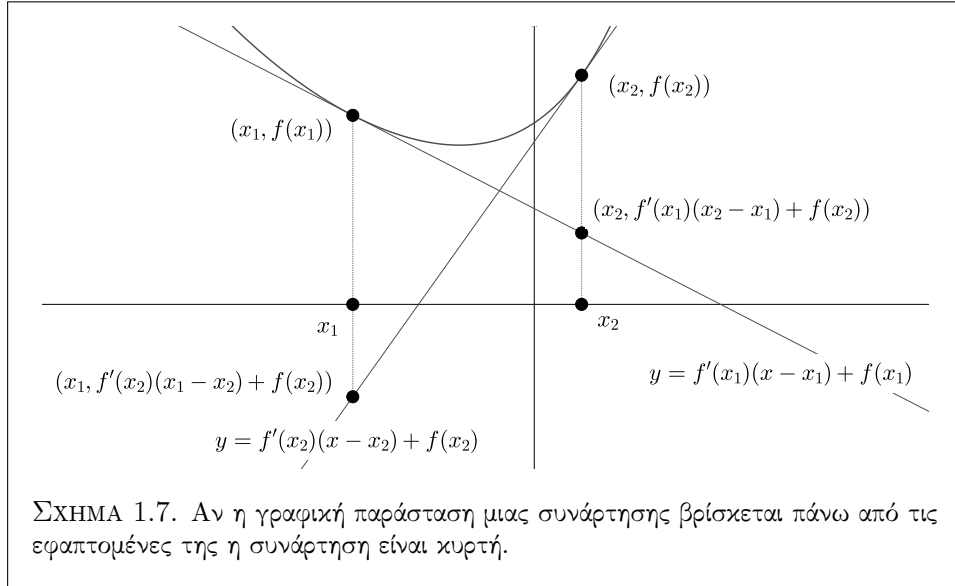
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1.2) και (1.3) βρίσκουμε ότι

$$0 > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$0 > (f'(x_2) - f'(x_1))(x_1 - x_2)$$

και αφού $x_1 - x_2 < 0$ είναι $f'(x_2) - f'(x_1) > 0$ δηλαδή $f'(x_1) < f'(x_2)$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και η f είναι κυρτή. Ο.Ε.Δ.



Οι δύο προηγούμενες ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ $\diamond$ εξασφαλίζουν την ισοδυναμία των δύο ιδιοτήτων και επομένως η ιδιότητα της γραφικής παράστασης να βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη αποτελεί ένα χαρακτηρισμό των κυρτών συναρτήσεων. Για τον λόγο αυτό ορισμένοι συγγραφείς³ επιλέγουν την ιδιότητα αυτή ως ορισμό των κυρτών συναρτήσεων. Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε και ως ορισμός σε παλαιότερο σχολικό βιβλίο⁴.

Μπορούμε να έχουμε ένα ελαφρά διαφορετικό χαρακτηρισμό των κυρτών συναρτήσεων:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 7. Έστω f μια συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία. Οι εξής προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Η f είναι κυρτή.

³Βλ. σχετικά [2] σελ. 462, [23] σελ. 227, [33] σελ. 167, [35] σελ. 175, [68] σελ. 61, [53] σελ. 473. Ο Κάππος χρησιμοποιεί τον περιγραφικό όρο «το διάγραμμα στηρίζεται επί της εφαπτομένης». Σχετικά βλ. και 2.2.3.

⁴Βλ. [66] σελίδα 131 όπου ορίζεται:

« f κυρτή στο $\Delta \Leftrightarrow f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) > 0 \quad \forall x, y \text{ στο } \Delta \text{ με } x \neq y$ »
ορσ

2. Για κάθε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ υπάρχουν αριθμοί α, β ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) \geq \alpha x + \beta$ και η ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. $\Rightarrow$ 2. Αρκεί να πάρουμε θεωρήσουμε την εφαπτομένη

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0f'(x_0)$$

της $\mathcal{C}_f$ στο $P(x_0, f(x_0))$ και λάβουμε ως $\alpha = f'(x_0)$ και $\beta = f(x_0) - x_0f'(x_0)$.

2. $\Rightarrow$ 1. Επαληθεύουμε πρώτα ότι η $y = \alpha x + \beta$ είναι η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $P(x_0, f(x_0))$. Αφού στην $f(x) \geq \alpha x + \beta$ ισχύει η ισότητα για $x = x_0$ δηλαδή $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$ έχουμε ότι η $y = \alpha x + \beta$ διέρχεται από το $P(x_0, f(x_0))$ οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha = f'(x_0)$.

Από την $f(x) \geq \alpha x + \beta$ έχουμε ότι για την συνάρτηση:

$$w(x) = f(x) - \alpha x - \beta$$

ισχύει $w(x) \geq 0$ για όλα τα x . Αλλά για $x = x_0$ ισχύει η ισότητα αφού $w(x_0) = 0$. Από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι $w'(x_0) = 0$ από την οποία προκύπτει ότι $f'(x_0) = \alpha$.

Η απόδειξη τώρα συμπληρώνεται όπως στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 6. Ο.Ε.Δ.

1.6 Κυρτές συναρτήσεις και ασύμπτωτοι.

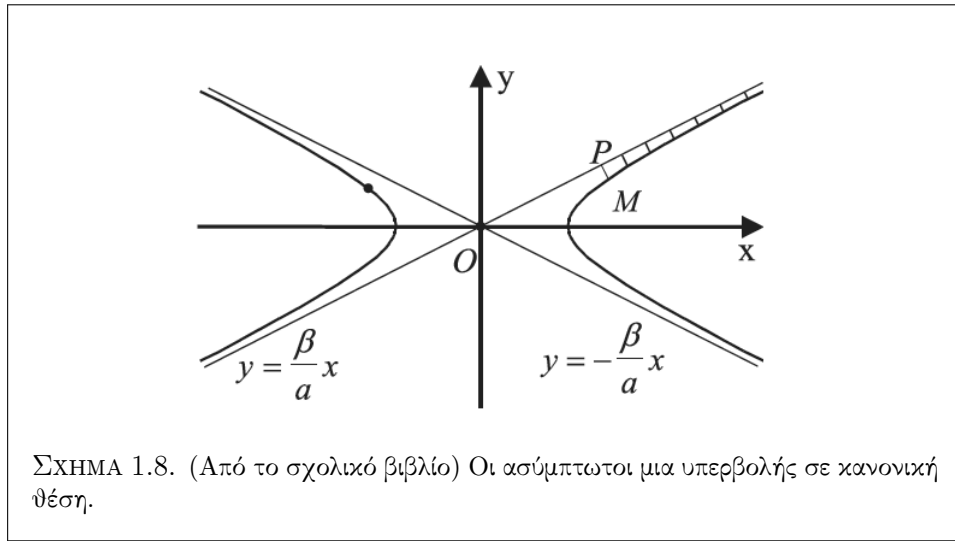
Οι μαθητές μας συναντούν τις ασυμπτώτους δύο φορές: μια όταν διδάσκονται κωνικές τομές στην Β' τάξη και μια όταν διδάσκονται Ανάλυση. Στην Β' τάξη επιχειρείται να δοθεί και μία σύνδεση της έννοιας της ασυμπτώτου με την οριακή διαδικασία. Το βιβλίο της Γ' τάξης δεν επανέρχεται στο θέμα συσχέτισης με την υπερβολή. Στην Β' Τάξη οι μαθητές «βλέπουν» την ασύμπτωτο μιας κυρτής και μιας κοίλης συνάρτησης. Πρόκειται για τις συναρτήσεις

$$f(x) = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2},$$

στον οποίων την γραφική παράσταση μπορεί να αναλυθεί η υπερβολή

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Το σχήμα 1.7 υποβάλλει την ιδέα ότι η γραφική παράσταση μιας κυρτή συνάρτησης που έχει ασύμπτωτο στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ βρίσκεται πάνω από την ασύμπτωτο αυτή ενώ αν η συνάρτηση είναι κοίλη βρίσκεται κάτω. Αυτό ισχύει όπως προκύπτει από το επόμενο:



ΣΧΗΜΑ 1.8. (Από το σχολικό βιβλίο) Οι ασύμπτωτοι μια υπερβολής σε κανονική θέση.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 8. Έστω f μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(m, +\infty)$ (αντιστοίχως $(-\infty, m)$). Αν η f έχει στο $+\infty$ (αντιστοίχως $-\infty$) ασύμπτωτο την $y = \alpha x + \beta$ τότε ισχύει

$$f(x) > \alpha x + \beta \quad \text{για κάθε } x \in (m, +\infty)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εργαζόμαστε με την περίπτωση $+\infty$. Η περίπτωση $-\infty$ αποδεικνύεται όμοια.

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - (\alpha x + \beta)$$

η οποία έχει παράγωγο $g'(x) = f'(x) - \alpha$ η οποία, προφανώς, είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η g είναι κυρτή. Θα αποδείξουμε ότι η g παίρνει μόνο θετικές τιμές.

Επειδή η $y = \alpha x + \beta$ είναι ασύμπτωτος της f στο $+\infty$ θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

και επομένως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0. (*)$$

Η g είναι κυρτή και επομένως η γραφική παράσταση της βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένης της. Αυτό σημαίνει ότι για οποιοδήποτε x_0 θα είναι

$$g(x) \geq g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$$

Δεν μπορεί για κάποιο x_0 να είναι $g'(x_0) > 0$ διότι τότε είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)) = +\infty$$

και επομένως και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ που έρχεται σε αντίθεση με την (*). Άρα για όλα τα x είναι

$$g'(x) \leq 0. (**)$$

και επομένως η g είναι φθίνουσα.

Η g δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Πράγματι αν $g(x_1) < 0$ για κάποιο x_1 τότε αφού η g είναι φθίνουσα θα είναι $g(x) \leq g(x_1)$ για $x > x_1$. Παίρνοντας όρια για $x \rightarrow +\infty$ έχουμε το άτοπο συμπέρασμα ότι $0 \leq g(x_1) < 0$. Άρα $g(x) \geq 0$ για όλα τα x . Αν υποθεθεί ότι για κάποιο x_2 είναι $g(x_2) = 0$ τότε για όλα τα $x > x_2$ θα είναι $0 = g(x_2) \geq g(x) \geq 0$ δηλαδή $g(x) = 0$ και τότε για $x > x_2$ θα είναι $g'(x) = 0$ πράγμα που αντιβαίνει στο ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η g παίρνει μόνο θετικές τιμές. Ο.Ε.Δ.



Είναι γνωστό ότι αν οι κωνικές τομές θεωρηθούν όχι στο Ευκλείδειο αλλά στο προβολικό επίπεδο που είναι το Ευκλείδειο επίπεδο συμπληρωμένο με τα εις άπειρο σημεία τότε οι ασύμπτωτοι των υπερβολών «γίνονται» εφαπτομένες τους. Μάλιστα μπορούμε να θεωρήσουμε της ασυμπτώτους ως ένα είδος «κατάληξης» των εφαπτομένων. Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο $(t, \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{t^2 - \alpha^2})$ είναι η ευθεία

$$y = \frac{\beta t}{\alpha \sqrt{t^2 - \alpha^2}} x - \frac{\beta \alpha}{\alpha \sqrt{t^2 - \alpha^2}}.$$

Όταν $t \rightarrow +\infty$ έχουμε ότι:

$$\frac{\beta t}{\alpha \sqrt{t^2 - \alpha^2}} \rightarrow \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\beta \alpha}{\alpha \sqrt{t^2 - \alpha^2}} \rightarrow 0.$$

δηλαδή η εφαπτομένη «τείνει» προς την ασύμπτωτο.

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικά για κυρτές συναρτήσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 9. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(m, +\infty)$. Αν η f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο την $y = \alpha x + \beta$ και η εφαπτομένη της στο τυχόν σημείο της $(t, f(t))$ είναι η ευθεία $y = \alpha(t)x + \beta(t)$ τότε:

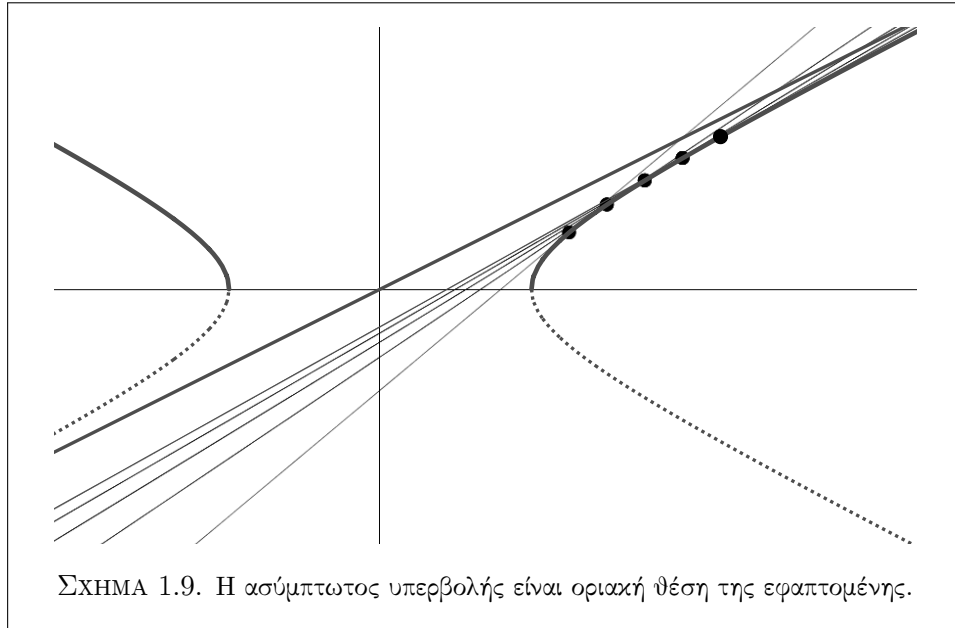
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \alpha, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = \beta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε όπως στην ΠΡΟΤΑΣΗ 8 την συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - (\alpha x + \beta)$$

η οποία είναι κυρτή και στο $+\infty$ έχει όριο το μηδέν. Ισχύει δε:

$$g'(x) = f'(x) - \alpha$$



Επιχειρηματολογώντας όπως στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 8$ συνάγουμε ότι $g'(x) \leq 0$ και ότι η g είναι φθίνουσα. Με όμοιο τρόπο συνάγουμε ότι η g δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές και επομένως $g(x) \geq 0$ για όλα τα x .

Η g είναι κυρτή και επομένως το σημείο $(p, g(p))$ της $\mathcal{C}_g$ είναι πάνω από την εφαπτομένη της στο $(q, g(q))$. Άρα:

$$g(p) \geq g'(q)(p - q) + g(q) \quad (\heartsuit)$$

1. Θέτοντας στην $(\heartsuit)$ όπου q το t και όπου p το $t - 1$ βρίσκουμε:

$$g(t - 1) \geq -g'(t) + g(t).$$

Συνδυάζοντας την σχέση αυτή με την $g'(x) \leq 0$ έχουμε την:

$$g(t) - g(t - 1) \leq g'(t) \leq 0 \quad (*).$$

Παίρνοντας όρια για $t \rightarrow +\infty$ στην $(*)$ βρίσκουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) = 0.$$

Αλλά $g'(t) = f'(t) - \alpha$ επομένως

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \alpha \quad (**).$$

2. Θέτοντας στην $(\heartsuit)$ όπου q το t και όπου p το $3t$ βρίσκουμε $g(3t) \geq g'(t)(2t) + g(t)$ δηλαδή

$$g'(t)t \leq \frac{1}{2}(g(3t) - g(t)) \quad (** *).$$

Θέτοντας στην (ϑ) όπου q το t και όπου p το $\frac{t}{3}$ βρίσκουμε

$$g\left(\frac{t}{3}\right) \geq -\frac{2}{3}g'(t)t + g(t)$$

από την οποία έχουμε:

$$\frac{3}{2}\left(g(t) - g\left(\frac{t}{3}\right)\right) \leq g'(t)t \quad (***)$$

Συνδυάζοντας τις (**) και (****) έχουμε την

$$\frac{3}{2}\left(g(t) - g\left(\frac{t}{3}\right)\right) \leq g'(t)t \leq \frac{1}{2}(g(3t) - g(t)).$$

Παίρνοντας όρια στο $+\infty$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα $g(t), g\left(\frac{t}{3}\right), g(3t)$ έχουν όριο μηδέν βρίσκουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t)t = 0,$$

δηλαδή ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f'(t) - \alpha)t = 0.$$

Αλλά

$$f(t) - tf'(t) = f(t) - \alpha t + \alpha t - tf'(t) = (f(t) - \alpha t) - (f'(t) - \alpha)t$$

Παίρνοντας όρια στο $+\infty$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι στο $+\infty$ το $f(t) - \alpha t$ έχει όριο β έχουμε:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t) - tf'(t)) = \beta \quad (****)$$

Από τις (**) και (****) έχουμε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \alpha, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = \beta$$

Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 1. Ας σημειωθεί ότι η παραπάνω ιδιότητα δεν ισχύει για όλες τις συναρτήσεις. Δηλαδή μπορεί μια παραγωγίσιμη συνάρτηση να έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο αλλά αυτή να μην αποτελεί οριακή θέση της εφαπτομένης με την έννοια που δόθηκε προηγουμένως δηλαδή οι συντελεστές της εφαπτομένης τείνουν στους συντελεστές της ασυμπτώτου (βλ. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta\mu(x^3)}{x}$$

ορισμένη στο $(0, +\infty)$. Είναι

$$\left| \frac{\eta\mu(x^3)}{x} \right| = |\eta\mu(x^3)| \left| \frac{1}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

άρα $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ που σημαίνει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Επομένως η f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτο την ευθεία $y = 0$. Για την παράγωγο της f έχουμε:

$$f'(x) = \frac{3(\sigma\upsilon\nu x^3)x^3 - \eta\mu x^3}{x^2} = 3x\sigma\upsilon\nu x^3 - \frac{\eta\mu x^3}{x^2}.$$

Είναι λοιπόν

$$3x\sigma\upsilon\nu x = f'(x) + \frac{\eta\mu x^3}{x^2}.$$

Αν οι συντελεστές της εφαπτομένης έτειναν στους συντελεστές της ασυμπτώτου θα έπρεπε η παράγωγος της f να έχει στο $+\infty$ όριο το μηδέν. Τότε, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x^3}{x^2} = 0$, λόγω της παραπάνω σχέσης θα έπρεπε να έπρεπε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x\sigma\upsilon\nu x = 0$ δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sigma\upsilon\nu x = 0$. Τότε η συνάρτηση $h(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}$ θα είχε στο $+\infty$ όριο το $-\frac{\pi}{2}$. Άρα θα έπρεπε κοντά στο $+\infty$ δηλαδή σε ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ να παίρνει μόνο αρνητικές τιμές. Αλλά κάθε διάστημα $(a, +\infty)$ περιέχει ένα αριθμό της μορφής $2k\pi$ με k θετικό ακέραιο. Για αυτό τον αριθμό είναι $h(2k\pi) = 2k\pi\sigma\upsilon\nu 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} > 0$ (άτοπο). Άρα η f' δεν έχει καν όριο στο $+\infty$.

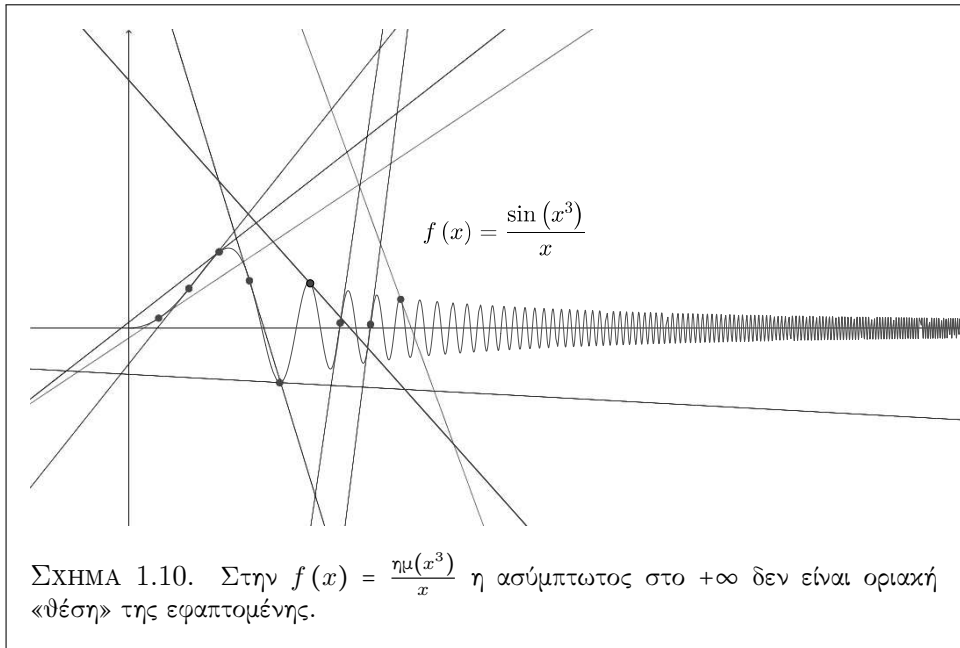


Η ύπαρξη ασυμπτώτου μιας συνάρτησης στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ εξαρτάται από την ύπαρξη, στο $\mathbb{R}$, δύο ορίων:

- Του $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$.
- Του $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$.

Στην περίπτωση των κυρτών συναρτήσεων το μόνο που απαιτείται είναι η παράγωγος της συνάρτησης να έχει (κατά περίπτωση) στο $\pm\infty$ όριο πραγματικό αριθμό. Σχετικά έχουμε το ακόλουθο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 10. Έστω f μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(m, +\infty)$ (αντιστοίχως $(-\infty, m)$) με συνεχή παράγωγο. Τα εξής είναι ισοδύναμα:



1. Η f έχει στο $+\infty$ (αντιστοίχως $-\infty$) ασύμπτωτο.
2. Η f' έχει στο $+\infty$ (αντιστοίχως $-\infty$) πραγματικό όριο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα δούμε την περίπτωση του $+\infty$. Η περίπτωση του $-\infty$ είναι όμοια.

(1) $\implies$ (2) Υποθέτουμε ότι η f έχει ασύμπτωτο την ευθεία $y = \alpha x + \beta$. Ξέρουμε ότι η f' ως γνησίως αύξουσα και συνεχής έχει όριο στο $+\infty$. Επομένως υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\alpha \neq 0$ Τότε επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$ με $g(x) = f(x) - (\alpha x + \beta)$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + \alpha x + \beta) = \pm\infty$ ανάλογα με το αν $\alpha > 0$ ή $\alpha < 0$. Αλλά τότε

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

και επομένως η f' έχει στο $+\infty$ πραγματικό όριο.

Περίπτωση 2: $\alpha = 0$ Στην περίπτωση αυτή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = +\infty.$$

Αλλά τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x} = \lim_{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)} \frac{f'(x) + 1}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) + 1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) + 1$$

Το όριο του α' μέλους είναι ίσο με 1 επομένως το όριο του β' μέλους είναι πραγματικός αριθμός. Άρα και το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ είναι ο πραγματικός αριθμός 0.

Αλλά τότε

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

και επομένως το όριο της f' στο $+\infty$ είναι πραγματικός αριθμός.

(2) $\implies$ (1) Υποθέτουμε ότι η f' έχει στο $+\infty$ όριο τον πραγματικό αριθμό α . Η f' έχει το πολύ μία ρίζα επομένως σε κάποιο διάστημα $(k, +\infty) \subseteq (m, +\infty)$ δεν έχει ρίζα και επομένως διατηρεί πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι η f σε αυτό το διάστημα είναι γνησίως μονότονη και επομένως έχει όριο στο $+\infty$. Αν το όριο αυτό είναι κάποιος πραγματικός αριθμός β τότε η ευθεία $y = \beta$ είναι ασύμπτωτος της f και η απόδειξη έχει τελειώσει. Αν τώρα το όριο αυτό είναι $\pm\infty$ θέτουμε:

$$f'(t) = \alpha + r(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} r(t) = 0$$

Επειδή $f' \nearrow$ είναι $f'(t) \leq \alpha$ και επομένως $r(t) \leq 0$. Θεωρούμε τυχόν x_0 . Επειδή για κάθε t το σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $(t, f(t))$ θα ισχύει:

$$f(x_0) \geq f'(t)(x_0 - t) + f(t)$$

επομένως θα είναι:

$$f(x_0) - f'(t)x_0 \geq f(t) - f'(t)t$$

άρα

$$f(x_0) - f'(t)x_0 \geq f(t) - \alpha t - r(t)t.$$

Αλλά κοντά στο $+\infty$ είναι $t > 0$ άρα $-r(t)t \geq 0$ και επομένως:

$$f(x_0) - f'(t)x_0 \geq f(t) - \alpha t \text{ κοντά στο } +\infty.$$

Είναι $(f(t) - \alpha t)' = f'(t) - \alpha \nearrow$ και επομένως η κυρτή συνάρτηση $f(t) - \alpha t$ έχει όριο στο $+\infty$. Το όριο αυτό είναι μικρότερο ή ίσο του

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x_0) - f'(t)x_0) = f(x_0) - \alpha x_0$$

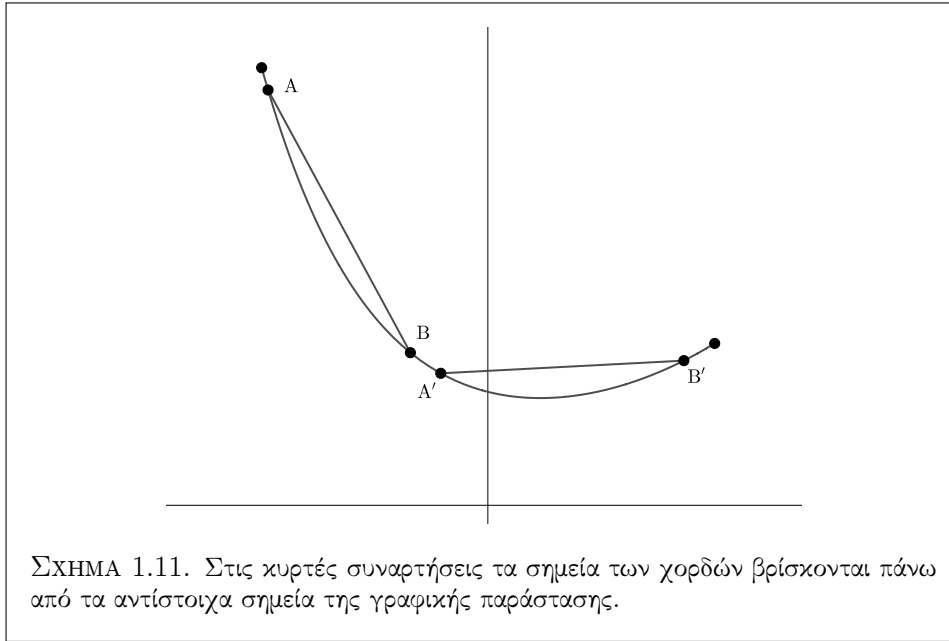
επομένως είναι κάποιος πραγματικός αριθμός β . Τέλος:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha$$

Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι ασύμπτωτος της f στο $+\infty$. Ο.Ε.Δ.

1.7 Κυρτές συναρτήσεις και χορδές.

Ο ορισμός του Αρχιμήδη για τις κοίλες συναρτήσεις χρησιμοποιεί την έννοια της χορδής και απαιτεί η καμπύλη να βρίσκεται προς το ίδιο μέρος της χορδής. Η εικόνα της γραφικής παράστασης μιας κυρτής συνάρτησης μας υποβάλλει άμεσα αυτή την ιδέα. Τα σημεία της γραφικής παράστασης που βρίσκονται μεταξύ δύο σημείων της A, B είναι κάτω από τα αντίστοιχα σημεία της χορδής της AB . Για



να περιγράψουμε αλγεβρικά το φαινόμενο αυτό θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι τα σημεία A, B είναι τα $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < x_2$ και να υπολογίσουμε την ευθεία που διέρχεται από αυτά. Η εξίσωση της είναι η:

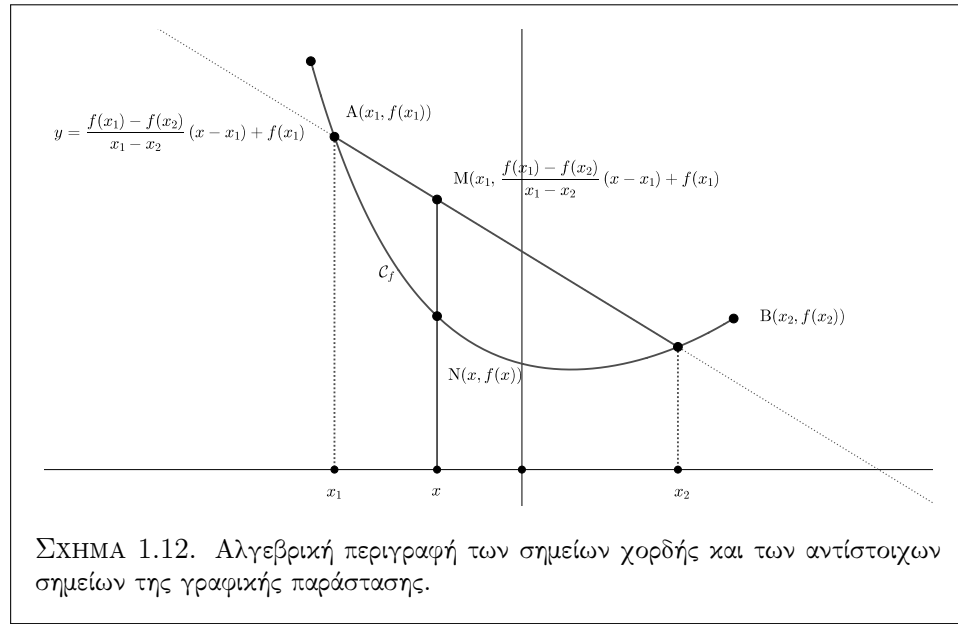
$$y = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) \quad (1.4)$$

Το τυχόν σημείο $N(x, f(x))$ του τόξου AB της C_f είναι κάτω από το αντίστοιχο σημείο της χορδής αν η τεταγμένη του $f(x)$ είναι μικρότερη από την τεταγμένη του αντίστοιχου σημείου της AB . Δηλαδή αν ισχύει η συνθήκη

$$\text{Αν } x_1 < x < x_2 \text{ τότε } f(x) < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) \quad (1.5)$$

Ας διατυπώσουμε και αποδείξουμε την συνθήκη (1.5).

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 11. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ και x_1, x_2 σημεία του Δ με $x_1 < x_2$. Τότε κάθε σημείο $M(x, y)$ της χορδής με άκρα $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ έχει τεταγμένη μεγαλύτερη από το αντίστοιχο σημείο $N(x, f(x))$ της C_f .



ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όπως είδαμε στα προηγούμενα αρκεί $f(x) < y$ όπου

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1).$$

Ισδύναμα θέλουμε

$$f(x) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) - f(x_1) < 0$$

για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Θέτουμε

$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) - f(x_1)$$

και έχουμε

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι και η g' είναι γνησίως αύξουσα. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ξ μεταξύ των x_1, x_2 ώστε

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi).$$

Ο ξ είναι ρίζα της g' και λόγω της μονοτονίας της είναι μοναδική. Για $x < \xi$ θα είναι $g'(x) < g'(\xi) = 0$ και για $x > \xi$ θα είναι $g'(x) > 0$. Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της g .

x	x_1	ξ	x_2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Από τον οποίο συνάγεται ότι μεταξύ των x_1 και x_2 η f παίρνει μόνο αρνητικές τιμές πράγμα που αποδεικνύει την ζητούμενη ανισότητα.

ΣΧΟΛΙΟ 2. Από την προηγούμενη μελέτη προκύπτει ότι αν ένα σημείο της C_f έχει τετμημένη εκτός του διαστήματος των x_1, x_2 τότε έχει τεταγμένη μεγαλύτερη από το αντίστοιχο σημείο του φορέα της χορδής και επομένως βρίσκεται πάνω από αυτό. Επομένως η ευθεία που συνδέει δύο σημεία της C_f δεν μπορεί να περιέχει και τρίτο σημείο της. Επομένως η γραφική παράσταση μιας κυρτής συνάρτησης δεν μπορεί να περιέχει τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία. Φυσικά το αυτό ισχύει και όταν η συνάρτηση είναι κοίλη. Στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 18 αποδεικνύεται το αντίστροφο.

Η μορφή της συνθήκης (1.5) είναι σχετικά δύσχρηστη. Ωστόσο μπορούμε να της δώσουμε μια πιο εύχρηστη ισοδύναμη μορφή αν αλλάξουμε κάπως τον συμβολισμό κάνοντας κάποιες μετατροπές: Στην πραγματικότητα αυτό που θέλουμε είναι αν πάρουμε $x_1 < x < x_2$ η τιμή της f στον «μεσαίο» αριθμό να είναι μικρότερη από την τιμή της συνάρτησης της ευθείας που ορίζουν τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες τα x_1, x_2 . Αν κάνουμε την αλλαγή συμβολισμού:

Όπου x_1 αφήσουμε το x_1
 Όπου x βάλουμε το x_2
 Όπου x_2 βάλουμε το x_3

θέλουμε:

$$f(x_2) < \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} (x_2 - x_1) + f(x_1) \quad (1.6)$$

ή ισοδύναμα:

$$\text{Αν } x_1 < x_2 < x_3 \text{ τότε } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \quad (1.7)$$

Η παραπάνω σχέση μας πληροφορεί ότι υπάρχει μια ανισότητα μεταξύ συντελεστών διευθύνσεως. Αν στην γραφική παράσταση της f πάρουμε σημεία

$A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), \Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τότε ο συντελεστής διευσθύνσεως του τμήματος AB είναι μικρότερος από τον συντελεστή διευσθύνσεως του τμήματος $A\Gamma$. Συμβολικά:

$$\text{Αν } x_1 < x_2 < x_3, A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), \Gamma(x_3, f(x_3)) \text{ τότε } \lambda_{AB} < \lambda_{A\Gamma} \quad (1.8)$$

Αλλά η σχέση (1.6) εκτός από την (1.8) όπως προκύπτει με εύκολες πράξεις είναι ισοδύναμη με την

$$\text{Αν } x_1 < x_2 < x_3 \text{ τότε } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (1.9)$$

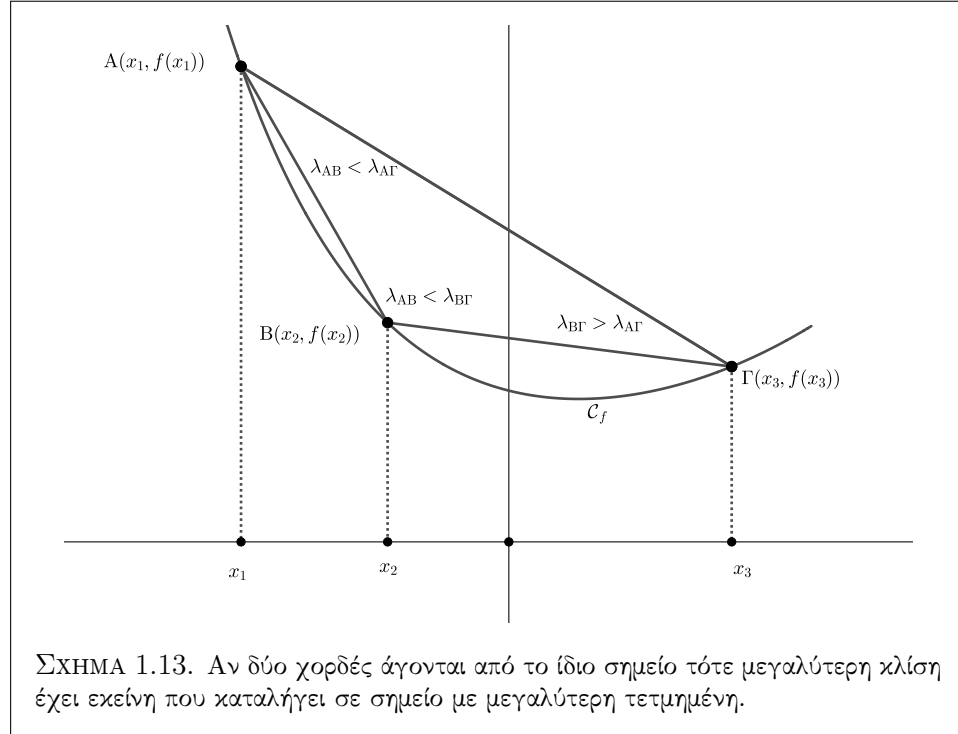
που μεταφράζεται στην $\lambda_{AB} < \lambda_{B\Gamma}$. Επίσης η (1.6) είναι ισοδύναμη και με την

$$\text{Αν } x_1 < x_2 < x_3 \text{ τότε } \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (1.10)$$

που μας λέει ότι $\lambda_{A\Gamma} < \lambda_{B\Gamma}$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στην:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 12. Αν δύο χορδές της γραφικής παράστασης μιας κυρτής συνάρτησης, άγονται από το ίδιο σημείο τότε μεγαλύτερη κλίση έχει εκείνη που καταλήγει σε σημείο με μεγαλύτερη τετμημένη.



ΣΧΟΛΙΟ 3. * Οι προηγούμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες με την

Αν $x_1 < x_2 < x_3$ τότε $x_1 f(x_2) + x_2 f(x_3) + x_3 f(x_1) - x_2 f(x_1) - x_3 f(x_2) - x_1 f(x_3) > 0$

που με την βοήθεια των οριζουσών γράφεται:

$$\text{Αν } x_1 < x_2 < x_3 \text{ τότε } \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad (1.11)$$

που μας λέει ότι όταν διατρέχουμε την περίμετρο ενός τριγώνου που έχει τις κορυφές του στην γραφική παράσταση της συνάρτησης κινούμενοι από το σημείο με τη μικρότερη τετμημένη σε εκείνο με την αμέσως μεγαλύτερη διαγράφουμε το τρίγωνο κατά την θετική φορά του επιπέδου.

Η παρακάτω ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ αναφέρεται στην περίπτωση χορδών που δεν έχουν κατ' αναγκήν κοινό άκρο.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 13. Αν f είναι μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη στο Δ και x_1, x_2, y_1, y_2 είναι σημεία του Δ με

$$x_1 \geq x_2, y_1 \geq y_2, x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$$

τότε

$$\frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} \geq \frac{f(x_2) - f(y_2)}{x_2 - y_2}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν είναι $x_1 > x_2$ τότε

$$\frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} > \frac{f(x_2) - f(y_1)}{x_2 - y_1} \geq \frac{f(x_2) - f(y_2)}{x_2 - y_2}.$$

Όμοια και για την περίπτωση όπου $y_1 > y_2$. Τέλος αν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$ η αποδεικτέα ισχύει σαν ισότητα. Ο.Ε.Δ.

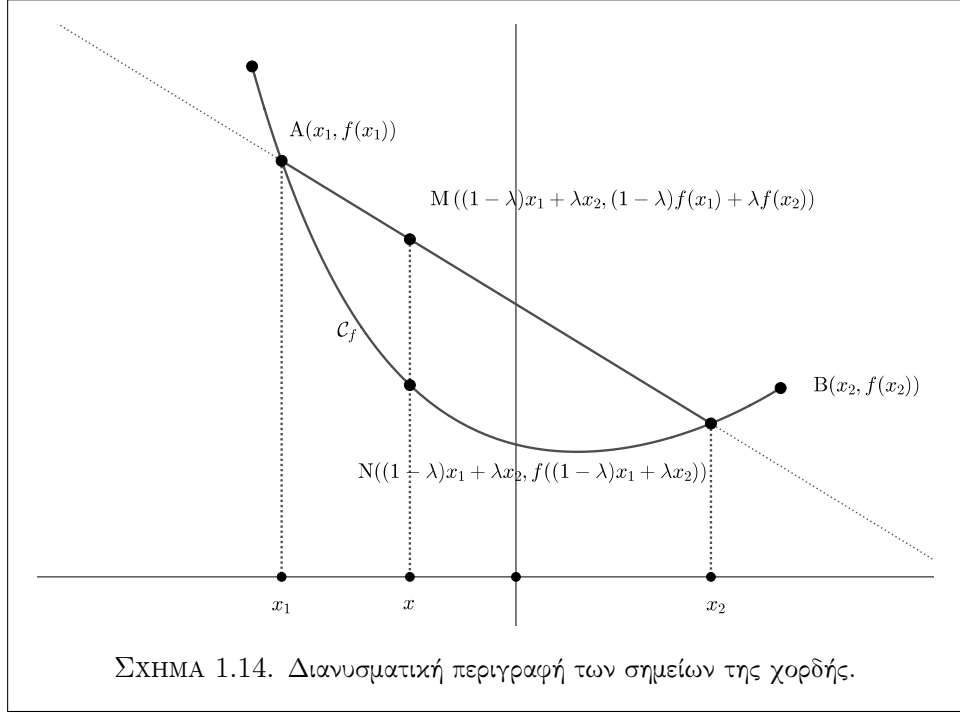
Οι συνθήκες (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.11) είναι όλες ισοδύναμες και ισχύουν αφού αποδείξαμε την πρώτη. Διατυπώνουμε δύο ακόμη ισοδύναμες συνθήκες.

Μπορούμε να περιγράψουμε το σημείο M της χορδής AB διαφορετικά: Το σημείο M είναι μεταξύ των A και B (σχήμα 1.14) αν και μόνο αν υπάρχει αριθμός λ (δεν υποδηλώνει συντελεστή διευσθύνσεως) με $0 < \lambda < 1$ ώστε

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

Αν την σχέση αυτή την γράψουμε με συντεταγμένες (με x_M, y_M δηλώνουμε τις συντεταγμένες του M) θα έχουμε

$$(x_M - x_1, y_M - f(x_1)) = \lambda (x_2 - x_1, f(x_2) - f(x_1)),$$



δηλαδή:

$$x_M - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), \quad y_M - f(x_1) = \lambda(f(x_2) - f(x_1)),$$

από τις οποίες έχουμε:

$$x_M = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, \quad y_M = (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Επομένως αυτό που θέλουμε είναι:

$$\text{Αν } 0 < \lambda < 1 \text{ τότε } f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (1.12)$$

Η ανισότητα (1.12) ονομάζεται ανισότητα του Jensen και ισχύει αφού είναι ισοδύναμη με την (1.5). Ωστόσο μπορούμε να δώσουμε και μία αυτοτελή απόδειξη:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 14. Αν f είναι μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα Δ και x_1, x_2 είναι στοιχεία του Δ με $x_1 \neq x_2$ τότε για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- Το $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ είναι μεταξύ των x_1, x_2 και επομένως ανήκει στο Δ
- $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα ότι $x_1 < x_2$.

Για το πρώτο σκέλος πρέπει να δείξουμε ότι:

$$x_1 < (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2 < x_2$$

που ισοδυναμεί με τις

$$\lambda x_1 < \lambda x_2 \text{ και } (1 - \lambda)x_1 < (1 - \lambda)x_2$$

Για το δεύτερο σκέλος έχουμε:

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) - (1 - \lambda)f(x_1) - \lambda f(x_2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \lambda + \lambda)f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) - (1 - \lambda)f(x_1) - \lambda f(x_2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \lambda)(f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) - f(x_1)) + \lambda(f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) - f(x_2)) < 0$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα

$$[x_1, (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2], [(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, x_2]$$

έχουμε ισοδύναμα:

$$(1 - \lambda)((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 - x_1)f'(\xi_1) + \lambda((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 - x_2)f'(\xi_2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \lambda)\lambda(x_2 - x_1)f'(\xi_1) - (1 - \lambda)\lambda f'(\xi_1)(x_2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(1 - \lambda)}_{+} \underbrace{\lambda}_{+} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{+} \underbrace{(f'(\xi_1) - f'(\xi_2))}_{-} < 0,$$

που ισχύει. Λάβαμε υπ' όψιν ότι $\xi_1 < \xi_2$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Αποδείξαμε ότι αν η f είναι κυρτή ισχύει η συνθήκη (1.5). Μπορούμε να αποδείξουμε και το αντίστροφο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 15. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο Δ , παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ και για κάθε x_1, x_2, x_3 εσωτερικά σημεία του Δ με $x_1 < x_2 < x_3$ ισχύει:

$$f(x_2) < \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

Τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Πρέπει να αποδείξουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. Αν για συντομία χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\lambda_{p,q}$ για να δηλώσουμε τον συντελεστή διευθύνσεως του τυχόντος τμήματος με άκρα $(p, f(p))$ και $(q, f(q))$ δηλαδή τον αριθμό

$$\lambda_{p,q} = \frac{f(p) - f(q)}{p - q},$$

η υπόθεση μας λέει ότι (βλ και σελ. 26) αν $x_1 < x_2 < x_3$ τότε $\lambda_{x_1,x_2} < \lambda_{x_2,x_3}$.

Θεωρούμε εσωτερικά σημεία του Δ , p, q με $p < q$. Θα δείξουμε ότι $f'(p) < f'(q)$. Θεωρούμε αριθμούς $a < b < c$ με $p < a < b < c < q$. Θεωρούμε τα σημεία P, A, B, C, Q της C_f με τετμημένες p, a, b, c, q .

Για κάθε θετικό αριθμό h τέτοιο ώστε να ισχύει $p + h < a$ και $q - h > c$ θεωρούμε και τα σημεία M, N της C_f με τετμημένες $p + h, q - h$ (Βλ. σχήμα 1.15). Ισχύει:

$$p < p + h < a < b < c < q - h, q$$

και επομένως Θα έχουμε:

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lambda_{PM} < \lambda_{MA} < \lambda_{AB} < \lambda_{BC} < \lambda_{CN} < \lambda_{NQ} = \frac{f(q-h) - f(q)}{-h}$$

Από αυτές τις ανισότητες μας ενδιαφέρουν οι

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} < \lambda_{AB} < \lambda_{BC} < \frac{f(q-h) - f(q)}{-h}$$

Παίρνοντας όρια για $h \rightarrow 0$ έχουμε

$$f'(p) \leq \lambda_{AB} < \lambda_{BC} \leq f'(q)$$

Άρα $f'(p) < f'(q)$ και επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα και η f είναι κυρτή. Μπορούμε να ενοποιήσουμε τις ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ $\diamond 11, 15$ σε μία υιοθετώντας κάπως διαφορετική αλλά χρήσιμη διατύπωση:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 16$. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του. Οι εξής προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Η f είναι κυρτή.
2. Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ υπάρχουν α, β ώστε για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ να ισχύει $f(x) \leq \alpha x + \beta$ και το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = x_1$ και $x = x_2$.

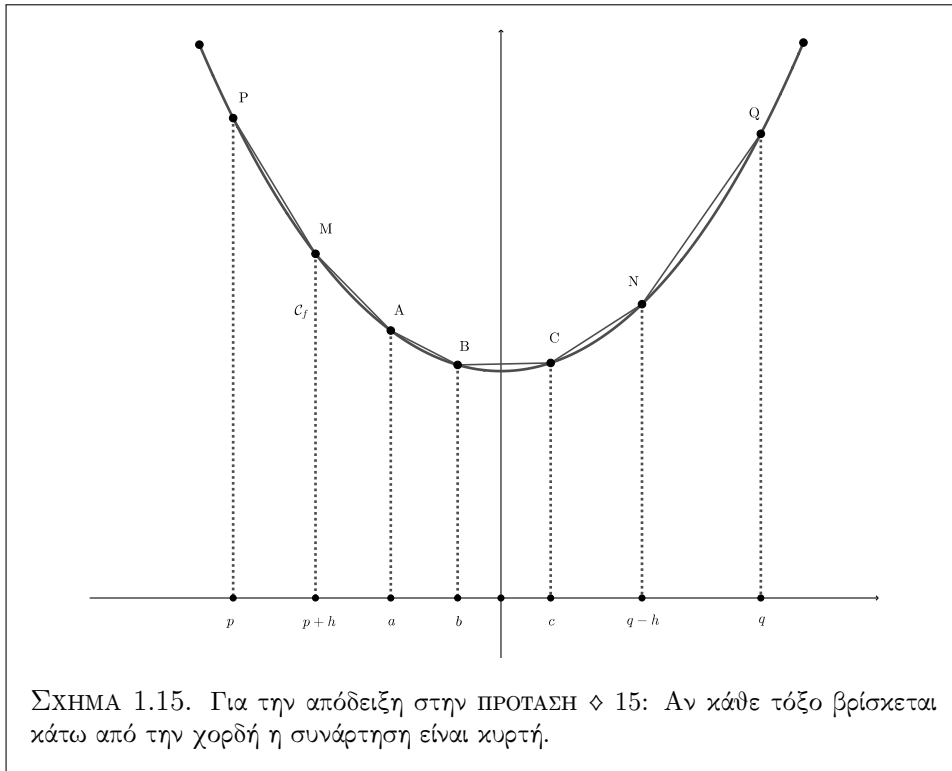
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι η χορδή με άκρα τα σημεία $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Ο.Ε.Δ.

Από τα προηγούμενα φάνηκε ότι αν ισχύει η ανισότητα του Jensen για μία συνάρτηση η συνάρτηση είναι κυρτή. Ας δώσουμε μία ακριβέστερη διατύπωση της σχετικής πρότασης και μία απόδειξη της.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 17$. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του. Αν για κάθε ζεύγος στοιχείων x_1, x_2 του Δ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

τότε η f είναι κυρτή.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω

$$\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \beta = f(x_1) - \alpha x_1$$

Για $x \in (x_1, x_2)$ ονομάζουμε $\lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Είναι $\lambda \in (0, 1)$. Από την υπόθεση έχουμε

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (*)$$

Αλλά $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 = x$ και $(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) = \alpha x + \beta$. Άρα η $(*)$ δίνει ότι για $x \in (x_1, x_2)$ είναι

$$f(x) < \alpha x + \beta$$

ενώ για $x = x_1$ ή $x = x_2$ ισχύει $f(x) = \alpha x + \beta$. Επομένως η f είναι κυρτή από την ΠΡΟΤΑΣΗ ♦ 16. Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 4. Η γνήσια ανισότητα στην πρόταση 17 είναι ουσιώδης για να είναι η f κυρτή σύμφωνα πάντα με τον ορισμό κυρτότητας που ακολουθούμε δηλαδή εκείνον του σχολικού βιβλίου. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι για μια συνάρτηση (όχι κατ' ανάγκην παραγωγίσιμη) ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ισχύει

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (*)$$

για όλα τα x_1, x_2 από το Δ και όλα τα $\lambda \in [0, 1]$ αλλά για ένα ζεύγος στοιχείων $x_1 = a < x_2 = b$ του Δ και ένα $\lambda = m \in (0, 1)$ η $(*)$ ισχύει σαν ισότητα δηλαδή

$$f((1-m)a + mb) = (1-m)f(a) + mf(b).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι με

$$c = (1-m)a + mb \quad (\#).$$

το c ανήκει στο (a, b) και το σημείο $C(c, f(c))$ είναι εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(a, f(a)), B(b, f(b))$.

Ας θεωρήσουμε $u \in (a, c)$. Είναι $c \in (u, b)$ και επομένως για κατάλληλο $t \in (0, 1)$ είναι

$$c = (1-t)u + tb \quad (\#\#).$$

Συνδυάζοντας τις $(\#), (\#\#)$ βρίσκουμε ότι:

$$u = \frac{1-m}{1-t}a + \frac{m-t}{1-t}b \quad (\#\#\#).$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $m < 1$ και ότι $0 < \frac{1-m}{1-t} < 1$ και ότι $\frac{m-t}{1-t} = 1 - \frac{1-m}{1-t}$. Επομένως εφαρμόζοντας την $(*)$ στις $(\#\#), ((\#\#\#))$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} f(c) &\leq (1-t)f(u) + tf(b) \leq \\ (1-t) \left(\left(\frac{1-m}{1-t} \right) f(a) + \frac{m-t}{1-t} f(b) \right) + tf(b) &= \\ (1-m)f(a) + mf(b) &= f(c). \end{aligned}$$

Επομένως $f(c) = (1-t)f(u) + tf(b)$ και τα σημεία $C, B, U(u, f(u))$ είναι συνευθειακά. Επομένως το $U(u, f(u))$ ανήκει στο τμήμα AB . Στο ίδιο συμπέρασμα, όμοια, καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $u \in (c, b)$. Επομένως το τμήμα AB ανήκει εξ' ολοκλήρου στην $\mathcal{C}_f$.

Συμπεραίνουμε δε ότι αν στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 17$ η ανισότητα δεν είναι γνήσια τότε η f δεν είναι κυρτή.

Παρακάτω έχουμε μια επέκταση του ΣΧΟΛΙΟΥ 2 (βλ. και [16] σελ. 97 Ασκ. 115).

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 18$. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $\Delta = [\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του. Αν τρία οποιαδήποτε διάφορα σημεία της $\mathcal{C}_f$ δεν είναι συνευθειακά τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ δύο σημεία της $\mathcal{C}_f$ με $x_1 < x_2$. Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν σημεία της $\mathcal{C}_f$ με τετμημένες στο διάστημα $[x_1, x_2]$ τα οποία να βρίσκονται εκατέρωθεν της χορδής AB . Πράγματι αν αυτό συνέβαινε και ήταν τα σημεία $P(p, f(p))$ πάνω από την

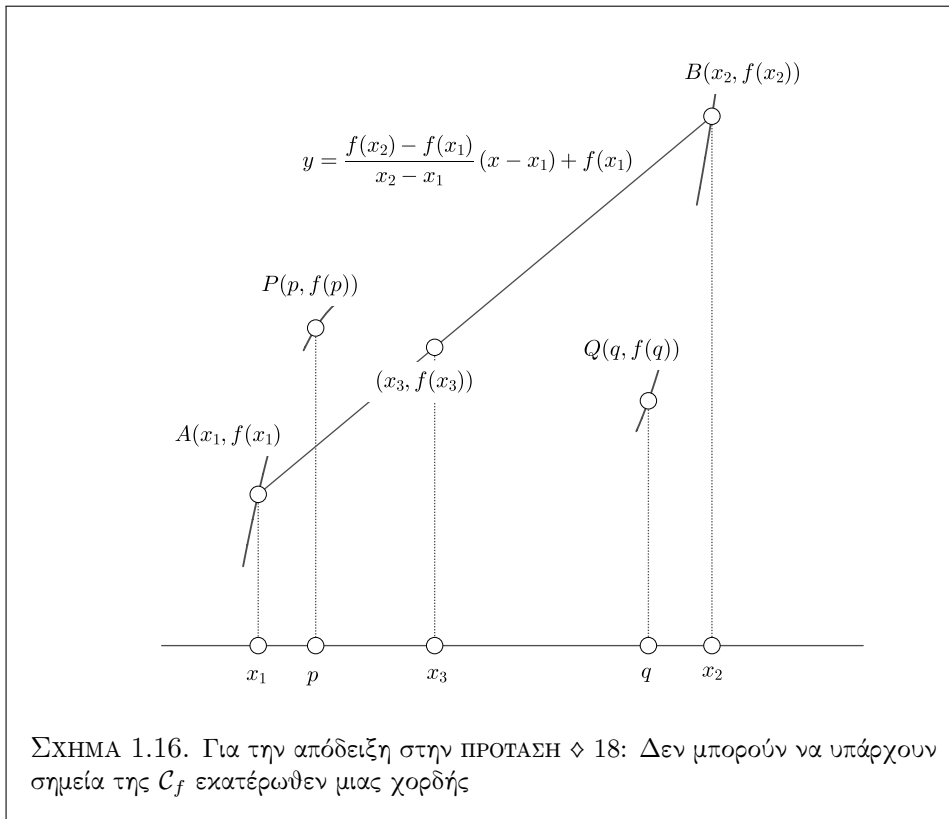
χορδή και $Q(q, f(q))$ κάτω από την χορδή με $p, q \in [x_1, x_2]$ (ΣΧΗΜΑ 1.16) επειδή η εξίσωση της ευθείας AB είναι

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1),$$

θα ήταν

$$f(p) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (p - x_1) + f(x_1), \quad f(q) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (q - x_1) + f(x_1).$$

Επομένως η συνεχής συνάρτηση



$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1) \right)$$

παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα του διαστήματος με άκρα τα p, q και από το θεώρημα Bolzano έχει ρίζα μεταξύ των p και q που είναι κάποιος αριθμός $x_3 \in (x_1, x_2)$. Αλλά τότε το σημείο $(x_3, f(x_3))$ που είναι διαφορετικό από τα A, B ανήκει στην ίδια ευθεία με αυτά (άτοπο).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δοθείσης τυχούσας χορδής με άκρα $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ ή όλα τα σημεία της C_f με τετμημένη στο (x_1, x_2) βρίσκονται κάτω από την AB ή όλα πάνω από την AB .

Θεωρούμε την χορδή AB με άκρα $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$. Θα δείξουμε ότι αν τα σημεία της C_f με τετμημένη στο (α, β) βρίσκονται κάτω από την χορδή το αυτό ισχύει για όλες τις άλλες χορδές και επομένως η f είναι κυρτή. Όμοια αν βρίσκονται πάνω τότε η f θα είναι κοίλη. Έστω λοιπόν μια οποιαδήποτε άλλη χορδή με άκρα $K(\kappa, f(\kappa))$, $\Lambda(\lambda, f(\lambda))$ όπου $\alpha \leq \kappa < \lambda \leq \beta$ χωρίς φυσικά να ισχύουν και τα δύο «ίσον». Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1) $\alpha < \kappa < \lambda < \beta$ Επιχειρηματολογούμε με απαγωγή στο άτοπο υποθέτοντας ότι κάποιο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f δεν βρίσκεται κάτω από την χορδή $K\Lambda$. Το M δε μπορεί να βρίσκεται επί της χορδής διότι τότε θα είχαμε τρία διάφορα συνευθειακά σημεία της C_f τα K , Λ , M που αντίκειται στην υπόθεση επομένως θα βρίσκεται πάνω από την χορδή (ΣΧΗΜΑ 1.17). Τότε επειδή δεν μπορεί να υπάρχουν σημεία της C_f εκατέρωθεν της χορδής, όλα τα σημεία της C_f με τετμημένη στο (κ, λ) βρίσκονται πάνω από την χορδή. Ας συμβολίσουμε με λ_{AK} , $\lambda_{K\Lambda}$, $\lambda_{\Lambda B}$ τους συντελεστές διευσθύνσεως των ευθειών AK , $K\Lambda$, ΛB . Αυτοί είναι ανά δύο διάφοροι αλλιώς η C_f θα είχε τρία συνευθειακά σημεία. Δείχνουμε ότι αποκλείεται $\lambda_{AK} > \lambda_{K\Lambda} > \lambda_{\Lambda B}$. Πράγματι σε μια τέτοια περίπτωση θα ήταν

$$\begin{aligned}\lambda_{AK} &= \frac{f(\kappa) - f(\alpha)}{\kappa - \alpha} > \lambda_{\Lambda B}, \\ \lambda_{K\Lambda} &= \frac{f(\lambda) - f(\kappa)}{\lambda - \kappa} > \lambda_{\Lambda B}, \\ \frac{f(\beta) - f(\lambda)}{\beta - \lambda} &= \lambda_{\Lambda B}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$f(\kappa) - f(\alpha) > \lambda_{\Lambda B}(\kappa - \alpha), \quad f(\lambda) - f(\kappa) > \lambda_{\Lambda B}(\lambda - \kappa), \quad f(\beta) - f(\lambda) = \lambda_{\Lambda B}(\beta - \lambda).$$

Προσθέτοντας βρίσκουμε ότι για τον συντελεστή διευσθύνσεως λ_{AB} της AB ισχύει $\lambda_{AB} > \lambda_{\Lambda B}$. Αλλά αφού το Λ βρίσκεται κάτω από την AB είναι $f(\lambda) < \lambda_{AB}(\lambda - \beta) + f(\beta)$ που μας δίνει την $f(\lambda) - f(\beta) < \lambda_{AB}(\lambda - \beta)$ και αφού $\lambda - \beta < 0$ την $\lambda_{AB} > \lambda_{\Lambda B}$ (άτοπο). Άρα κάποια από τις $\lambda_{AK} < \lambda_{K\Lambda}$ ή $\lambda_{K\Lambda} < \lambda_{\Lambda B}$ θα ισχύει.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1α $\lambda_{AK} < \lambda_{K\Lambda}$ Θα δείξουμε ότι για κατάλληλο $h > 0$ η ευθεία

$$y = \lambda_{K\Lambda}(x - \kappa) + f(\kappa) + h,$$

που είναι παράλληλη με την χορδή $K\Lambda$ και βρίσκεται πάνω από αυτήν τέμνει την C_f τουλάχιστον σε τρία διαφορετικά σημεία. Ισοδύναμα η συνάρτηση

$$g(x) = \lambda_{K\Lambda}(x - \kappa) + f(\kappa) + h - f(x),$$

να έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ρίζες.

Ας ονομάσουμε w τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$t(x) = f(x) - \lambda_{K\Lambda}(x - \kappa) - f(\kappa),$$

στο $[\kappa, \lambda]$ η οποία προφανώς είναι θετικός αριθμός και επιτυγχάνεται σε κάποιο $\mu \in (\kappa, \lambda)$. Αν κατ' αρχάς επιλέξουμε το $h > 0$ να είναι μικρότερο του w τότε για την $g(x)$ δηλαδή την $g(x) = h - t(x)$ είναι

$$g(\kappa) = g(\lambda) = h > 0, \quad g(\mu) = h - w < 0,$$

επομένως η g έχει δύο διάφορες ρίζες στο (κ, λ) . Επίσης

$$g(\alpha) = (\lambda_{AK} - \lambda_{K\Lambda})(\kappa - \alpha) + h,$$

Είναι $g(\alpha) < 0$ αν και μόνο αν $h < (\lambda_{K\Lambda} - \lambda_{AK})(\kappa - \alpha)$. Επομένως αν τελικά επιλέξουμε τον θετικό h να είναι μικρότερος και από τους δύο θετικούς αριθμούς w και $(\lambda_{K\Lambda} - \lambda_{AK})(\kappa - \alpha)$ θα έχουμε εξασφαλίσει ότι η g έχει τρεις ρίζες πράγμα που μας οδηγεί στο επιθυμητό άτοπο.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1β $\lambda_{K\Lambda} < \lambda_{\Lambda B}$ Αντιμετωπίζεται όμοια με την ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1α.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2) $\alpha = \kappa < \lambda < \beta$ Τα A, K συμπίπτουν και θα είναι $\lambda_{A\Lambda} < \lambda_{\Lambda B}$. Εργαζόμαστε όπως στην ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1) παίρνοντας την

$$g(x) = \lambda_{A\Lambda}(x - \alpha) + f(\alpha) + h - f(x).$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3) $\alpha \leq \kappa < \lambda = \beta$ Παρόμοια με την προηγούμενη.

Ο.Ε.Δ.

Αναφέρουμε τώρα μια πρόταση ισχυρότερη από την ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 15$ η οποία δίνει το ίδιο συμπέρασμα με ασθενέστερη υπόθεση ([16] σελ. 73 Πρ. 88, [61] σελ. 57 ασκ. 19-1):

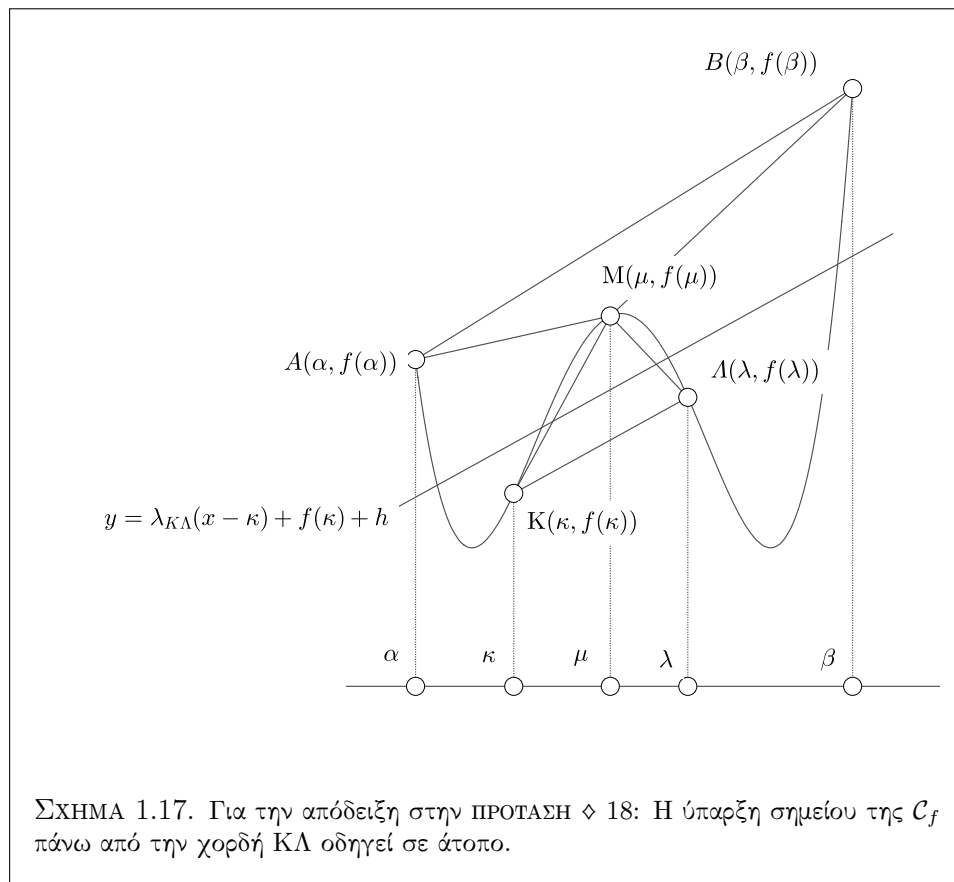
ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 19$. * Έστω ότι η f είναι συνεχής στο Δ , παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ . Αν για κάθε ζεύγος εσωτερικών σημείων x_1, x_3 του Δ με $x_1 < x_3$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_2 με $x_1 < x_2 < x_3$ ώστε:

$$f(x_2) < \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}(x_2 - x_1) + f(x_1),$$

τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Επιχειρηματολογούμε με απαγωγή στο άτοπο. Έστω πως υπάρχουν $x_1 < x_3$ έτσι ώστε για κάποιο x_4 με $x_1 < x_4 < x_3$ να είναι

$$f(x_4) \geq \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}(x_4 - x_1) + f(x_1) \quad (*).$$



Η υπόθεση δεν επιτρέπει τόξα της C_f να είναι ευθύγραμμα τμήματα. Επομένως από το ΣΧΟΛΙΟ 4 συμπεραίνουμε ότι η $(*)$ ισχύει ως γνήσια ανισότητα. Έστω L το σύνολο των στοιχείων x του διαστήματος $[x_1, x_3]$ για τα οποία ισχύει

$$f(x) = \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}(x - x_1) + f(x_1) \quad (**).$$

Ἐστω

$$L_1 = L \cap [x_1, x_4], \quad L_3 = L \cap [x_4, x_3].$$

Τα L_1, L_3 είναι μη κενά αφού το πρώτο περιέχει το x_1 και το δεύτερο το x_3 . Επίσης κανένα δεν περιέχει το x_4 το οποίο είναι άνω φράγμα του πρώτου και κάτω φράγμα του δεύτερου. Έστω

$$x_1^* = \sup L_1, \quad x_3^* = \inf L_3.$$

Είναι:

$$x_1 \leq x_1^* \leq x_4 \leq x_3^* \leq x_3.$$

Θα υπάρχουν ακολουθίες (α_n) , (β_n) στοιχείων των L_1 , L_3 με όρια τα x_1^* , x_3^* . Κάθε α_n και κάθε β_n επαληθεύει την $(**)$ και λόγω συνεχείας το αυτό

θα συμβαίνει και με το όριο τους. Συνεπώς τα x_1^*, x_3^* ανήκουν στα L_1, L_3 αντιστοίχως και επομένως $x_1 \leq x_1^* < x_4 < x_3^* \leq x_3$, και το διάστημα (x_1^*, x_3^*) δεν περιέχει αριθμούς που επαληθεύουν την (*). Αλλά από την υπόθεση θα πρέπει για τα $x_1^* < x_3^*$ να υπάρχει x_2 με $x_1^* < x_2 < x_3^*$ ώστε

$$f(x_2) < \frac{f(x_1^*) - f(x_3^*)}{x_1^* - x_3^*}(x_2 - x_1^*) + f(x_1^*).$$

Επειδή οι ευθείες

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}(x - x_1) + f(x_1), \quad y = \frac{f(x_1^*) - f(x_3^*)}{x_1^* - x_3^*}(x - x_1^*) + f(x_1^*),$$

συμπίπτουν έχουμε ότι

$$f(x_4) > \frac{f(x_1^*) - f(x_3^*)}{x_1^* - x_3^*}(x_4 - x_1^*) + f(x_1^*).$$

Επιχειρηματολογώντας όπως στην αρχή της απόδειξης στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 18 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σημείο της χορδής με άκρα τα $(x_1^*, f(x_1^*))$ και $(x_3^*, f(x_3^*))$ με τετμημένη στο (x_1^*, x_3^*) που ανήκει στην $\mathcal{C}_f$. Αυτό μας οδηγεί στο άτοπο συμπέρασμα ότι υπάρχει αριθμός του (x_1^*, x_3^*) που επαληθεύει την (**). Ο.Ε.Δ.

1.8 Κυρτότητα και πράξεις.

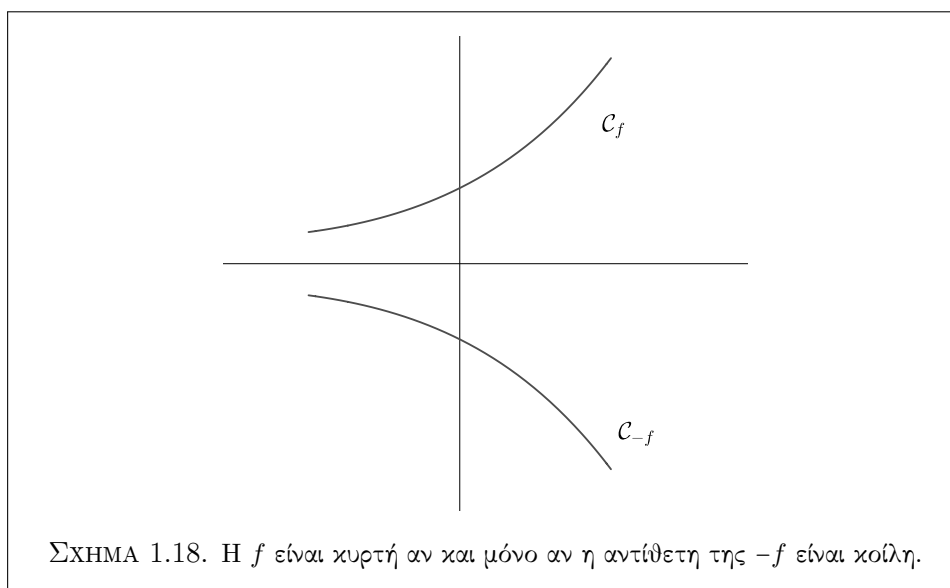
Είδαμε ότι, όπως επεσήμανε και ο Αριστοτέλης για τις καμπύλες, οι έννοιες κυρτή και κοίλη συνάρτηση είναι στενά συνδεδεμένες. Ισχύει το εξής:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 20. Μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ αν και μόνο αν η αντίθετη της $-f$ είναι κοίλη στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ας υποθέσουμε ότι η f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ δηλαδή είναι συνεχής στο Δ , παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία και η παράγωγος είναι γνησίως αύξουσα.

Η αντίθετη της θα είναι επίσης συνεχής στο Δ και όπου παραγωγίζεται η f θα παραγωγίζεται και αυτή και μάλιστα $(-f)' = f'$. Τέλος από τον ορισμό της μονοτονίας έχουμε ότι αν x_1, x_2 είναι εσωτερικά σημεία του Δ θα είναι $f'(x_1) < f'(x_2)$ άρα $-f'(x_1) > -f'(x_2)$ που σημαίνει ότι $(-f)'(x_1) > (-f)'(x_2)$. Άρα η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα και η $-f$ είναι κοίλη. Το αντίστροφο, δηλαδή το ότι αν η $-f$ είναι κοίλη τότε η f είναι κυρτή αποδεικνύεται όμοια. Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 5. Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να αναγάγουμε θέματα που αφορούν σε κοίλες συναρτήσεις σε αντίστοιχα για κυρτές. Ειδικά σε θέματα που αφορούν σε ανισότητες έχουμε αναγωγή παίρνοντας ένα μείον και επομένως αλλάζοντας φορά στην ανίσωση.



Η πρόσθεση συμπεριφέρεται καλά με τις κυρτές συναρτήσεις:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 21. Το άθροισμα δύο κυρτών συναρτήσεων είναι συνάρτηση κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν οι συναρτήσεις f, g είναι κυρτές στο Δ τότε οι παράγωγοι τους f', g' είναι γνησίως αύξουσες άρα για x_1, x_2 από το Δ με $x_1 < x_2$ είναι $f'(x_1) < f'(x_2)$ και $g'(x_1) < g'(x_2)$. Άρα $f'(x_1) + g'(x_1) < f'(x_2) + g'(x_2)$ δηλαδή $(f+g)'(x_1) < (f+g)'(x_2)$ και η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα άρα η $f+g$ είναι κυρτή. Ο.Ε.Δ.

Λόγω του ότι η αντίθετη κυρτής συνάρτησης είναι κοίλη ο πολλαπλασιασμός κυρτής συνάρτησης με αριθμό άλλοτε δίνει κυρτή και άλλοτε κοίλη συνάρτηση ανάλογα με το πρόσημο του αριθμού.

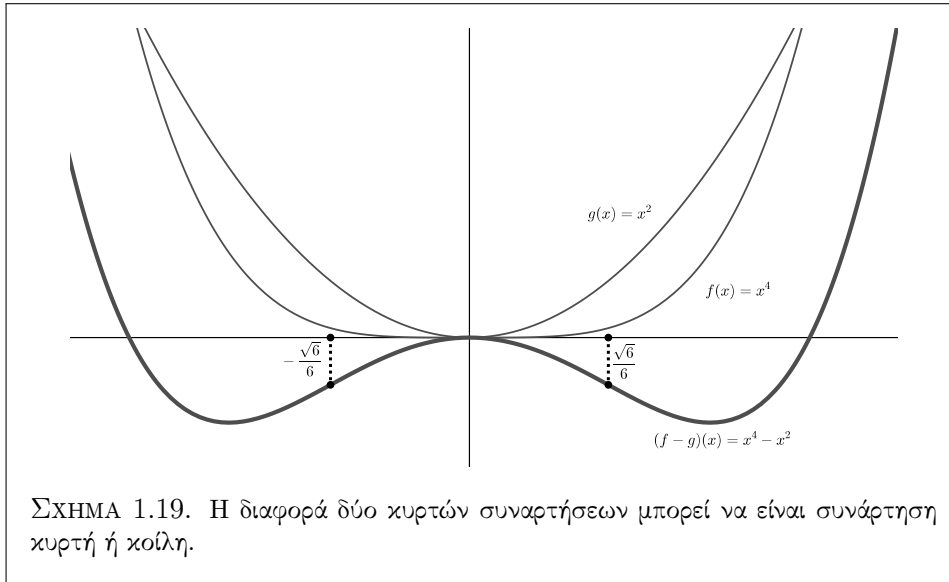
ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 22. Το γινόμενο κυρτής συνάρτησης με μη μηδενικό αριθμό είναι συνάρτηση κυρτή αν ο αριθμός είναι θετικός και κοίλη αν ο αριθμός είναι αρνητικός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν f είναι κυρτή στο Δ , $c > 0$ και x_1, x_2 από το Δ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f'(x_1) < f'(x_2)$ και επομένως $cf'(x_1) < cf'(x_2)$ δηλαδή $(cf)'(x_1) < (cf)'(x_2)$ και η $(cf)'$ είναι γνησίως αύξουσα άρα η cf είναι κυρτή. Αν ήταν $c < 0$ κατά τον πολλαπλασιασμό της $f'(x_1) < f'(x_2)$ με c η ανισότητα θα άλλαζε φορά και θα συμπεραίναμε έτσι ότι η cf είναι κοίλη. Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 6. Η σταθερή συνάρτηση μηδέν όπως και κάθε σταθερή συνάρτηση ή γενικότερα κάθε γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ έχει σταθερή παράγωγο ή οποία δεν είναι γνησίως μονότονη άρα δεν είναι κυρτή ούτε κοίλη.

Για την διαφορά δύο κυρτών συναρτήσεων δεν μπορούμε να έχουμε ένα προκαθορισμένο αποτέλεσμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Οι συναρτήσεις $f(x) = x^4$ και $g(x) = x^2$ είναι κυρτές στο $\mathbb{R}$. Η διαφορά τους $f - g$ είναι κυρτή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}]$ και $[\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty)$ ενώ είναι κοίλη στο διάστημα $[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$.



Για το γινόμενο κυρτών συναρτήσεων δεν μπορούμε να έχουμε κάποιο συμπέρασμα χωρίς άλλες πληροφορίες:

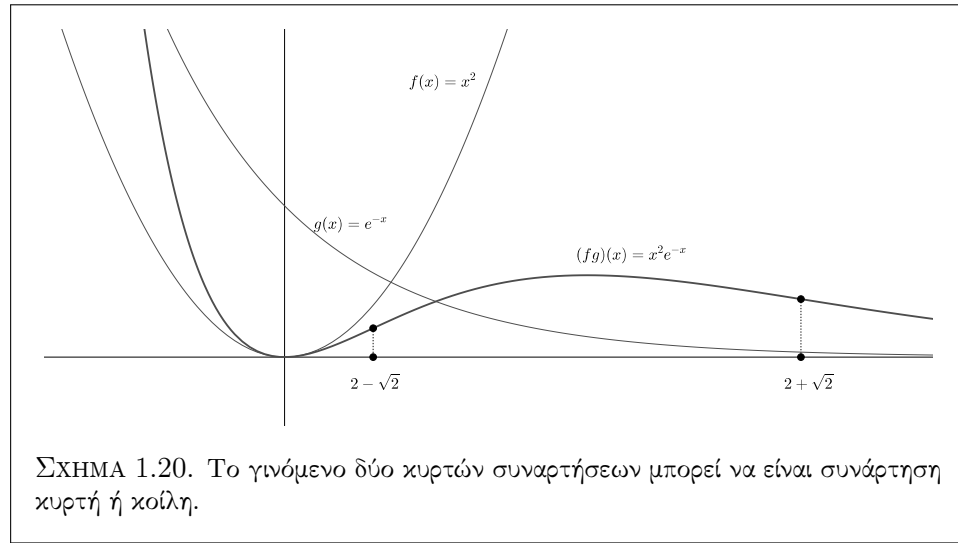
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = e^{-x}$ που είναι κυρτές στο $\mathbb{R}$. Στο διάστημα $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$ το γινόμενο τους είναι κοίλη συνάρτηση ενώ στο διάστημα $[2 + \sqrt{2}, +\infty)$ δίνει κυρτή.

Ας σημειωθεί ότι στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε συγχρόνως ότι το πηλίκο $\frac{x^2}{e^x}$ των κυρτών συναρτήσεων x^2 και e^x σε άλλα διαστήματα είναι κυρτή συνάρτηση και σε άλλα κοίλη. Επομένως δεν μπορούμε να έχουμε ένα κανόνα που να αφορά το πηλίκο συναρτήσεων.

Ξέρουμε ότι η σύνθεση συμπεριφέρεται καλά με τη μονοτονία: Η σύνθεση δύο γνησίως μονοτόνων συναρτήσεων του ίδιου είδους μονοτονίας είναι γνησίως αύξουσα και αντίθετου είδους μονοτονίας είναι γνησίως φθίνουσα. Τα πράγματα δεν είναι το ίδιο καλά με την σύνθεση κυρτών συναρτήσεων. Μπορούμε όμως να έχουμε ένα συμπέρασμα με επιπλέον υποθέσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 23. Αν οι συναρτήσεις f, g ,

- ορίζονται στα ανοικτά διαστήματα Δ_1 και Δ_2 ,



- ισχύει $f(\Delta_1) \subseteq \Delta_2$,
- είναι κυρτές και
- η g είναι γνησίως αύξουσα

τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν $\lambda \in (0, 1)$ και $x < y$ από το Δ_1 έχουμε

$$\begin{aligned} (g \circ f)((1 - \lambda)x + \lambda y) &= g(f((1 - \lambda)x + \lambda y)) \underset{f \text{ κυρτή, } g \uparrow}{<} \\ g(f(x) + \lambda f(y)) &\underset{g \text{ κυρτή}}{\leq} (1 - \lambda)g(f(x)) + \lambda g(f(y)) = \\ &= (1 - \lambda)(g \circ f)(x) + \lambda(g \circ f)(y) \end{aligned}$$

Το αποδεικτέο προκύπτει από εφαρμογή της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond 17$. Ο.Ε.Δ.

Όσον αφορά την αντιστροφή κυρτών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 24$. * Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή και γνησίως μονότονη. Έστω ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα J . Τότε

1. Αν $f \uparrow$ τότε η f^{-1} είναι κοίλη.
2. Αν $f(x) \downarrow$ τότε η f^{-1} είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Λόγω μονοτονίας της f ή θα είναι $f'(x) \geq 0$ για όλα τα x είτε $f'(x) \leq 0$ για όλα τα x . Παρατηρούμε ότι η f' δεν μπορεί να μηδενίζεται στο I διότι τότε αφού είναι γνησίως αύξουσα θα γίνονταν αρνητική σε κάποιο υποδιάστημα του I και θετική σε κάποιο άλλο και η f δεν θα ήταν γνησίως μονότονη. Άρα θα είναι $f'(x) > 0$ για όλα τα x είτε $f'(x) < 0$ για όλα τα x .

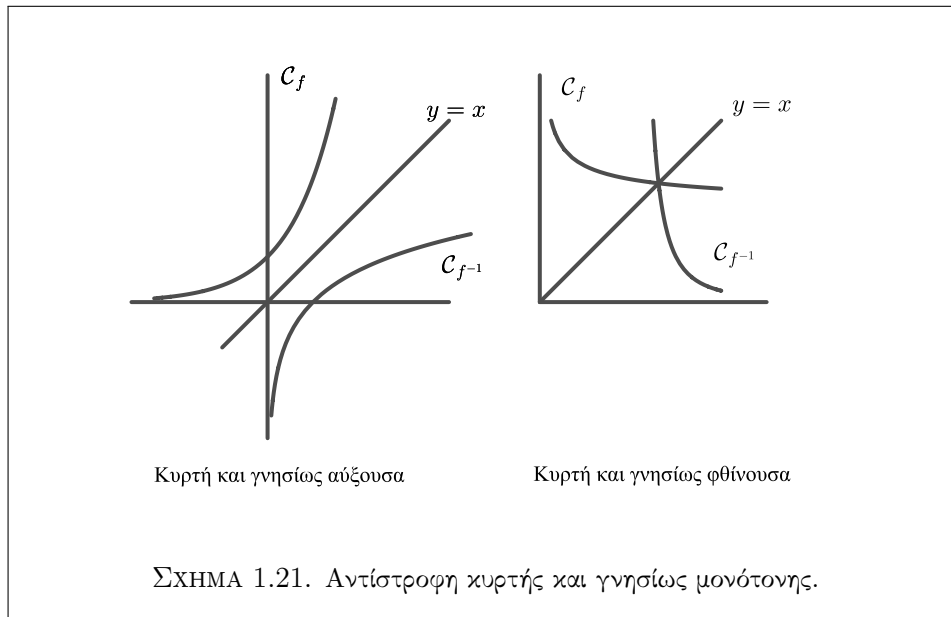
Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σύμφωνα με το οποίο αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα και η παράγωγος της δεν μηδενίζεται τότε και η αντίστροφη συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη. Έτσι αφού για κάθε $x \in I$ ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$ θα είναι $(f^{-1})'(f(x)) f'(x) = 1$ και επομένως

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (*).$$

Έστω $y_1 < y_2$ από το J . Θα είναι $y_1 = f(x_1)$ και $y_2 = f(x_2)$ για κάποια x_1, x_2 από το I για τα οποία, προφανώς, θα είναι $x_1 < x_2$. Τότε $f'(x_1) < f'(x_2)$.

1. Αν η f' παίρνει μόνο θετικές τιμές θα είναι $\frac{1}{f'(x_1)} > \frac{1}{f'(x_2)}$ και λόγω της (*) θα ισχύει $(f^{-1})'(y_1) > (f^{-1})'(y_2)$. Επομένως $(f^{-1})' \downarrow$ και η f^{-1} είναι κοίλη (βλ. και σχήμα 1.21).
2. Αν η f' παίρνει μόνο αρνητικές τιμές θα είναι $\frac{1}{f'(x_1)} < \frac{1}{f'(x_2)}$ και η f^{-1} είναι κυρτή.

Ο.Ε.Δ.



Στα προηγούμενα συσχετίσαμε την κυρτότητα με διμελείς πράξεις συναρτήσεων (πρόσθεση, σύνθεση) ή μονομελείς (αντίθετη συνάρτηση, αντίστροφη συνάρτηση). Στα επόμενα θα συσχετίσουμε την κυρτότητα με τη μονομελή πράξη της μέσης τιμής. Υπενθυμίζεται ότι μέση τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι ο αριθμός

$$\bar{f} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{\beta - \alpha}.$$

Αν τώρα έχουμε το άνω άκρο μεταβλητό μπορούμε να έχουμε την (μεταβλητή) μέση τιμή της f στο διάστημα $[\alpha, x]$. Σχετικά ισχύει το επόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 25. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_{\alpha}^x f(t) dt}{x-\alpha} & , \quad x \in (\alpha, \beta] \\ f(\alpha) & , \quad x = \alpha \end{cases}$$

είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υπάρχουν διάφοροι τρόποι απόδειξης. Θα δώσουμε τρεις⁵.

Α ΤΡΟΠΟΣ. Η f θα είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με γνησίως αύξουσα παράγωγο. Η F είναι προφανώς συνεχής στο $(\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} F(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\int_{\alpha}^x f(t) dt}{x-\alpha} = \lim_{(\frac{0}{0})} \frac{f(x)}{1} = f(\alpha) = F(\alpha).$$

Επομένως η F είναι συνεχής και στο α . Για $x \in (\alpha, \beta)$ έχουμε

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-\alpha) - \int_{\alpha}^x f(t) dt}{(x-\alpha)^2},$$

$$F''(x) = \frac{f'(x)(x-\alpha)^2 - 2(x-\alpha)f(x) + 2\int_{\alpha}^x f(t) dt}{(x-\alpha)^3}.$$

Επειδή η f είναι κυρτή έχουμε ότι για όλα τα $t \in [\alpha, x]$ ισχύει:

$$f(t) \geq f'(x)(t-x) + f(x),$$

και το «ίσον» ισχύει μόνο για $t = x$. Επομένως ολοκληρώνοντας στο $[\alpha, x]$ θα έχουμε:

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt > f'(x) \int_{\alpha}^x (t-x) dt + f(x) \int_{\alpha}^x 1 dt.$$

Από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt > -\frac{1}{2}f'(x)(x-\alpha)^2 + f(x)(x-\alpha),$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι $F''(x) > 0$ και η F είναι κυρτή. Ο.Ε.Δ.

Β ΤΡΟΠΟΣ. Διαπιστώνουμε ότι η F είναι συνεχής. Κατόπιν θεωρούμε $p < q$ από το (α, β) και $\lambda \in (0, 1)$ και θα δείξουμε ότι

$$F((1-\lambda)p + \lambda q) < (1-\lambda)F(p) + \lambda F(q) \quad (*).$$

⁵Μερικοί ακόμη μπορούν να βρεθούν στον σύνδεσμο <https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&t=63555>.

Είναι:

$$\begin{aligned}
 F((1-\lambda)p + \lambda q) &= \frac{\int_{\alpha}^{(1-\lambda)p + \lambda q} f(t) dt}{(1-\lambda)p + \lambda q - \alpha} = \\
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\lambda)p + \lambda q - \alpha}{n} f\left(\alpha + k \frac{(1-\lambda)p + \lambda q - \alpha}{n}\right)}{(1-\lambda)p + \lambda q - \alpha} = \\
 &= \frac{((1-\lambda)p + \lambda q - \alpha) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\alpha + k \frac{(1-\lambda)p + \lambda q - \alpha}{n}\right)}{(1-\lambda)p + \lambda q - \alpha} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left((1-\lambda)\left(\alpha + k \frac{p - \alpha}{n}\right) + \lambda\left(\alpha + k \frac{q - \alpha}{n}\right)\right) \leq_{f \text{ κυρτή}} \\
 &= (1-\lambda) \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p - \alpha}{n} f\left(\alpha + k \frac{p - \alpha}{n}\right)}{p - \alpha} + \lambda \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q - \alpha}{n} f\left(\alpha + k \frac{q - \alpha}{n}\right)}{q - \alpha} = \\
 &= (1-\lambda) \frac{\int_{\alpha}^p f(t) dt}{p - \alpha} + \lambda \frac{\int_{\alpha}^q f(t) dt}{q - \alpha} = (1-\lambda) F(p) + \lambda F(q).
 \end{aligned}$$

Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι $F((1-\lambda)p + \lambda q) \leq (1-\lambda)F(p) + \lambda F(q)$ και όχι το γνήσιο της ανισότητας. Αν υποθεθεί ότι η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα τότε από το ΣΧΟΛΙΟ 4 η C_F στο διάστημα $[p, q]$ θα συμπίπτει με το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ επομένως στο διάστημα αυτό η F θα είναι της μορφής $F(x) = \gamma x + \delta$ δηλαδή θα ισχύει:

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt = (x - \alpha)(\gamma x + \delta),$$

για όλα τα $x \in [p, q]$. Παραγωγίζοντας δύο φορές βρίσκουμε ότι η f' είναι σταθερή και καταλήγουμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι η f δεν είναι κυρτή. Τελικά ισχύει η (*) και από την ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 17$ η F είναι κυρτή.

* Γ ΤΡΟΠΟΣ. Πάλι διαπιστώνουμε ότι η F είναι συνεχής. Όπως στον Α ΤΡΟΠΟ βρίσκουμε

$$F'(x) = \frac{f(x)(x - a) - \int_a^x f(t) dt}{(x - a)^2},$$

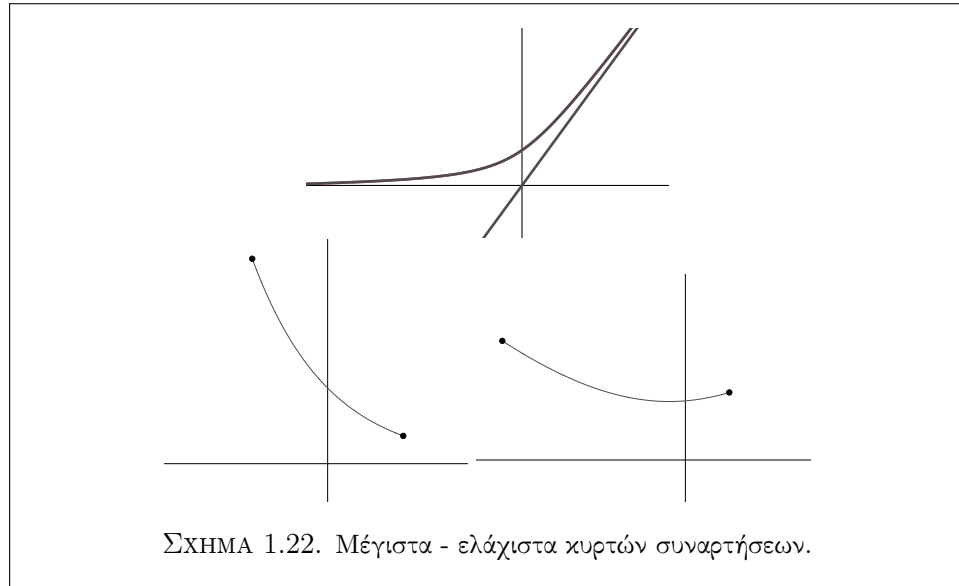
και παρατηρούμε ότι το πηλίκο των παραγώγων των όρων του β' μέλους είναι

$$\frac{(f(x)(x - a) - \int_a^x f(t) dt)'}{((x - a)^2)'} = \frac{f'(x)}{2},$$

δηλαδή μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Άρα και η F' είναι γνησίως αύξουσα από τον κανόνα μονοτονίας τύπου De l' Hospital ([57]). Ο.Ε.Δ.

1.9 Κυρτότητα, μονοτονία και ακρότατα.

Τα σχήματα διαφόρων κυρτών συναρτήσεων μας υποβάλλουν την ιδέα ότι αν έχουν ελάχιστο αυτό θα παρουσιάζεται σε μία μόνο θέση και ότι το μέγιστο αν υπάρχει θα παρουσιάζεται μόνο σε άκρο του διαστήματος που ορίζονται.



ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 26. Έστω μια συνάρτηση f που είναι κυρτή στο διάστημα Δ .

1. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ αυτό θα είναι ελάχιστο και το x_0 θα αποτελεί μοναδική θέση ελαχίστου.
2. Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο σε κάποιο άκρο του Δ τότε είναι γνησίως μονότονη. Συγκεκριμένα γνησίως αύξουσα αν το ελάχιστο παρουσιάζεται σε αριστερό άκρο και γνησίως φθίνουσα αν παρουσιάζεται σε δεξιό άκρο.
3. Αν η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο τότε είναι γνησίως μονότονη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι $f'(x_0) = 0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα (ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 1) έχουμε ότι:

- Για $x \in \Delta$ με $x < x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) = 0$.
- Για $x \in \Delta$ με $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_0] \cap \Delta$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta \cap [x_0, +\infty)$. Άρα για κάθε $x \neq x_0$ θα είναι $f(x) > f(x_0)$ συνεπώς η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και λόγω της επι μέρους μονοτονίας δεν παρουσιάζει αλλού ελάχιστο.

2. Ας υποθέσουμε ότι ο $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι κάτω άκρο του διαστήματος Δ και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο α . Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Για τον σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι στα εσωτερικά σημεία του Δ η παράγωγος f' της f είναι θετική. Πράγματι σε ενάντια περίπτωση για κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 έχουμε ότι $f'(x_0) \leq 0$. Τότε λόγω της μονοτονίας της παραγώγου για $x < x_0$ θα είναι $f'(x) < f'(x_0)$ και επομένως στο (α, x_0) η παράγωγος της f είναι αρνητική και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_0]$. Συνέπεια του τελευταίου είναι το άτοπο συμπέρασμα ότι η f δεν έχει ελάχιστο στο x_0 . Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

3. Αντιμετωπίζεται παρόμοια με το 2.

Ο.Ε.Δ.

Μια κυρτή συνάρτηση μπορεί να έχει ή να μην έχει ακρότατα. Ιδιαίτερος μπορεί να έχει ή να μην έχει ελάχιστο. Παρακάτω θα δούμε ότι η ύπαρξη ή όχι ελαχίστου καθορίζεται από το πρόσημο της παραγώγου στα άκρα του διαστήματος που ορίζεται η συνάρτηση. Στις περιπτώσεις που κάποιο άκρο δεν ανήκει στο διάστημα τότε αντί του προσήμου της παραγώγου παίρνουμε το πρόσημο του ορίου της παραγώγου σε αυτό το άκρο. Η απόδειξη στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 27$ μπορεί να γίνει και χωρίς την υπόθεση ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι συνεχής. Αυτή η υπόθεση χρησιμοποιείται για να αποδειχθεί με «σχολικό» τρόπο η ύπαρξη ορίου στα άκρα του διαστήματος που δουλεύουμε. Ωστόσο η ύπαρξη των ορίων της παραγώγου στα άκρα του διαστήματος στο οποίο ορίζεται μια κυρτή συνάρτηση προκύπτει και μόνο από το γεγονός ότι η παράγωγος είναι γνησίως μονότονη.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 27$. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ και της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής. Έστω u, v το κάτω και το άνω άκρο του Δ αντιστοίχως. Ισχύουν τα εξής:

1. Τα όρια $\lim_{x \rightarrow u} f'(x)$ και $\lim_{x \rightarrow v} f'(x)$ υπάρχουν.
2. $\lim_{x \rightarrow u} f'(x) < \lim_{x \rightarrow v} f'(x)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Η f' είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και ορισμένη σε διάστημα (ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 1$). Το σύνολο τιμών της είναι διάστημα με άκρα τα όρια της στα άκρα του Δ τα οποία αναγκαστικά υπάρχουν.
2. Θεωρούμε εσωτερικά σημεία p, q του Δ με $p < q$. Αφού κοντά στο u είναι $f'(x) < f'(p)$ θα είναι $\lim_{x \rightarrow u} f'(x) \leq f'(p)$. Όμοια συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow v} f'(x) \geq f'(q)$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ανισότητες με την $f'(p) < f'(q)$ έχουμε το αποδεικτέο. Ο.Ε.Δ.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 28$. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ και της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής. Έστω u, v το κάτω και το άνω άκρο του Δ αντιστοίχως.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow u} f'(x) < 0$ και $\lim_{x \rightarrow v} f'(x) > 0$ η f έχει ελάχιστο.
2. Αν $\lim_{x \rightarrow u} f'(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow v} f'(x) > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.
3. Αν $\lim_{x \rightarrow u} f'(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow v} f'(x) = 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Αφού το όριο $\lim_{x \rightarrow u} f'(x)$ είναι αρνητικό θα υπάρχει εσωτερικό σημείο x_1 του Δ ώστε $f'(x_1) < 0$. Αφού $\lim_{x \rightarrow v} f'(x) > 0$ θα υπάρχει x_2 εσωτερικό σημείο του Δ ώστε $x_1 < x_2$ και $f'(x_2) > 0$. Από το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει x_3 μεταξύ των x_1, x_2 τέτοιο ώστε $f'(x_3) = 0$. Το x_3 είναι φυσικά εσωτερικό σημείο του Δ και είναι θέση ελαχίστου της f .
2. Αν για κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ είναι $f'(x_0) \leq 0$ τότε υπάρχει x_1 επίσης εσωτερικό σημείο του Δ ώστε $f'(x_1) < f'(x_0) \leq 0$. Επομένως $\lim_{x \rightarrow u} f'(x) \leq f'(x_1) < 0$ (άτοπο). Άρα σε όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ η παράγωγος είναι θετική και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.
3. Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο όπως του 2. Ο.Ε.Δ.

Είδαμε ότι μία κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ δεν μπορεί να πάρει τη μέγιστη τιμή της σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Παρακάτω έχουμε το αντίστροφο (Βλ. και [32] σελ. 9 για μια γενικότερη πρόταση.):

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 29. Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα Δ . Οι εξής προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Η f είναι κυρτή.
2. Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β και κάθε κλειστό υποδιάστημα J του Δ η συνάρτηση g με $g(x) = f(x) + \alpha x + \beta$ παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της σε άκρο του J και όχι σε εσωτερικό σημείο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ας υποθέσουμε ότι η f είναι κυρτή. Θα είναι συνεχής στο Δ και το αυτό θα ισχύει για οποιαδήποτε $g(x) = f(x) + \alpha x + \beta$. Η παράγωγος της f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ και το αυτό θα ισχύει για την $g'(x) = f'(x) + \alpha$. Επομένως η g θα είναι κυρτή. Φυσικά θα είναι κυρτή και σε κάθε υποδιάστημα J και λόγω της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond$ 26 παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της, σε κάποιο (ενδεχομένως και στα δύο) από τα άκρα του J .

Αντιστρόφως τώρα υποθέτουμε ότι όλες οι $g(x) = f(x) + \alpha x + \beta$ σε όλα τα κλειστά υποδιαστήματα J του Δ παρουσιάζουν τη μέγιστη τιμή στα άκρα των J και όχι σε εσωτερικά σημεία τους. Θεωρούμε $x_1 < x_2$ από το Δ και την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ που διέρχεται από τα $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$. Έστω

$$g(x) = f(x) + (-1)\alpha x + (-1)\beta.$$

Η μέγιστη τιμή της g στο $J = [x_1, x_2]$ παρουσιάζεται σε κάποιο από τα άκρα του. Αλλά $g(x_1) = g(x_2) = 0$ συνεπώς $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και στο (x_1, x_2) ισχύει $f(x) < \alpha x + \beta$. Από την ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 15$ έχουμε ότι η f είναι κυρτή. Ο.Ε.Δ.

Ο συνήθης τρόπος για την αναζήτηση ακροτάτων είναι η αναζήτηση των ριζών της παραγώγου. Ξέρουμε όμως ότι δεν αρκεί η πληροφορία ότι κάπου η παράγωγος μηδενίζεται για να αποφασίσουμε ότι εκεί η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο. Χρειάζονται και άλλοι έλεγχοι. Ωστόσο για τις κυρτές συναρτήσεις τα πράγματα είναι απλούστερα.

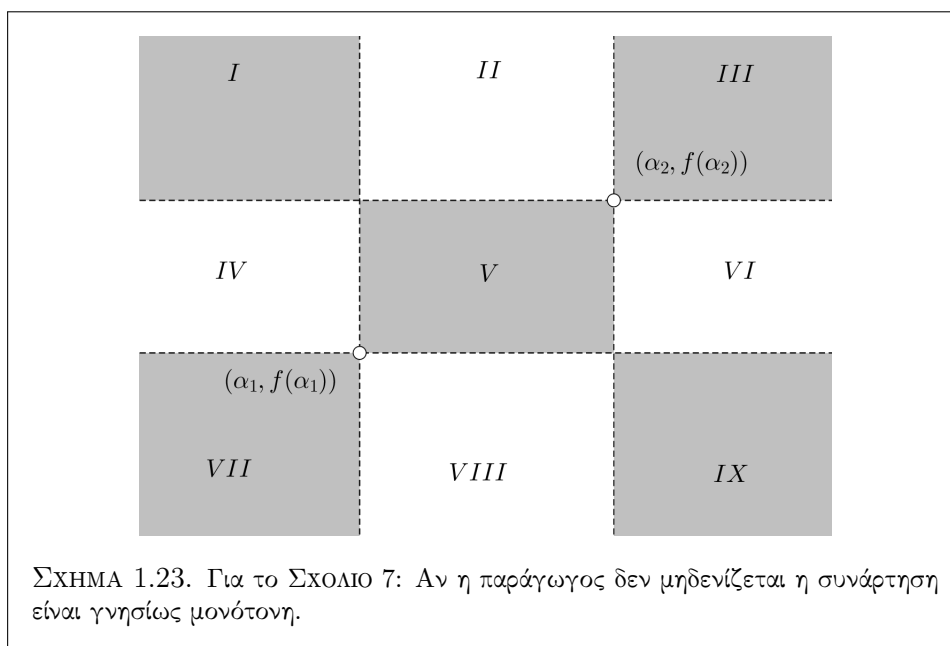
ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 30$. Έστω f μία κυρτή συνάρτηση στο διάστημα Δ . Κάθε ρίζα της παραγώγου της f είναι θέση ελαχίστου της f

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν x_0 είναι η ρίζα της f' τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1. Το x_0 είναι το κάτω άκρο του Δ . Τότε αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της (ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 1$) για τα $x > x_0$ θα είναι $f'(x) > 0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα με ελάχιστο το $f(x_0)$.
2. Το x_0 είναι το άνω άκρο του Δ . Τότε για τα $x < x_0$ θα είναι $f'(x) < 0$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα με ελάχιστο το $f(x_0)$.
3. Το x_0 είναι το εσωτερικό σημείο του Δ . Τότε για τα $x < x_0$ θα είναι $f'(x) < 0$ και για $x > x_0$ θα είναι $f'(x) > 0$. Η f αριστερά του x_0 είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά γνησίως αύξουσα επομένως η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)$.

ΣΧΟΛΙΟ 7. Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να έχουμε ένα αυτόματο τρόπο για να βρούμε το ελάχιστο μιας κυρτής συνάρτησης με πεδίο ορισμού το Δ : Βρίσκουμε την παράγωγο της και κοιτάμε που μηδενίζεται.

- Αν βρούμε μια (μοναδική τιμή) που μηδενίζεται εκεί έχουμε ελάχιστο.
- Αν η παράγωγος (οποιασδήποτε συνάρτησης όχι κατ' ανάγκην κυρτής) δεν μηδενίζεται τότε διατηρεί πρόσημο. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Darboux ωστόσο μπορεί να διαπιστωθεί και αυτοτελώς: Παρατηρούμε ότι το μέγιστο ή το ελάχιστο που παρουσιάζει η f σε κάθε υποδιάστημα του πεδίου ορισμού της θα πρέπει να παρουσιάζεται στα άκρα του διαφορετικά από το θεώρημα του Fermat θα έχουμε μηδενισμό της παραγώγου. Επίσης από το θεώρημα μέσης τιμής η f θα είναι 1 – 1. Αν υποθεθεί ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη θα υπάρχουν $\alpha_1 < \alpha_2$ και $\beta_1 < \beta_2$ ώστε να είναι $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ και $f(\beta_1) > f(\beta_2)$. Ας θεωρήσουμε στο επίπεδο τα σημεία $(\alpha_1, f(\alpha_1))$, $(\alpha_2, f(\alpha_2))$. Κάποιο από τα σημεία $(\beta_1, f(\beta_1))$, $(\beta_2, f(\beta_2))$ είναι διάφορα από αυτά. Ας πούμε το πρώτο. Το σημείο αυτό δηλ. το $(\beta_1, f(\beta_1))$ προφανώς δεν μπορεί να τοποθετηθεί σε καμία από τις ευθείες $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ διότι έχουμε



συνάρτηση αλλά ούτε στις $y = f(\alpha_1)$, $y = f(\alpha_2)$ διότι έχουμε συνάρτηση $1-1$ άρα θα τοποθετηθεί σε κάποια από τις 9 περιοχές του ΣΧΗΜΑΤΟΣ 1.23. Εύκολα βλέπουμε ότι σε όποια περιοχή και αν τοποθετηθεί το $(\beta_1, f(\beta_1))$ με την τοποθέτηση και του $(\beta_2, f(\beta_2))$ θα έχουμε πάντα ένα κλειστό υποδιάστημα στο οποίο η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της f εμφανίζεται στο εσωτερικό του πράγμα που αντιβαίνει στις υποθέσεις μας.

Επομένως εξετάζοντας μία τιμή της μπορούμε να καταλάβουμε αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Στην πρώτη περίπτωση αν το κάτω άκρο του Δ ανήκει σε αυτό εκεί έχουμε ελάχιστο. Στην δεύτερη αν το άνω άκρο του Δ είναι στοιχείο του Δ τότε εκεί έχουμε ελάχιστο.

1.10 Σχετικές θέσεις και εφαπτομένες.

Είδαμε (1.1) ότι οι κύκλοι αποτέλεσαν τα πρώτα σχήματα για την διαμόρφωση της έννοιας κυρτότητας-κοιλότητας. Για το πλήθος των εφαπτομένων που άγονται από δοθέν σημείο σε δοθέντα κύκλο έχουμε πλήρη περιγραφή ανάλογα με την σχέση της απόστασης του σημείου από το κέντρο με την ακτίνα του κύκλου. Επίσης για τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων και το πλήθος των κοινών εφαπτομένων τους έχουμε πλήρη περιγραφή με βάση την σχέση-διακέντρου ακτίνων. Στην ενότητα αυτή θα εξεταστούν μερικά ανάλογα ζητήματα που αναφέρονται κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

1.10.1 Κοινά σημεία

Αν έχουμε μία κυρτή και μία κοίλη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ τότε το δυνατό πλήθος των κοινών σημείων τους είναι το αναμενόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 31. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το Δ συνεχείς στο Δ και παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του τέτοιες ώστε:

1. Η f είναι κυρτή.
2. Η g' είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Τότε οι C_f και C_g έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Ιδιαίτέρως οι γραφικές παραστάσεις μιας κυρτή και μιας κοίλης με πεδίο ορισμού το Δ έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε την συνάρτηση $h = f - g$ η οποία είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του με $h' = f' - g'$. Αν $x_1 < x_2$ από το εσωτερικό του Δ τότε από τις υποθέσεις έχουμε τις

$$f'(x_1) < f'(x_2), \quad g'(x_1) \geq g'(x_2)$$

δηλαδή τις:

$$f'(x_1) < f'(x_2), \quad -g'(x_1) \leq -g'(x_2).$$

Από αυτές προκύπτει ότι $h'(x_1) < h'(x_2)$ δηλαδή η h' είναι γνησίως αύξουσα.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g είναι ρίζες της h . Αν οι C_f και C_g είχαν περισσότερα από δύο κοινά σημεία η h θα είχε τουλάχιστον τρεις ρίζες και από θεώρημα του Rolle η h' θα είχε τουλάχιστον δύο ρίζες πράγμα αδύνατο λόγω της μονοτονίας της h' . Ο.Ε.Δ.

Αν έχουμε δύο κυρτές ή δύο κοίλες συναρτήσεις ο αριθμός των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων τους (σε αντίθεση με την διαίσθηση που έχει καλλιεργηθεί από τις συνήθειες προσλαμβάνουσες από παραβολές, υπερβολές και εκθετικές-λογαριθμικές) μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Έστω $\Delta = \mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις f, g στο Δ με

$$f(x) = x^4 + x^2 \quad g(x) = f(x) + \eta\mu x$$

Για τυχόν x είναι

$$f''(x) = 12x^2 + 2 > 0, \quad g''(x) = 12x^2 + 2 - \eta\mu x > 0,$$

επομένως και οι δύο συναρτήσεις είναι κυρτές. Το πλήθος των κοινών σημείων των C_f και C_g συμπίπτει με το πλήθος των ριζών της $\eta\mu$ στο Δ . Επομένως οι C_f και C_g έχουν άπειρα κοινά σημεία.

ΣΧΟΛΙΟ 8. Στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα το Δ ώστε να περιέχει ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό ριζών της $\eta\mu$ και τότε οι C_f, C_g θα έχουν αυτόν τον αριθμό κοινών σημείων.

Είδαμε ότι οι γραφικές παραστάσεις μιας κυρτής και μιας κοίλης συνάρτησης δεν μπορούν να τέμνονται σε περισσότερα από δύο σημεία. Αν τέμνονται σε ένα μόνο σημείο γενικά δεν συμβαίνει κάτι αντίστοιχο με τους κύκλους δηλαδή να έχουμε σε αυτό το σημείο επαφή των δύο γραφικών παραστάσεων. Αν και δεν θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό του σημείου επαφής δύο γραφικών παραστάσεων: Ένα κοινό σημείο δύο γραφικών παραστάσεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων ονομάζεται *σημείο επαφής* αν οι εφαπτομένες σε αυτό το σημείο συμπίπτουν⁶. Ωστόσο με μία επιπλέον προϋπόθεση η επαφή εξασφαλίζεται: Η γραφική παράσταση της κυρτής να βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της κοίλης. Σχετικά έχουμε το επόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 32. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το Δ συνεχείς στο Δ και παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του τέτοιες ώστε:

1. Η f είναι κυρτή.
2. Η g είναι κοίλη.
3. $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ και το ίσον ισχύει μόνο για ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ .

Τότε οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο $(x_0, f(x_0))$ συμπίπτουν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε την συνάρτηση $h = f - g$ η οποία, όπως εύκολα διαπιστώνεται, έχει γνησίως αύξουσα παράγωγο στο εσωτερικό του Δ . Από την υπόθεση έχουμε ότι ισχύει $h(x) \geq 0$ για όλα τα x και ότι για $x = x_0$ ισχύει το ίσον. Από το θεώρημα του Fermat θα είναι $h'(x_0) = 0$ και επομένως $f'(x_0) = g'(x_0)$. Άρα οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο $(x_0, f(x_0))$ που φυσικά διέρχονται από αυτό έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσεως άρα συμπίπτουν. Ο.Ε.Δ.

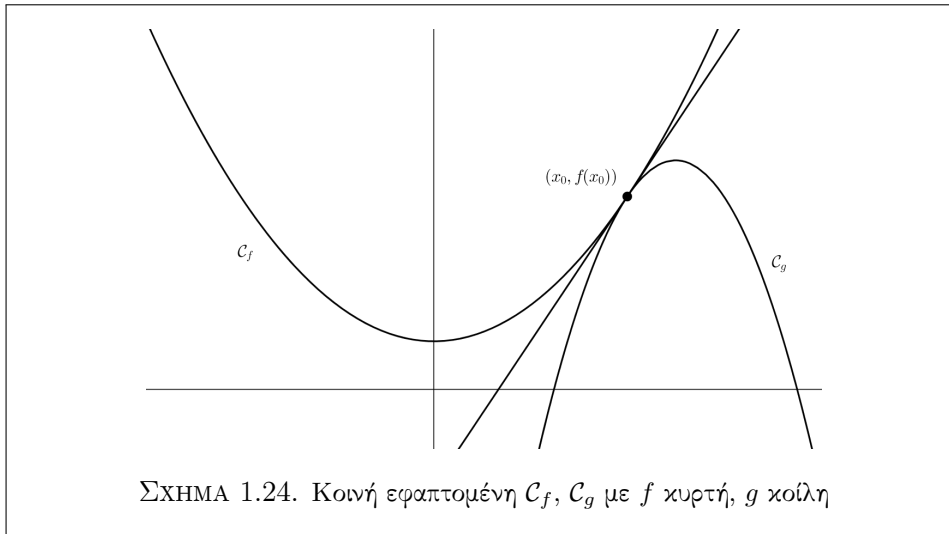
ΣΧΟΛΙΟ 9. Ας σημειωθεί ότι η κοινή εφαπτομένη στις γραφικές παραστάσεις της της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond$ 32 είναι μοναδική.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι για τις γραφικές παραστάσεις δύο κυρτών (ή δύο κοίλων συναρτήσεων) δεν μπορούμε να προκαθορίσουμε τον αριθμό των κοινών σημείων ενώ οι γραφικές παραστάσεις μιας κοίλης και μίας κυρτής συνάρτησης μπορούν να έχουν 0, 1 ή 2 κοινά σημεία.

1.10.2 Εφαπτομένες από σημείο.

Στις κωνικές τομές υπάρχει ένα «εσωτερικό» από τα σημεία το οποίου δεν μπορούν να αχθούν εφαπτομένες στην κωνική και ένα «εξωτερικό», από τα σημεία του οποίου, ενδεχομένως, άγονται (ΣΧΗΜΑ 1.25).

⁶ Ας σημειωθεί ότι ο ορισμός αυτός καλύπτει και την περίπτωση όπου η μία από τις δύο συναρτήσεις είναι ευθεία: Αν μία ευθεία είναι εφαπτομένη στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο M τότε η εφαπτομένη της ευθείας στο M είναι η ίδια η ευθεία.



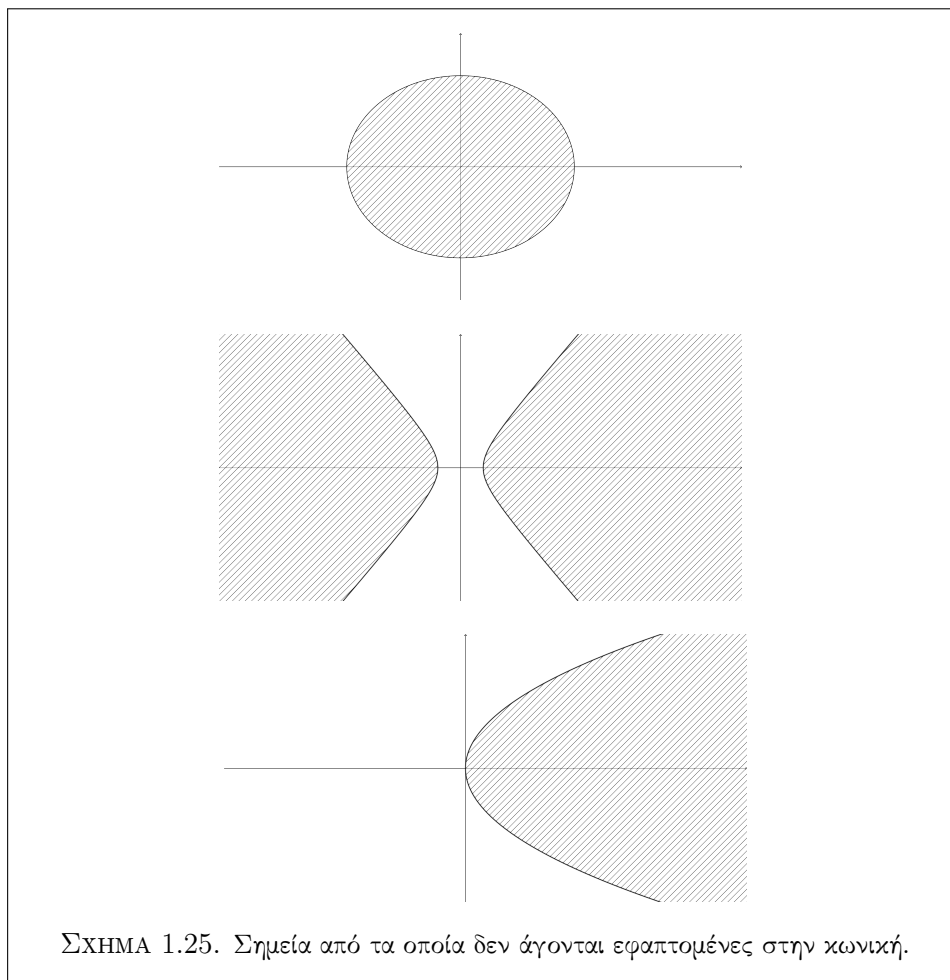
Στις κυρτές συναρτήσεις υπάρχει μια αναλογία με τις κωνικές τομές. Στην περίπτωση μίας κυρτής συνάρτησης τα σημεία από τα οποία δεν μπορούν να αχθούν εφαπτομένες είναι εκείνα που βρίσκονται πάνω από την γραφική της παράσταση (βλ. και 2.2).

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 33. Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ η οποία είναι κυρτή και σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου με $x_0 \in \Delta$.

1. Αν $f(x_0) < y_0$ τότε δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από το (x_0, y_0) .
2. Αν $f(x_0) = y_0$ τότε υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από το (x_0, y_0) .
3. Αν $f(x_0) > y_0$ τότε υπάρχουν το πολύ δύο εφαπτομένες της C_f που να διέρχονται από το (x_0, y_0) .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

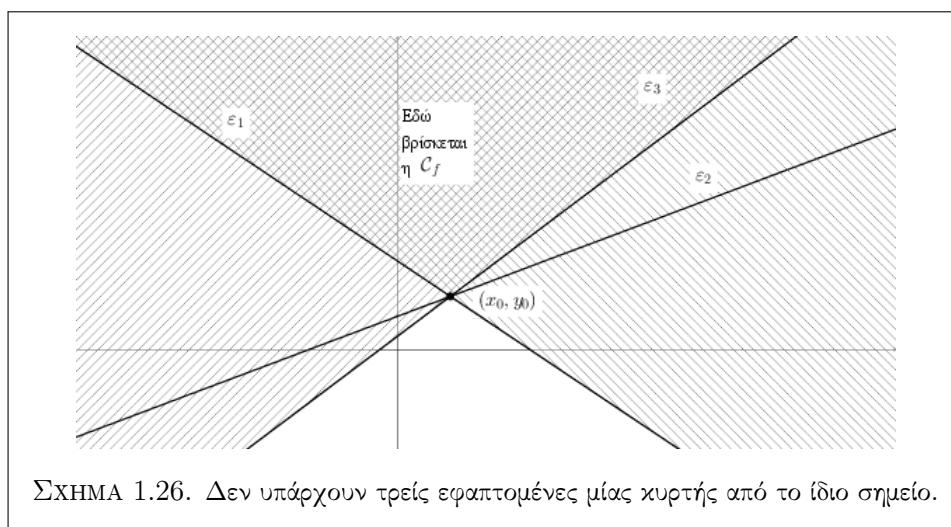
1. Ας υποθέσουμε ότι διέρχεται εφαπτομένη και είναι η ε . Επειδή το (x_0, y_0) δεν είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f το σημείο επαφής θα είναι κάποιο άλλο σημείο ας το πούμε $(t, f(t))$ και λόγω της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond$ 5 κάθε σημείο της C_f διαφορετικό από το $(t, f(t))$ πρέπει να βρίσκεται πάνω από την ε . Αλλά το σημείο $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται κάτω από την ε (άτοπο).
2. Στην περίπτωση αυτή το (x_0, y_0) είναι σημείο της C_f και επομένως ήδη υπάρχει μία εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από αυτό το σημείο: Είναι η εφαπτομένη σε αυτό το σημείο. Ας την πούμε ε . Αν ζ είναι μία εφαπτομένη της C_f σε κάποιο άλλο σημείο της τότε λόγω της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond$



5 το σημείο (x_0, y_0) πρέπει να είναι πάνω από την ζ και επομένως η ζ δεν διέρχεται από αυτό. Άρα η ε είναι η μοναδική εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το (x_0, y_0) .

3. Ας υποθέσουμε ότι από το (x_0, y_0) διέρχονται περισσότερες από δύο εφαπτομένες της C_f . Έστω τρεις από αυτές οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ με αύξοντες συντελεστές διευσθύνσεως $\lambda_{\varepsilon_1} < \lambda_{\varepsilon_2} < \lambda_{\varepsilon_3}$. Τότε από την ΠΡΟΤΑΣΗ 45 κάθε σημείο της C_f πρέπει να βρίσκεται επί η επάνω από την ε_1 και την ε_3 . Το αυτό πρέπει να συμβαίνει και με το σημείο επαφής της ε_2 με την C_f . Αλλά το μόνο σημείο της ε_2 με αυτή την ιδιότητα είναι το (x_0, y_0) που δεν ανήκει στην C_f (άτοπο). Άρα οι εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το (x_0, y_0) δεν μπορούν να είναι περισσότερες από δύο (βλ. και σχήμα 1.26). Ο.Ε.Δ.

Είναι προφανές ότι η ύπαρξη ή μη εφαπτομένων καθώς και το πλήθος τους ε-



ξαρτάται και από το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης: Αν «κόψουμε» μέρος της γραφικής παράστασης μπορεί να «χάσουμε» εφαπτομένες (βλ. σχήμα 1.27). Στα επόμενα θα εξετάσουμε το πλήθος των εφαπτομένων που διέρχονται από ένα σημείο όταν η τετμημένη του σημείου ανήκει στο πεδίο ορισμού μίας κυρτής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα θα εργασθούμε στην περίπτωση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ με συνεχή παράγωγο και κυρτή. Θα αναζητήσουμε δε το πλήθος των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από σημείο (x_0, y_0) με $x_0 \in \Delta$.

Στα επόμενα θα χρειαστούμε το ακόλουθο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 34. Έστω μία συνεχής⁷ και γνησίως μονότονη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ με άκρα $\sigma_1 < \sigma_2$. Τότε τα όρια της g στα σ_1, σ_2 υπάρχουν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Επιχειρηματολογούμε όπως στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 27. Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 10. Η υπόθεση της συνέχειας στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 34 δεν είναι απαραίτητη. Τέθηκε ώστε το αποτέλεσμα να προκύπτει από το σχολικό βιβλίο.

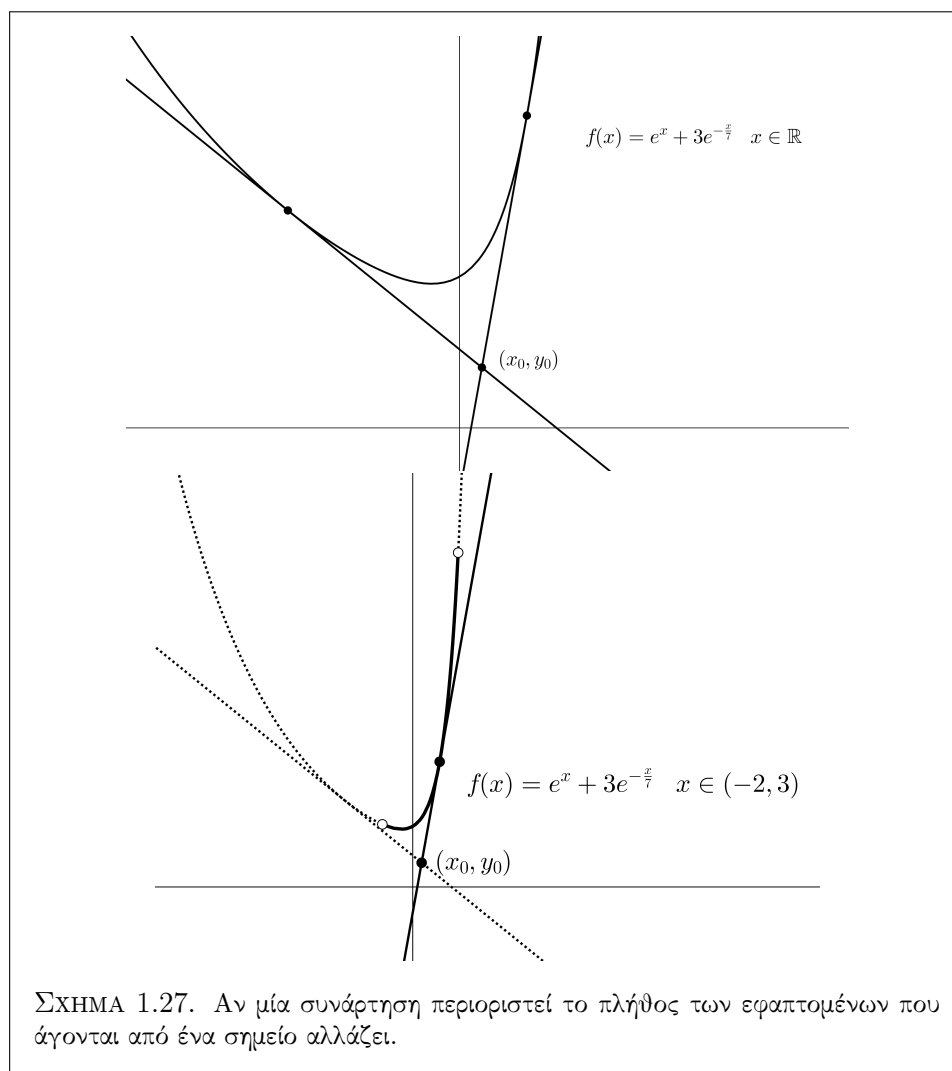
Συνέπεια της στην ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond$ 34 είναι το επόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 35. Έστω μία κυρτή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ με άκρα $\sigma_1 < \sigma_2$ της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής⁸. Τότε τα όρια της f στα σ_1, σ_2 υπάρχουν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η f' είναι γνησίως αύξουσα και επομένως έχει το πολύ μία ρίζα. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

⁷Βλ. και ΣΧΟΛΙΟ 10

⁸Βλ. και ΣΧΟΛΙΟ 11



Περίπτωση 1 Η f' δεν έχει ρίζα στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα $\sigma_1 < \sigma_2$. Τότε, ως συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επομένως η f θα είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Η ύπαρξη ορίων της f στα άκρα του Δ προκύπτει από την ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 34.

Περίπτωση 2 Η f' έχει στο (σ_1, σ_2) ρίζα ρ . Τότε λόγω μονοτονίας η f' στο (σ_1, ρ) είναι αρνητική και στο (ρ, σ_2) είναι θετική. Επομένως αν θεωρήσουμε την συνεχή συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\Delta \cap (-\infty, \rho)$ και $g(x) = f(x)$ για όλα τα x αυτή θα είναι γνησίως φθίνουσα και το όριο της στο κάτω άκρο του πεδίου ορισμού της δηλαδή το σ_1 θα υπάρχει. Άρα και το όριο της f στο σ_1 υπάρχει. Ανάλογα εξασφαλίζεται και η ύπαρξη ορίου της f στο σ_2 . Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 11. Η υπόθεση της συνεχείας της f' στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 35$ τέθηκε για να εξασφαλιστεί ότι αν η f' δεν έχει ρίζα διατηρεί πρόσημο. Αν απομακρυνθούμε από την σχολική ύλη η υπόθεση είναι περιττή αφού η διατήρηση του προσήμου προκύπτει από το θεώρημα του Darboux σύμφωνα με το οποίο η παράγωγος έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής.

Η περίπτωση πεπερασμένου άκρου.

Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου κάποιο από τα άκρα του Δ ας πούμε το κάτω άκρο σ_1 είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο της f στο σ_1 που ούτως ή άλλως υπάρχει δεν μπορεί να είναι στην περίπτωση μας $-\infty$. Αυτό διότι αν επιλέξουμε x_0 εσωτερικό του Δ τότε για όλα τα x ισχύει:

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Το όριο του β' μέλους για $x \rightarrow \sigma_1$ είναι πραγματικός αριθμός επομένως δεν μπορεί το α' μέλος να έχει όριο $-\infty$. Συνεπώς το όριο της f στο σ_1 μπορεί να είναι $+\infty$ ή πραγματικός αριθμός.

$$\text{I)} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = +\infty}$$

Σχετικά ισχύει το επόμενο που αφορά συναρτήσεις που δεν είναι κατ' ανάγκην κυρτές:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 36$. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο, πεδίο ορισμού το $\Delta = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ και σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου με $x_0 \in \Delta$ και $y_0 < f(x_0)$. Αν $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = +\infty$ τότε υπάρχει x_1 με $\sigma_1 < x_1 < x_0$ ώστε η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $(x_1, f(x_1))$ να διέρχεται από το (x_0, y_0) .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όπως πριν ενδιαφερόμαστε για μια ρίζα της συνάρτησης

$$\varphi(t) = f'(t)(x_0 - t) + f(t) - y_0, \quad t \in \Delta$$

στο διάστημα (σ_1, x_0) . Είναι $\varphi(x_0) = f(x_0) - y_0 > 0$. Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι η συνεχής φ παίρνει στο (σ_1, x_0) και μία αρνητική τιμή. Αν ονομάσουμε

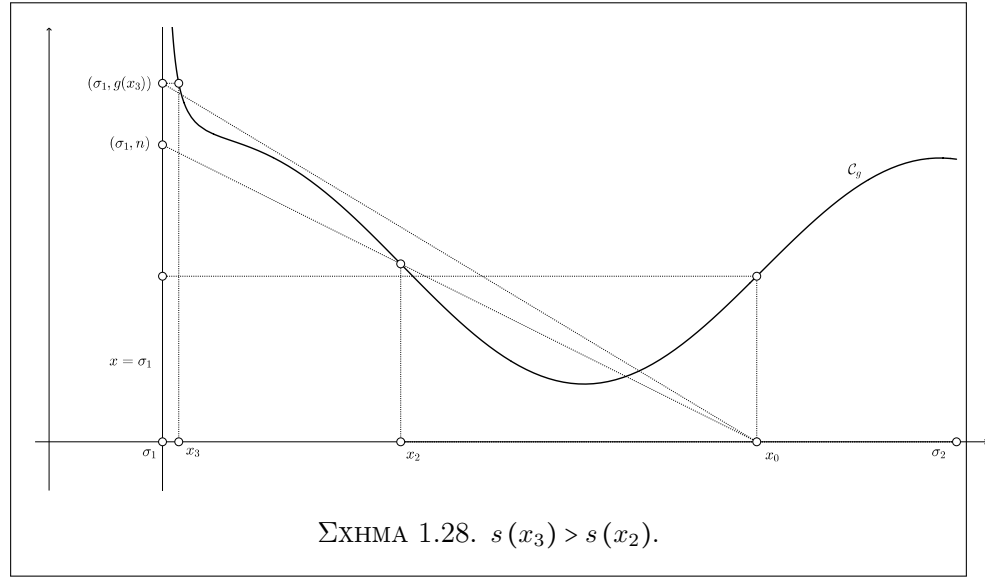
$$g(t) = f(t) - y_0,$$

η g έχει στο σ_1 όριο το $+\infty$ και επίσης στο διάστημα (σ_1, x_0) ισχύει

$$\varphi(t) = g'(t)(x_0 - t) + g(t) = \left(\frac{g(t)}{x_0 - t} \right)' (x_0 - t)^2$$

δηλαδή για $t \in (\sigma_1, x_0)$ είναι

$$\varphi(t) = s'(t)(x_0 - t)^2,$$



όπου

$$s(t) = \frac{g(t)}{x_0 - t}$$

Αφού $\lim_{t \rightarrow \sigma_1} g(t) = +\infty$ θα υπάρχει x_2 με $\sigma_1 < x_2 < x_0$ τέτοιο ώστε $g(x_2) > g(x_0) = f(x_0) - y_0$. Η ευθεία που διέρχεται από τα $(x_0, 0)$ και $(x_2, g(x_2))$ θα τέμνει την ευθεία $x = \sigma_1$ σε σημείο (σ_1, n) με $n > g(x_0)$. Πάλι επειδή η g απειρίζεται στο σ_1 θα υπάρχει x_3 με $\sigma_1 < x_3 < x_2 < x_0$ τέτοιο ώστε $g(x_3) > n$. Τότε (βλ. και σχήμα 1.29):

$$\frac{g(x_3)}{x_0 - x_3} > \frac{g(x_3)}{x_0 - \sigma_1} > \frac{n}{x_0 - \sigma_1} = \frac{g(x_2)}{x_0 - x_2}$$

Επομένως $s(x_3) > s(x_2)$. Αλλά από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει x_1 με $x_3 < x_1 < x_2$ ώστε:

$$\underbrace{s(x_3) - s(x_2)}_{+} = \underbrace{(x_3 - x_2)}_{-} s'(x_1)$$

Θα είναι $s'(x_1)$ και επομένως $\varphi(x_1) < 0$. Η ύπαρξη της ζητούμενης εφαπτομένης έπεται. Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 12. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν στις υποθέσεις της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond 36$ προσθέσουμε και την υπόθεση ότι η f είναι κυρτή τότε η f' θα έχει αναγκαστικά στο σ_1 όριο το $-\infty$. Αρκεί να αποκλείσουμε την περίπτωση να έχει όριο κάποιο πραγματικό αριθμό ℓ . Πράγματι αν υποτεθεί ότι για $x \rightarrow \sigma_1$ είναι $f' \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ τότε θα είναι $f'(x) > \ell$ διαφορετικά λόγω μονοτονίας θα είχαμε

το άτοπο $\ell < \ell$. Τώρα σε κάθε $x < x_0$ αντιστοιχούμε $\xi(x)$ με

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(\xi(x)).$$

Για $x \rightarrow \sigma_1$ το α' μέλος της παραπάνω σχέσης έχει όριο το $-\infty$ επομένως το αυτό ισχύει και για το δεύτερο παράγωγο αδύνατον αφού πρέπει $f'(\xi(x)) > \ell$.

Ανάλογη πρόταση ισχύει και όταν είναι πεπερασμένο το άνω άκρο σ_2 με όμοια απόδειξη:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 37. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο, πεδίο ορισμού το $\Delta = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ και σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου με $x_0 \in \Delta$ και $y_0 < f(x_0)$. Αν $\lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty$ τότε υπάρχει x_1 με $x_0 < x_1 < \sigma_2$ ώστε η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $(x_1, f(x_1))$ να διέρχεται από το (x_0, y_0) .

$$\text{II)} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}}$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για το όριο στο σ_1 της f' .

Η f' έχει στο σ_1 πεπερασμένο όριο. Ας πούμε ότι $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = \alpha$.

Στην περίπτωση αυτή ακόμη και αν η f δεν ορίζεται στο σ_1 μπορούμε να την ορίσουμε θέτοντας $f(\sigma_1) = \ell$ και προφανώς η f θα είναι συνεχής στο σ_1 . Επιπλέον θα είναι και παραγωγίσιμη αφού

$$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} \frac{f(x) - f(\sigma_1)}{x - \sigma_1} = \lim_{\left(\frac{0}{0}\right) x \rightarrow \sigma_1} \frac{f'(x)}{1} = \alpha,$$

και θα εξακολουθεί να είναι κυρτή. Άρα από την αρχή μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι ορισμένη και στο σ_1 και παραγωγίσιμη σε αυτό. Η $\mathcal{C}_f$ έχει εφαπτομένη στο σημείο της (σ_1, ℓ) την ευθεία:

$$y = f'(\sigma_1)(x - \sigma_1) + f(\sigma_1) \quad (*).$$

Κάθε άλλο σημείο $(t, f(t))$ της $\mathcal{C}_f$ διάφορο του (σ_1, ℓ) θα βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο σημείο της εφαπτομένης και επομένως:

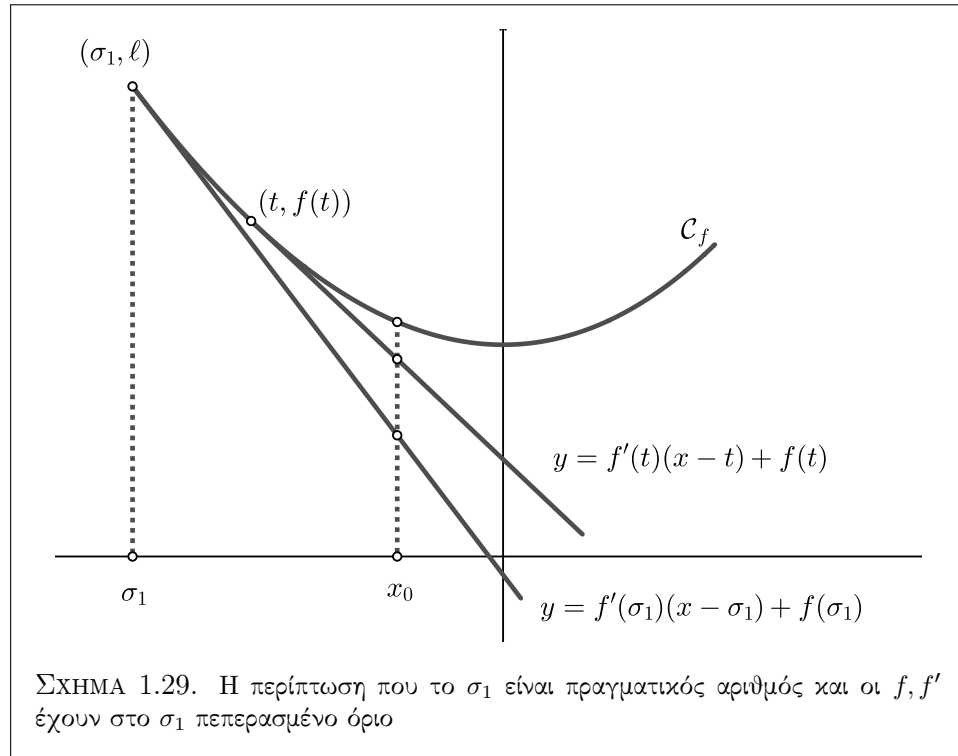
$$f(t) > f'(\sigma_1)(t - \sigma_1) + f(\sigma_1) \quad (**).$$

Έστω τώρα (x_0, y_0) ($x_0 \in \Delta$) ένα σημείο του επιπέδου με τετμημένη στο Δ που βρίσκεται κάτω από την $\mathcal{C}_f$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $(**)$ ισοδυναμεί με την

$$f'(\sigma_1)(x_0 - t) + f(t) > f'(\sigma_1)(x_0 - \sigma_1) + f(\sigma_1).$$

Δεδομένου ότι $f'(t) > f'(\sigma_1)$ για $t < x_0$ έχουμε:

$$f'(t)(x_0 - t) + f(t) > f'(\sigma_1)(x_0 - t) + f(t).$$



Το α' μέλος της παραπάνω σχέσης είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της εφαπτομένης στο $(t, f(t))$ με την ευθεία $x = x_0$ ενώ το β' μέλος η τομή της εφαπτομένης της C_f στο (σ_1, l) με την ίδια ευθεία. Η σχέση δεν μας πληροφορεί ότι το πρώτο σημείο βρίσκεται πάνω από το δεύτερο. Συνεπώς από τα σημεία (x_0, y_0) που βρίσκονται κάτω από την (*) δεν διέρχεται εφαπτομένη της C_f που αντιστοιχεί σε σημείο με τετμημένη μικρότερη του x_0 .

Θα δείξουμε ότι από σημεία (x_0, y_0) που είναι πάνω ή επί της εφαπτομένης (*) και κάτω από την C_f διέρχεται εφαπτομένη σε σημείο $(t, f(t))$ με $\sigma_1 \leq t < x_0$.

Αν το (x_0, y_0) είναι επί της (*) δεν υπάρχει κάτι για να αποδείξουμε. Αν είναι πάνω από την (*) αρκεί να δείξουμε ότι η συνεχής συνάρτηση

$$h(t) = f'(t)(x_0 - t) + f(t) - y_0,$$

έχει ρίζα στο (σ_1, x_0) πράγμα που προκύπτει εύκολα από τις παρατηρήσεις:

- $h(x_0) = f(x_0) - y_0 > 0$
- $h(\sigma_1) = f'(\sigma_1)(x_0 - \sigma_1) + f(\sigma_1) - y_0 < 0$.

Η f' έχει στο σ_1 όριο το $-\infty$ Η περίπτωση αυτή είναι πιο απλή από την προηγούμενη διότι για την συνάρτηση $h(t) = f'(t)(x_0 - t) + f(t) - y_0$, που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως έχουμε ότι

- $h(x_0) = f(x_0) - y_0 > 0$
- $\lim_{t \rightarrow \sigma_1} (f'(t)(x_0 - \sigma_1) + f(\sigma_1) - y_0) = -\infty$

Στην περίπτωση αυτή από κάθε σημείο (x_0, y_0) που βρίσκεται κάτω από την $\mathcal{C}_f$ διέρχεται εφαπτομένη σε σημείο $(t, f(t))$ με $\sigma_1 \leq t < x_0$ χωρίς άλλο περιορισμό.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε την:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 38. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο, πεδίο ορισμού το Δ με κάτω άκρο το $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ και σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ και $y_0 < f(x_0)$. Αν $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ τότε :

1. Αν $\lim_{t \rightarrow \sigma_1} f'(t) = -\infty$ υπάρχει x_1 με $\sigma_1 < x_1 < x_0$ ώστε η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $(x_1, f(x_1))$ να διέρχεται από το (x_0, y_0) .
2. Αν $\lim_{t \rightarrow \sigma_1} f'(t) = \alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει x_1 με $\sigma_1 \leq x_1 < x_0$ ώστε η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $(x_1, f(x_1))$ να διέρχεται από το (x_0, y_0) μόνο αν

$$y_0 \geq \alpha(x_0 - \sigma_1) + \ell.$$

ΣΧΟΛΙΟ 13. Ανάλογη πρόταση ισχύει και για την περίπτωση του άνω άκρου.

Η περίπτωση μη πεπερασμένου άκρου.

Θα δούμε τώρα την περίπτωση όπου $\sigma_1 = -\infty$ και ανάλογα συμπεράσματα θα έχουμε για την περίπτωση όπου $\sigma_2 = +\infty$. Εδώ θα εργασθούμε με κυρτή συνάρτηση f της οποίας η παράγωγος είναι συνεχής. Η f' θα έχει όριο στο $-\infty$ το οποίο θα είναι πραγματικός αριθμός ή $\pm\infty$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα η περίπτωση να είναι το όριο $+\infty$ αποκλείεται. Άρα υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$

Θα εξετάσουμε κάθε περίπτωση χωριστά. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε την πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 39. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Delta = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1 = -\infty$, παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και κυρτή. Έστω σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου με $x_0 \in \Delta$ και $y_0 < f(x_0)$. Αν $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f'(x) = -\infty$ τότε υπάρχει x_1 με $\sigma_1 < x_1 < x_0$ ώστε η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $(x_1, f(x_1))$ να διέρχεται από το (x_0, y_0) .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ θα υπάρχει σημείο x^* του Δ με $x^* < x_0$ ώστε $f'(x^*) < 0$. Για τυχόν x του Δ με $x < x^*$ από το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει $\xi(x)$ με $x < \xi(x) < x^*$ ώστε:

$$f(x) - f(x^*) = f'(\xi(x))(x - x^*)$$

Αλλά $f'(\xi(x)) < f'(x^*)$ επομένως

$$f(x) - f(x^*) > f'(x^*)(x - x^*)$$

και αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x^*)(x - x^*) = +\infty$ θα είναι και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Όπως και στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 36$ θα δείξουμε ότι η συνεχής συνάρτηση

$$\varphi(t) = f'(t)(x_0 - t) + f(t) - y_0, \quad t \in \Delta,$$

η οποία στο x_0 γίνεται θετική έχει ρίζα στο $(-\infty, x_0)$ γράφοντας

$$\varphi(t) = s'(t)(x_0 - t)^2, \quad s(t) = \frac{g(t)}{x_0 - t}, \quad g(t) = f(t) - y_0, \quad t \in (-\infty, x_0),$$

και εξασφαλίζοντας ότι η s' παίρνει μια αρνητική τιμή σε κάποιο σημείο του $(-\infty, x_0)$.

Ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{g(t)}{x_0 - t} \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{g'(t)}{(x_0 - t)'} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (-g'(t)) = +\infty$$

Επομένως επιλέγοντας ένα $x_2 < x_0$ θα υπάρχει $x_3 < x_2$ ώστε $s(x_3) > s(x_2)$. Όπως και στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 36$ το θεώρημα μέσης τιμής μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός x_1 με $x_3 < x_1 < x_2$ ώστε $s'(x_1) < 0$. Ο.Ε.Δ..

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 40$. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Delta = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_2 = +\infty$, παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και κυρτή. Έστω σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου με $x_0 \in \Delta$ και $y_0 < f(x_0)$. Αν $\lim_{x \rightarrow \sigma_2} f'(x) = +\infty$ τότε υπάρχει x_1 με $x_0 < x_1 < \sigma_2$ ώστε η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $(x_1, f(x_1))$ να διέρχεται από το (x_0, y_0) .

Θα δούμε την περίπτωση όπου $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Σχετικά ισχύει το επόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 41$. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Delta = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1 = -\infty$, παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και κυρτή. Έστω σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου με $x_0 \in \Delta$ και $y_0 < f(x_0)$. Αν $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ και $y = \alpha x + \beta$ να είναι (ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 27$) η ασύμπτωτος της f στο $-\infty$ τότε:

1. Αν το σημείο (x_0, y_0) βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ ή επί της ευθείας δεν υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ σε σημείο της $(x_1, f(x_1))$ με $-\infty < x_1 < x_0$ η οποία να διέρχεται από το (x_0, y_0) .
2. Αν το σημείο (x_0, y_0) βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ σε σημείο της $(x_1, f(x_1))$ με $-\infty < x_1 < x_0$ η οποία διέρχεται από το (x_0, y_0) .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $r(x) = f(x) - (\alpha x + \beta)$. Θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} r(x) = 0$ και επειδή (ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 8$) η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ασύμπτωτο θα είναι και $r(x) > 0$ για όλα τα x .

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f'(x) = \alpha$. Αν για κάποιο x^* ήταν $f'(x^*) \leq \alpha$ επιλέγοντας $x^{**} < x^*$ λόγω μονοτονίας της f' έχουμε ότι για όλα τα $x < x^{**}$ θα είναι

$$f'(x) < f'(x^{**}) < f'(x^*) \leq \alpha$$

και παίρνοντας όρια για $x \rightarrow \sigma_1$ θα έχουμε το άτοπο συμπέρασμα ότι

$$\alpha \leq f'(x^{**}) < f'(x^*) \leq \alpha.$$

Επομένως για όλα τα x είναι $f'(x) > \alpha$ άρα $r'(x) > 0$.

Η τυχούσα εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(t, f(t))$ με $t < x_0$ έχει εξίσωση

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

και τέμνει την ευθεία $x = x_0$ σε σημείο με τεταγμένη $f'(t)(x_0 - t) + f(t)$ ενώ η ασύμπτωτος $y = \alpha x + \beta$ τέμνει την ίδια ευθεία σε σημείο με τεταγμένη $\alpha x_0 + \beta$. Ισχύει

$$f'(t)(x_0 - t) + f(t) > \alpha x_0 + \beta,$$

διότι αυτό ισοδυναμεί με την προφανή ανισότητα:

$$\underbrace{(f'(t) - \alpha)}_{+} \underbrace{(x_0 - t)}_{+} + \underbrace{(f(t) - (\alpha t + \beta))}_{+} > 0$$

Επομένως δεν υπάρχει εφαπτομένη σε σημείο $(t, f(t))$ με $t < x_0$ που να διέρχεται από το (x_0, y_0) όταν $y_0 \leq \alpha x_0 + \beta$. Έτσι έχει αποδειχθεί το πρώτο μέρος.

Για το δεύτερο μέρος υποθέτουμε ότι $y_0 > \alpha x_0 + \beta$ και χρησιμοποιούμε, όπως και σε προηγούμενα, την συνάρτηση:

$$\varphi(t) = f'(t)(x_0 - t) + f(t) - y_0$$

η οποία στο x_0 παίρνει θετική τιμή. Για $t < x_0$ είναι:

$$\varphi(t) = \left(\frac{f(t) - y_0}{x_0 - t} \right)' (x_0 - t)^2$$

Θα δείξουμε ότι σε κάποιο $x_1 < x_0$ η $\left(\frac{f(t)-y_0}{x_0-t}\right)'$ και επομένως η $\varphi(t)$ παίρνει αρνητική τιμή και επομένως η $\varphi(t)$ έχει ρίζα μικρότερη του x_0 . Πράγματι αν αυτό δεν ίσχυε θα ήταν $\left(\frac{f(t)-y_0}{x_0-t}\right)' \geq 0$ για όλα τα $t < x_0$. Επομένως η $\frac{f(t)-y_0}{x_0-t}$ θα ήταν αύξουσα στο διάστημα (σ_1, x_0) . Αλλά είναι

$$\lim_{t \rightarrow \sigma_1} \frac{f(t) - y_0}{x_0 - t} = \lim_{t \rightarrow \sigma_1} \frac{f(t) - y_0}{t} \cdot \frac{t}{x_0 - t} = \lim_{t \rightarrow \sigma_1} \left(\frac{f(t)}{t} - \frac{y_0}{t} \right) \frac{t}{x_0 - t} = (\alpha - 0)(-1) = -\alpha$$

και επομένως

$$\frac{f(t) - y_0}{x_0 - t} \geq -\alpha.$$

Δηλαδή για κάθε $t < x_0$ είναι $f(t) - y_0 \geq -\alpha x_0 + \alpha t$ άρα

$$f(t) - (\alpha t + \beta) \geq y_0 - (\alpha x_0 + \beta).$$

Παίρνοντας όρια για $t \rightarrow \sigma_1 = -\infty$ έχουμε το άτοπο συμπέρασμα ότι $0 \geq y_0 - (\alpha x_0 + \beta) > 0$. Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 14. Ανάλογη πρόταση με την ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 41$ ισχύει για το άνω άκρο σ_2 όταν είναι $+\infty$ και το όριο σε αυτό της παραγώγου της f είναι πραγματικός αριθμός α .

Σύνοψη.

Πίνακας 1.1: $\sigma_1 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) =$				
		$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f'(x) =$	$\alpha \in \mathbb{R}$	Αδύνατη περίπτωση	Πάνω από την $y = \alpha(x - \sigma_1) + \ell$	Αδύνατη περίπτωση
	$-\infty$	Αδύνατη περίπτωση	Δεν υπάρχουν περιορισμοί	Δεν υπάρχουν περιορισμοί

Πίνακας 1.2: $\sigma_1 = -\infty$

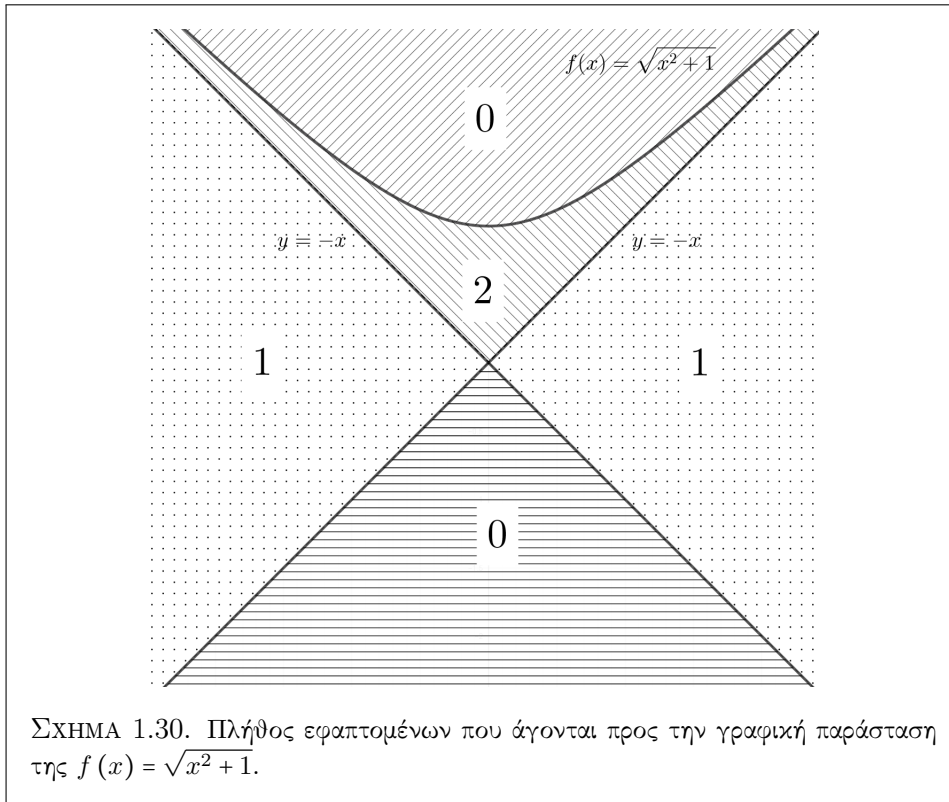
$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) =$				
		$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f'(x) =$	$\alpha \in \mathbb{R}$	Πάνω από την ασύμπτωτο	Πάνω από την ασύμπτωτο	Πάνω από την ασύμπτωτο
	$-\infty$	Αδύνατη περίπτωση	Αδύνατη περίπτωση	Δεν υπάρχουν περιορισμοί

Στον τον ΠΙΝΑΚΑ 1.1 συνοψίζονται οι συνθήκες που είδαμε ώστε από σημείο (x_0, y_0) το οποίο βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση μιας κυρτής

συνάρτησης f με συνεχή παράγωγο, ορισμένης σε διάστημα με κάτω άκρο σ_1 να διέρχεται εφαπτομένη της οποίας το σημείο επαφής έχει τετμημένη μικρότερη του x_0 . Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν με τις προφανείς τροποποιήσεις ισχύουν για κοίλες συναρτήσεις.

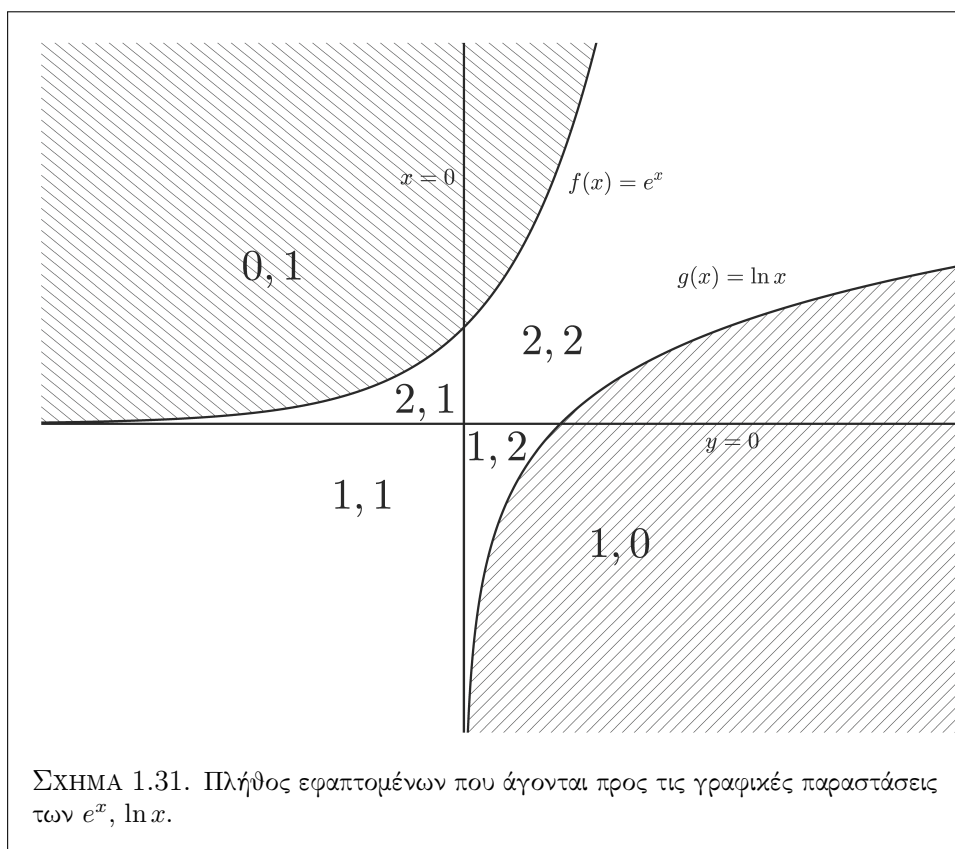
Παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Ως γνωστόν η γραφική παράσταση της είναι κλάδος υπερβολής με ασυμπτώτους τις $y = \pm x$. Το υπόλοιπο του επιπέδου αν εξαιρεθούν οι τρεις αυτές καμπύλες χωρίζεται σε χωρία. Στο σχήμα 1.30 φαίνεται ο αριθμός των εφαπτομένων που μπορούν να αχθούν από ένα σημείο του χωρίου προς την C_f .



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Έστω η κυρτή συνάρτηση $f(x) = e^x$ η κοίλη συνάρτηση $g(x) = \ln x$. Οι C_f , C_g και οι ασύμπτωτοι τους $y = 0$ και $x = 0$ χωρίζουν το επίπεδο σε χωρία. Στο σχήμα 1.31 σημειώνονται τα πλήθη των εφαπτομένων που άγονται στην πρώτη και την δεύτερη γραφική παράσταση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Από τις εξετάσεις του 2006. Δόθηκε το ακόλουθο θέμα του οποίου τα ενδιάμεσα ερωτήματα ήταν υποβοηθητικά για να απαντηθεί το τελευταίο.



Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού τους.
3. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
4. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

Στην ουσία το θέμα ζητούσε να αποδειχθεί ότι υπάρχει κάποιο σημείο της περιοχής με την ένδειξη 2,2 του ΣΧΗΜΑΤΟΣ 1.31 τέτοιο ώστε οι εφαπτόμενες

που άγονται που τη μία γραφική παράσταση να συμπίπτουν με τις εφαπτομένες που άγονται προς την άλλη. Ας διατηρήσουμε τον συμβολισμό του θέματος δηλαδή ας κρατήσουμε το σύμβολο g για την εκθετική συνάρτηση και h για την λογαριθμική. Θέλουμε να μάθουμε πόσες εφαπτομένες της μορφής

$$y = g'(x_1)x + g(x_1) - x_1g'(x_1),$$

της C_g ($(x_1, g(x_1))$ το σημείο επαφής που συμπίπτουν με εφαπτομένες της μορφής

$$y = h'(x_2)x + h(x_2) - x_2h'(x_2),$$

της C_h ($(x_2, h(x_2))$ το σημείο επαφής). Το σημείο αυτό προβληματίσε όχι μόνο τους εξεταζόμενους αλλά και τους βαθμολογητές. Η δυσκολία εντοπίστηκε στο ποια θα μπορούσε να θεωρηθεί ή κατάλληλη επιχειρηματολογία που να εξασφαλίζει το πλήθος των εφαπτομένων. Με βάση όσα έχουν αναφερθεί επειδή η g είναι κυρτή διαφορετικά σημεία επαφής οδηγούν σε διαφορετικές εφαπτομένες επομένως αρκεί να μετρηθούν οι εφαπτομένες της C_g που είναι συγχρόνως και εφαπτομένες της C_h δηλαδή οι εφαπτομένες της C_g που συμπίπτουν με κάποια εφαπτομένη της C_h ή ισοδύναμα να βρεθεί το πλήθος των λύσεων του συστήματος:

$$\begin{aligned} g'(x_1) &= h'(x_2) \\ g(x_1) - x_1g'(x_1) &= h(x_2) - x_2h'(x_2) \end{aligned}$$

Η h είναι κυρτή και επομένως η πρώτη εξίσωση επιλύεται ως προς x_2 κάνοντας χρήση της αντίστροφης της h' ως την πούμε s . Είναι $x_2 = s(g'(x_1))$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση έχουμε:

$$g(x_1) - x_1g'(x_1) = h(s(g'(x_1))) - s(g'(x_1))h'(s(g'(x_1)))$$

ή ισοδύναμα ότι:

$$g(x_1) - x_1g'(x_1) = h(s(g'(x_1))) - s(g'(x_1))g'(x_1)$$

Εδώ

$$g(x) = g'(x) = e^x, \quad h(x) = \ln x, \quad h'(x) = s(x) = \frac{1}{x}$$

και οδηγούμεθα στην εξίσωση:

$$e^{x_1} - x_1e^{x_1} = \ln \frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{x_1}}e^{x_1},$$

που είναι ισοδύναμη με την

$$e^{x_1}(1 - x) = -x_1 - 1,$$

που το πλήθος των ριζών της είναι το πλήθος των ριζών της συνάρτησης f του παραπάνω θέματος.

ΣΧΟΛΙΟ 15. Η παραπάνω προσέγγιση όπως φάνηκε εφαρμόζεται και σε άλλα ζεύγη συναρτήσεων των οποίων ζητούμε το πλήθος των κοινών εφαπτομένων ή και τις ίδιες τις κοινές εφαπτομένες.

1.11 Σημεία καμπής.

1.11.1 Σημεία καμπής. Γενικά.

Ένα σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης λέγεται σημείο καμπής⁹ αν εκατέρωθεν του σημείου η συνάρτηση παρουσιάζει διαφορετικό είδος κυρτότητας δηλαδή είναι κοίλη-κυρτή ή κυρτή-κοίλη. Το σχολικό βιβλίο ορίζει το σημείο καμπής ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

ΣΧΟΛΙΟ 16. Στον ορισμό δεν απαιτείται η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και τίθεται ως υπόθεση απλώς να έχει εφαπτομένη για να περιλαμβάνεται και η περίπτωση που στο $A(x_0, f(x_0))$ υπάρχει κατακόρυφη εφαπτομένη. Με την εξαίρεση από την εξεταστέα ύλη της κατακόρυφης εφαπτομένης ο ορισμός αναφέρεται, πλέον, σε συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο (α, β) .

ΣΧΟΛΙΟ 17. Από τον ορισμό είναι προφανές ότι απαιτείται η f να είναι κυρτή (αντιστοίχως: κοίλη) σε ένα «ολόκληρο» διάστημα με άνω άκρο το x_0 και κοίλη (αντιστοίχως: κυρτή) σε ένα «ολόκληρο» διάστημα με κάτω άκρο το x_0 . Στην περίπτωση που η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη θα πρέπει η f'' να είναι μεγαλύτερη ή ίση από το 0 σε όλα τα σημεία του ενός διαστήματος και μικρότερη ή ίση από το 0 σε όλα τα σημεία του άλλου. Η δε ισότητα της δεύτερης παραγώγου με το μηδέν να συμβαίνει σε «λίγα» σημεία) το σύνολο τους να μην περιέχει διάστημα (βλ. ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 3).

Το θέωρημα του σχολικού βιβλίου που αμέσως έπεται του ορισμού του σημείου καμπής μπορεί να αποδειχθεί ως άσκηση της οποίας η λύση έχει ομοιότητες με την απόδειξη του θεωρήματος του Fermat.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 42. Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Α' Τρόπος Εργαζόμαστε σύμφωνα με τον ορισμό σε ένα διάστημα (α, β) με $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αφού η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 θα είναι είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη (x_0, β) ή το αντίστροφο. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το

⁹ Διάφοροι συγγραφείς χρησιμοποιούν διαφορετικό ορισμό αλλά και ορολογία. Στα Αγγλικά το σημείο καμπής απαντάται ως inflection point, turning point ή flexpoint.

πρώτο. Όμοια είναι η απόδειξη και αν ισχύει το δεύτερο. Ξέρουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0, β) .

Αποδεικνύουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$ (δηλαδή ότι η μονοτονία της f' διατηρείται αν προσθέσουμε στα (α, x_0) , (x_0, β) το άνω και το κάτω άκρο τους αντιστοίχως¹⁰). Θέλουμε για $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$ με $x_1 < x_2$ να ισχύει $f'(x_1) < f'(x_2)$. Επειδή αυτή η ανισότητα είναι εξασφαλισμένη για $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0)$ αυτό που μένει είναι η επαλήθευση της όταν $x_2 = x_0$. Δηλαδή θέλουμε

$$f'(x_1) < f'(x_0) \quad (*).$$

Ας υποθέσουμε ότι το αποδεικτέο δεν ισχύει. Τότε $f'(x_1) \geq f'(x_0)$. Επιλέγουμε ένα αριθμό p με $x_1 < p < x_0$. Τότε λόγω μονοτονίας της f' ισχύει:

$$f'(p) > f'(x_1) \geq f'(x_0)$$

Επιλέγουμε ένα αριθμό r τέτοιο ώστε $f'(x_1) < r < f'(p)$. Για αυτό τον αριθμό θα ισχύει φυσικά και $f'(x_0) < r < f'(p)$. Η f' ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνάγουμε ότι θα υπάρχουν αριθμοί κ, λ με

$$x_1 < \kappa < p < \lambda < x_0$$

τέτοιοι ώστε

$$f'(\kappa) = r = f'(\lambda)$$

πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) . Επομένως πράγματι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Με ανάλογα επιχειρήματα αποδεικνύουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$.

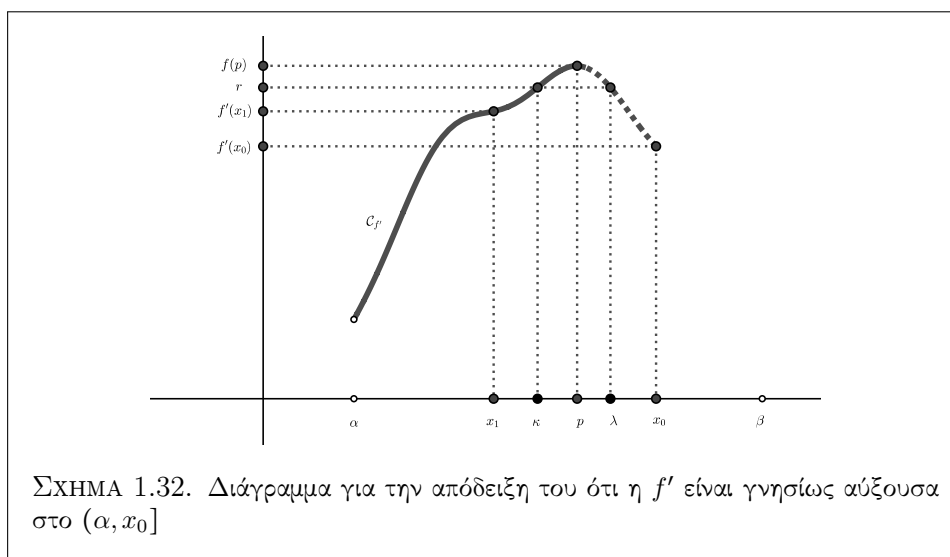
Λόγω της μονοτονίας της f' στα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$ έχουμε ότι

- Αν πάρουμε $x \in (\alpha, x_0)$ θα είναι $f'(x) < f'(x_0)$.
- Αν πάρουμε $x \in (x_0, \beta)$ θα είναι $f'(x) < f'(x_0)$.

Επομένως για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f'(x) \geq f'(x_0)$, η f' έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 και από το θεώρημα του Fermat η παράγωγος της f' μηδενίζεται στο x_0 και επομένως ισχύει $f''(x_0) = 0$.

Β' Τρόπος Είναι ίδιος με τον Α' Τρόπο με μια διαφοροποίηση ως προς τα επιχειρήματα που οδήγησαν στην απόδειξη της (*). Όπως και στον Α' Τρόπο λέμε ότι έστω πως η (*) δεν ισχύει και ότι $f'(x_1) \geq f'(x_0)$.

¹⁰Υπάρχει μια αναλογία με την ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 1$.



ΣΧΗΜΑ 1.32. Διάγραμμα για την απόδειξη του ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$

Επιλέγουμε x_2 με $x_1 < x_2 < x_0$. Τότε λόγω της μονοτονίας της f' στο (α, x_0) για κάθε x με $x_2 < x < x_0$ θα είναι $f'(x_2) < f'(x)$. Παίρνοντας όρια για $x \rightarrow x_0^+$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν την συνέχεια της f' στο x_0 έχουμε ότι $f'(x_2) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$ άρα το άτοπο συμπέρασμα

$$f'(x_0) < f'(x_1) < f'(x_2) \leq f'(x_0).$$

Άρα η (*) ισχύει. Η υπόλοιπη απόδειξη γίνεται όπως στον Α' Τρόπο.

Ο.Ε.Δ.

Το σχολικό βιβλίο για να περιγράψει γεωμετρικά το σημείο καμπής γράφει: « Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της «διαπερνά» την καμπύλη. » Αυτό σημαίνει ότι εκατέρωθεν του σημείου καμπής η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω (αντιστοίχως: κάτω) και κάτω (αντιστοίχως: πάνω) από την εφαπτομένη στο σημείο καμπής. Δηλαδή ισχύει το επόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 43. Έστω f παραγωγίσιμη στο (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η f παρουσιάζει καμπή. Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$. Υπάρχουν $\gamma, \delta \in (\alpha, \beta)$ με $\gamma < x_0 < \delta$ έτσι ώστε στο (γ, x_0) τα αντίστοιχα σημεία της (γ, x_0) να βρίσκονται πάνω (αντιστοίχως: κάτω) από την ε και στο (x_0, δ) τα αντίστοιχα σημεία της (γ, x_0) να βρίσκονται κάτω (αντιστοίχως: πάνω) από την ε .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού στο x_0 έχουμε καμπή θα υπάρχουν $\gamma, \delta \in (\alpha, \beta)$ με (α, β) ώστε στο $[\gamma, x_0]$ η f να είναι κυρτή (αντιστοίχως: κοίλη) και στο $[x_0, \delta]$ να είναι κοίλη (αντιστοίχως: κυρτή). Άρα στο πρώτο διάστημα τα σημεία της γραφικής παράστασης θα βρίσκονται πάνω (αντιστοίχως: κάτω) από την εφαπτομένη ε και στο δεύτερο κάτω (αντιστοίχως: πάνω).

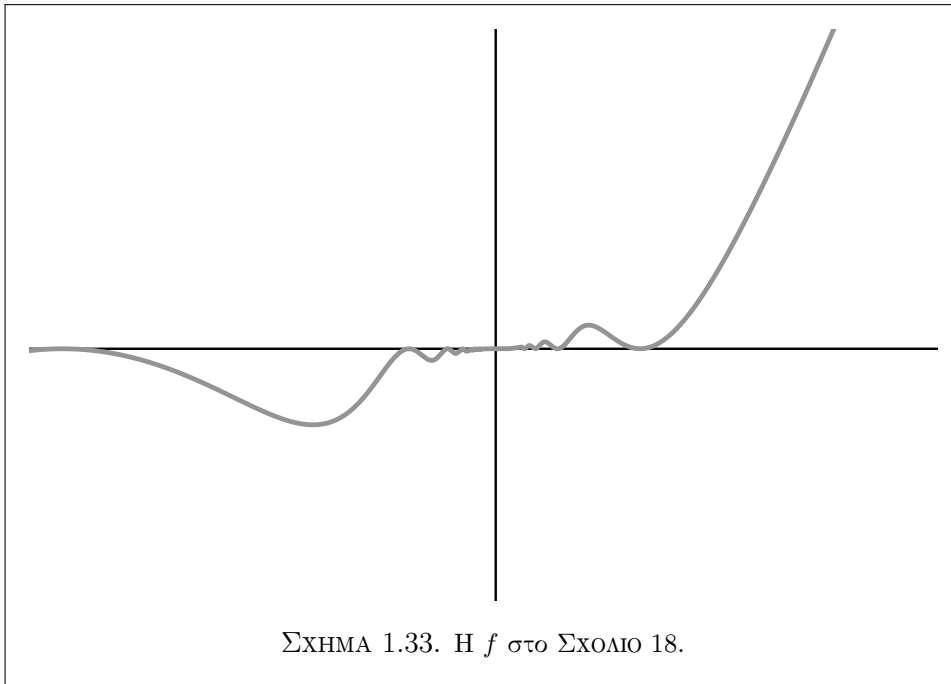
Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 18. Το αντίστροφο της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond 43$ δεν ισχύει. Δηλαδή μπορεί αριστερά του x_0 η C_f να βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη που αντιστοιχεί στο x_0 και δεξιά κάτω (ή αντίστροφα) χωρίς η f να παρουσιάζει καμπή στο x_0 . Ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 \left(\eta\mu \frac{1}{x} + 1 \right) & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ x^2 \left(\eta\mu \frac{1}{x} + 1 \right) & , \quad x > 0 \end{cases}$$

η οποία, όπως εύκολα διαπιστώνεται, είναι παντού παραγωγίσιμη και $f'(0) = 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, 0)$ είναι η $y = 0$ και δεξιά του 0 η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ενώ αριστερά κάτω (βλ. και ΣΧΗΜΑ 1.33). Ωστόσο η f δεν παρουσιάζει καμπή στο 0 διότι δεν υπάρχει διάστημα (a, b) που να περιέχει το μηδέν και στο $(a, 0)$ η f να είναι κυρτή και στο $(0, b)$ κοίλη ή αντίστροφα. Αυτό διαπιστώνεται ως εξής. Είναι για $x \neq 0$

$$f''(x) = \frac{2 \left(\eta\mu \frac{1}{x} \right) x^2 + 2x^2 - 2 \left(\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) x - \eta\mu \frac{1}{x}}{x^2}.$$



ΣΧΗΜΑ 1.33. Η f στο ΣΧΟΛΙΟ 18.

Ο αριθμητής στην παραπάνω έκφραση της f'' , ο οποίος και καθορίζει το πρόσημο της, γράφεται

$$g(x) = x \underbrace{\left[2 \left(\eta\mu \frac{1}{x} \right) x + 2x - 2 \left(\sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) \right]}_{h(x)} - \eta\mu \frac{1}{x}.$$

Ο προσθετέος $h(x)$ για $x \rightarrow 0$ έχει όριο το 0. Επομένως κοντά στο μηδέν θα είναι μικρότερος του $\frac{1}{4}$. Όμως κοντά στο 0 ο προσθετέος $-\eta\mu\frac{1}{x}$ θα γίνεται άπειρες φορές μηδέν και άπειρες φορές $\frac{1}{2}$ και η $f''(x)$ θα αλλάζει πρόσημο στο $(0, b)$ όποιο και αν είναι το b . Άρα η f δεν θα είναι κυρτή ή κοίλη στο $(0, b)$ όποιο και αν είναι το b .

1.11.2 Κριτήρια για τα σημεία καμπής.

Το σχολικό βιβλίο διατυπώνεται το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου για σημεία καμπής ως εξής:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

Δεδομένης της εξαίρεσης από την εξεταστέα ύλη της κατακόρυφης εφαπτομένης το παραπάνω μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής:

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) και η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν ενός σημείου τότε αυτό είναι θέση καμπής.

Υπάρχει και ένα αντίστοιχο κριτήριο για παραγώγους ανώτερης τάξης:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 44. Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει

$$f(x_0) = f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(\nu)}(x_0) = 0,$$

$f^{(\nu+1)}(x_0) \neq 0$ και η $f^{(\nu+1)}$ είναι συνεχής.

Ισχύουν τα ακόλουθα:

	ν άρτιος.	ν περιττός.
$f^{(\nu+1)}(x_0) > 0$	η f έχει καμπή στο x_0	η f έχει ελάχιστο στο x_0
$f^{(\nu+1)}(x_0) < 0$	η f έχει καμπή στο x_0	η f έχει μέγιστο στο x_0

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ας δούμε την περίπτωση όπου το $f^{(\nu+1)}(x_0)$ είναι θετικό. Αφού η $f^{(\nu+1)}$ είναι συνεχής τότε κοντά στο x_0 , δηλαδή σε κάποιο διάστημα (p, q) που το περιέχει, θα είναι θετική και επομένως η $f^{(\nu)}$ της οποίας η $f^{(\nu+1)}$ είναι παράγωγος θα είναι γνησίως αύξουσα στο (p, q) . Αφού μηδενίζεται στο x_0 στο (p, x_0) θα είναι αρνητική και στο (x_0, q) θα είναι θετική. Άρα η $f^{(\nu-1)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (p, x_0) , γνησίως αύξουσα στο (x_0, q) . Είναι θετική στο (p, q) εκτός του x_0 άρα η $f^{(\nu-2)}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Βλέπουμε ότι το x_0 είναι:

- Θέση καμπής για την $f^{(\nu-1)}$ αφού η παράγωγος της είναι γνησίως αύξουσα.
- Θέση τοπικού ελαχίστου για την $f^{(\nu-2)}$.
- Θέση καμπής για την $f^{(\nu-3)}$ αφού η παράγωγος της είναι γνησίως αύξουσα.
- Θέση τοπικού ελαχίστου για την $f^{(\nu-4)}$.
- ...

Το ζεύγος αυτών των καταστάσεων επαναλαμβάνεται. Αν ο n είναι άρτιος θα έχουμε ότι το x_0 είναι θέση ακροτάτου ενώ αν ο n είναι περιττός το x_0 είναι θέση καμπής.

x	p	x_0	q
...	...	0	...
...	...	0	...
$f^{(n-2)}(x)$		0	 +
$f^{(n-1)}(x)$	 +	0	 +
$f^{(n)}(x)$		0	 +
$f^{(n+1)}(x)$	+	+	+

Ο.Ε.Δ.

1.11.3 Σημεία καμπής πολυωνύμων.

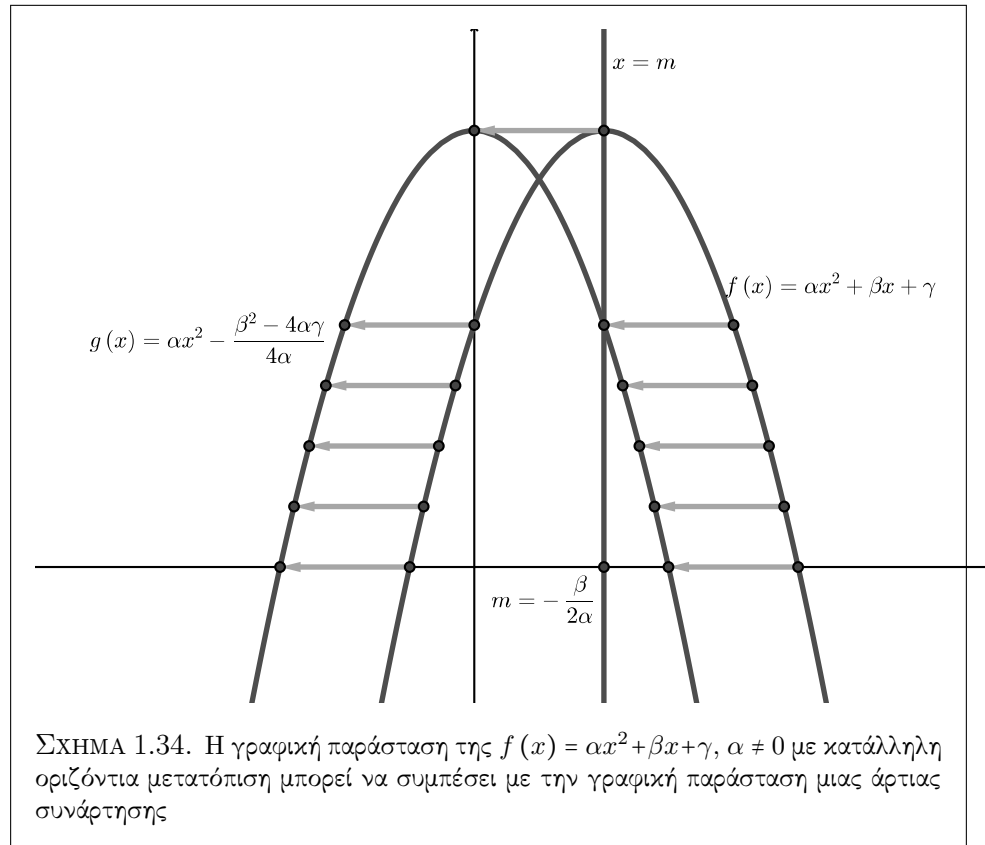
Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = m$ όπου $m = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Επίσης γνωστό είναι ότι στη θέση m η f παρουσιάζει ελάχιστο ή μέγιστο ανάλογα με πρόσημο του α . Μπορούμε να μεταφέρουμε κατάλληλα την γραφική παράσταση της f ώστε η ευθεία $x = m$ να συμπίπτει με τον $y'y$. Τότε η f στη νέα της θέση θα είναι μία άρτια συνάρτηση. Η νέα συνάρτηση θα είναι η

$$g(x) = f(x + m) = \alpha \left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta \left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma$$

Είναι

$$g(x) = \alpha x^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

που προφανώς είναι άρτια.



Για τα τριτοβάθμια πολυώνυμα της μορφής $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ μπορεί να πραγματοποιηθεί μετατόπιση ώστε να συμπίσουν με μία περιττή συνάρτηση. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν η νέα συνάρτηση δεν έχει όρους άρτιας τάξης. Για να απαλείψουμε τον x^2 χρειαζόμαστε μια οριζόντια μετατόπιση έστω κατά m . Είναι:

$$f(x+m) = \alpha x^3 + (3\alpha m + \beta)x^2 + (3\alpha m^2 + 2\beta m + \gamma)x + (\alpha m^3 + \delta + \gamma m + \beta m^2)$$

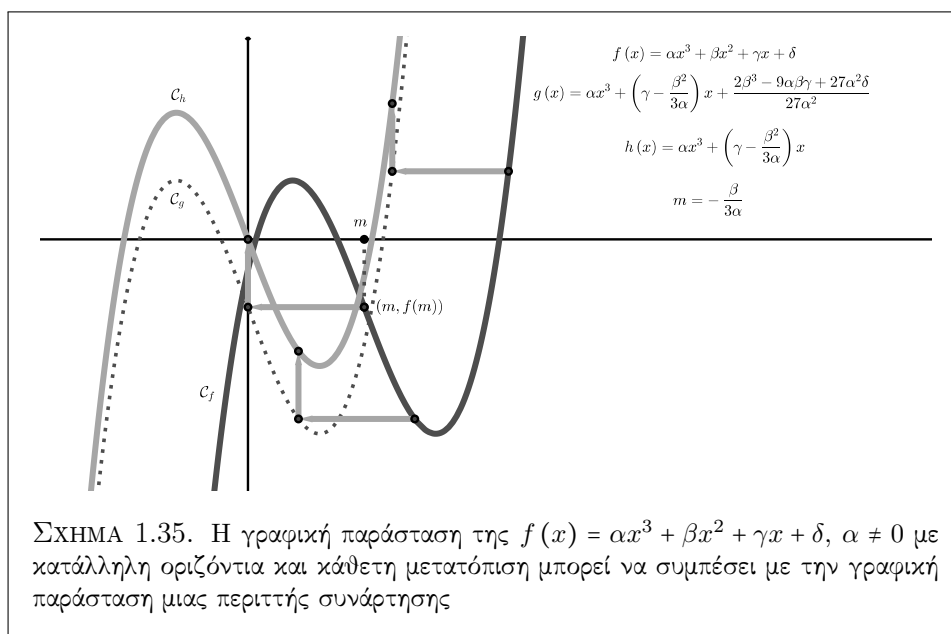
οπότε ο συντελεστής του x^2 δηλαδή ο $3\alpha m + \beta$ γίνεται μηδέν όταν $m = -\frac{\beta}{3\alpha}$. Για αυτή την τιμή του m έχουμε:

$$g(x) = f(x+m) = \alpha x^3 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{3\alpha}\right)x + \frac{2\beta^3 - 9\gamma\beta\alpha + 27\delta\alpha^2}{27\alpha^2}$$

Τώρα με μία κατακόρυφη μετατόπιση μπορεί να απαλειφθεί και ο σταθερός όρος και να έχουμε την συνάρτηση:

$$h(x) = \alpha x^3 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{3\alpha}\right)x$$

που είναι προφανώς περιττή.



Μετά τη μετατόπιση η $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ συνέπεσε με μία περιττή συνάρτηση που έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Αυτό σημαίνει ότι και στην αρχική της θέση είχε κέντρο συμμετρίας: Εκείνο από το οποίο προήλθε η αρχή των αξόνων δηλαδή το σημείο $(m, f(m))$ με $m = -\frac{\beta}{3\alpha}$. Αλλά $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, το m είναι ρίζα της και εκατέρωθεν της η f'' αλλάζει πρόσημο. Επομένως το $(m, f(m))$. Η f μπορεί να έχει ή όχι θέσεις ακροτάτων που θα είναι τοπικά αφού στα $\pm\infty$ απειρίζεται. Τα αντίστοιχα σημεία θα είναι συμμετρικά ως προς το σημείο καμπής το οποίο φυσικά θα είναι μέσο του τμήματος τους. Έτσι έχουμε την:

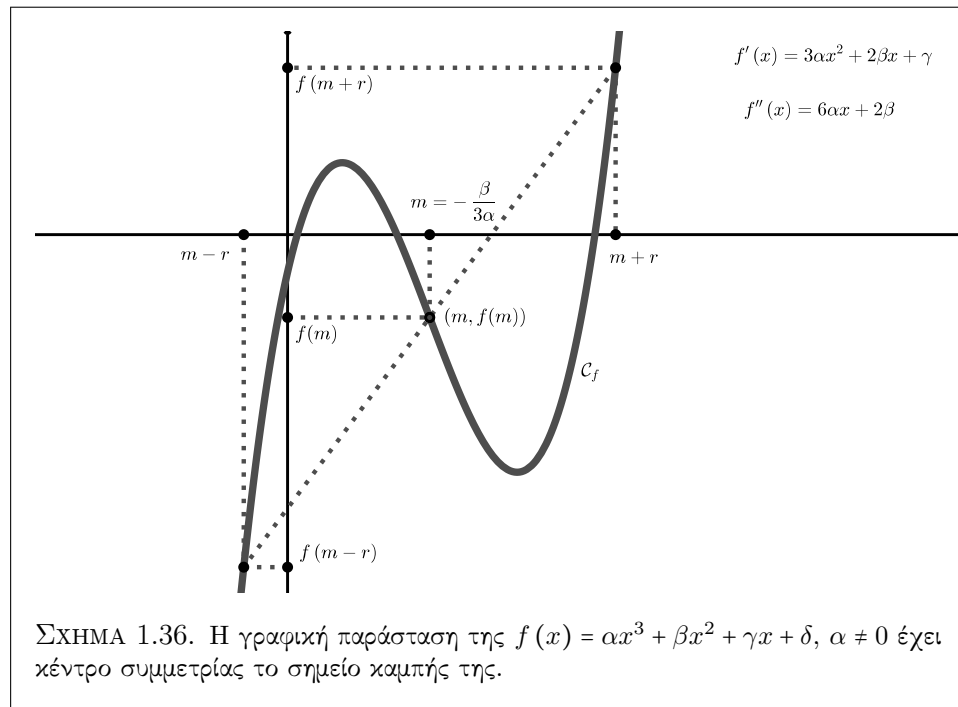
ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 45. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$.

1. Το σημείο καμπής της $K\left(-\frac{\beta}{3\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)\right)$ είναι κέντρο συμμετρίας της γραφικής της παράστασης.
2. Αν η f έχει ακρότατα αυτά θα είναι συμμετρικά ως προς το K .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Αρκεί να δείξουμε ότι αν δύο σημεία του άξονα $x'x$ έχουν μέσο το $-\frac{\beta}{3\alpha}$ τότε οι αντίστοιχες εικόνες τους στον $y'y$ έχουν μέσο το $f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τα σημεία αυτά να είναι τα $-\frac{\beta}{3\alpha} - r, -\frac{\beta}{3\alpha} + r$ και να δείξουμε ότι:

$$\frac{f\left(-\frac{\beta}{3\alpha} - r\right) + f\left(-\frac{\beta}{3\alpha} + r\right)}{2} = f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right) \quad (*).$$



Ένας άμεσος τρόπος είναι με εκτέλεση των πράξεων. Ως ενδιάμεσο βήμα έχουμε ότι:

$$f(p-r) + f(p+r) = 2\alpha p^3 + 2\beta p^2 + (2\gamma + 6\alpha r^2)p + 2\delta + 2\beta r^2,$$

και θέτοντας όπου p το $-\frac{\beta}{3\alpha}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} & f\left(-\frac{\beta}{3\alpha} - r\right) + f\left(-\frac{\beta}{3\alpha} + r\right) = \\ & = 2\alpha \left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)^3 + 2\beta \left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)^2 + (2\gamma + 6\alpha r^2) \left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right) + 2\delta + 2\beta r^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{27} \frac{2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma + 27\alpha^2\delta}{\alpha^2}$$

που σημαίνει ότι η $(*)$ ισχύει.

2. Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$. Αν η f'' έχει ρίζες αυτές είναι ως σημεία του $x'x$ συμμετρικές ως προς το $-\frac{2\beta}{2(3\alpha)} = -\frac{\beta}{3\alpha} = m$ και επομένως από το 1. τα αντίστοιχα σημεία είναι συμμετρικά ως προς το K .



Τα τεταρτοβάθμια πολυώνυμα μπορούν να έχουν δύο ή κανένα σημείο καμπής. Αυτό διότι η γενική μορφή ενός τεταρτοβαθμίου πολυωνύμου είναι

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_4 \neq 0$$

και η δεύτερη παράγωγος του είναι:

$$f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2.$$

Η f'' μπορεί να μην έχει ρίζα να έχει δύο ρίζες (που εκατέρωθεν τους αλλάζει πρόσημο άρα αποτελούν θέσεις σημείων καμπής) ή μία ρίζα (που εκατέρωθεν της δεν αλλάζει πρόσημο άρα δεν έχουμε σημείο καμπής). Για τα σημεία καμπής ισχύει το εξής μη αναμενόμενο αποτέλεσμα που απέδειξε το 2004 ο Lin McMullin, καθηγητής Λυκείου στις ΗΠΑ¹¹:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 46. * (Θεώρημα Lin McMullin) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ με } a_4 \neq 0.$$

Αν η f έχει δύο σημεία καμπής με τετμημένες p, q τότε η ευθεία τους επανατέμνει την C_f σε δύο άλλα σημεία των οποίων οι τετμημένες είναι

$$\Phi p - \frac{1}{\Phi}q, \quad -\frac{1}{\Phi}p + \Phi q$$

όπου $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η τυπική αντιμετώπιση είναι να βρεθούν οι ρίζες της f'' , να βρεθούν τα σημεία καμπής, να βρεθεί η ευθεία τους και να βρεθούν τα κοινά σημεία της με την C_f . Η διαδικασία αυτή έχει μεγάλο υπολογιστικό φορτίο.

Ο McMullin μείωσε τους υπολογισμούς εργαζόμενος ως εξής: Είναι

$$f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

και

$$f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2.$$



Lin McMullin

¹¹<https://teachingcalculus.com/2013/07/10/lin-mcmullins-theorem/>

Αφού η f'' έχει ρίζες p, q και συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου $12a_4$ θα γράφεται:

$$12a_4(x-p)(x-q)$$

Μία παράγουσα της συνάρτησης αυτής είναι η

$$4a_4x^3 - 6a_4(p+q)x^2 + 12a_4pqx$$

και μια άλλη η f'' και οι δύο αυτές συναρτήσεις θα διαφέρουν κατά σταθερά που είναι η a_1 .

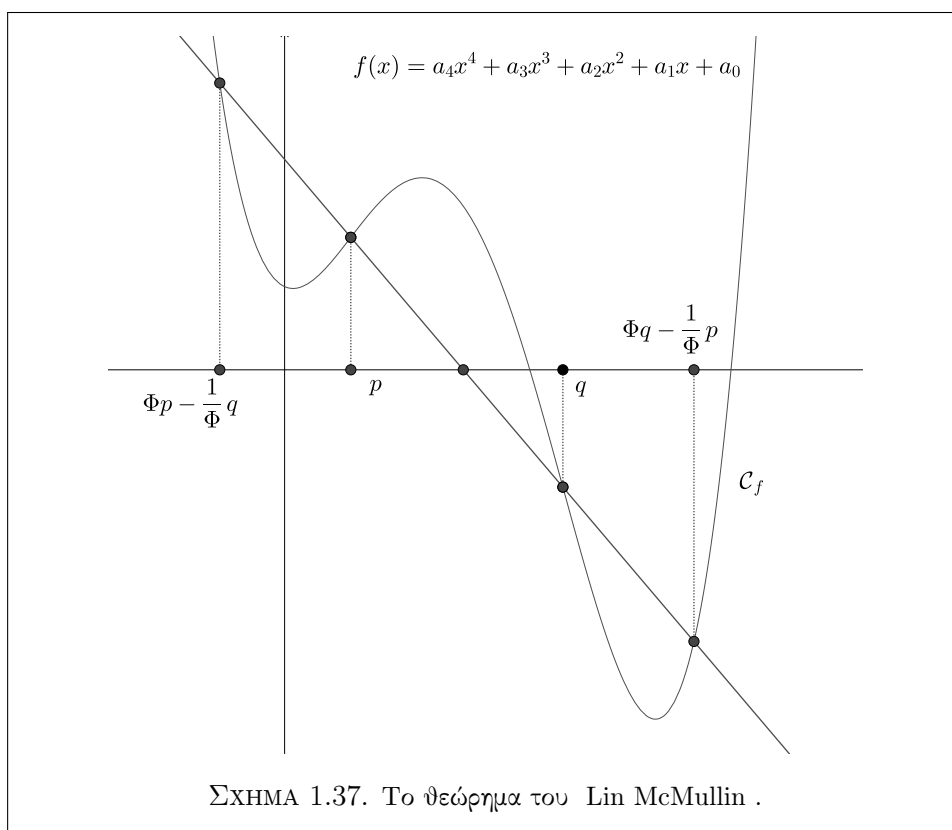
$$f'(x) = 4a_4x^3 - 6a_4(p+q)x^2 + 12a_4pqx + a_1.$$

Μία παράγουσα της είναι η

$$a_4x^4 - 2a_4(p+q)x^3 + 6a_4pqx^2 + a_1x$$

και μία άλλη είναι η f . Η κατάλληλη σταθερά που πρέπει να προστεθεί είναι η a_0 . Άρα:

$$f(x) = a_4x^4 - 2a_4(p+q)x^3 + 6a_4pqx^2 + a_1x + a_0$$



ΣΧΗΜΑ 1.37. Το θεώρημα του Lin McMullin .

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία καμπής $(p, f(p))$ και $(q, f(q))$ είναι η

$$\begin{vmatrix} p & -a_4p^4 + 4a_4p^3q + a_1p + a_1 & 1 \\ q & -a_4q^4 + 4a_4pq^3 + a_1q + a_1 & 1 \\ x & y & y \end{vmatrix} = 0$$

που παραγοντοποιείται και δίνει την

$$(p - q) (a_4p^3 + a_4q^3 - 3a_4qp^2 - 3a_4q^2p - a_1) x + y + 3a_4q^2p^2 - a_1 - a_4pq^3 - a_4p^3q = 0$$

Άρα η ευθεία των σημείων καμπής είναι η

$$y = (3a_4qp^2 + 3a_4q^2p - a_4p^3 - a_4q^3 + a_1) x + a_4p^3q + a_4pq^3 - 3a_4q^2p^2 + a_1.$$

Το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} y &= a_4x^4 - 2a_4(p+q)x^3 + 6a_4pqx^2 + a_1x + a_1 \\ y &= (3a_4qp^2 + 3a_4q^2p - a_4p^3 - a_4q^3 + a_1)x + a_4p^3q + a_4pq^3 - 3a_4q^2p^2 + a_1 \end{aligned} \right\}$$

ανάγεται στην εξίσωση:

$$a_4(x - q)(x - p)(x^2 - (p + q)x + 3pq - q^2 - p^2) = 0$$

που έχει τις αναμενόμενες ρίζες p, q και δύο ακόμη που προκύπτουν από την επίλυση της:

$$x^2 - (p + q)x + 3pq - q^2 - p^2 = 0$$

η οποία δίνει ρίζες:

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}p + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}q, \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2}p + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}q$$

και έτσι έχουμε το αποδεικτέο.

Ο.Ε.Δ.

1.12 Υπερ-κυρτές συναρτήσεις.

Η έννοια της κυρτής συνάρτησης ως πολλαπλά χρήσιμη φυσικό είναι να έχει δεχθεί γενικεύσεις και εξειδικεύσεις ([32] κεφ. 2). Μια από αυτές σχετίζεται με τις ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ $\diamond 14, 17$. Σύμφωνα με αυτές μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του είναι κυρτή αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1 \neq x_2$ από το Δ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (*).$$

Αν η f παίρνει μόνο θετικές τιμές και αντί αυτής της απαίτησης έχουμε την

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) < (f(x_1))^{1-\lambda} (f(x_2))^\lambda \quad (\#)$$

τότε έχουμε μια άλλη έννοια κυρτότητας. Επειδή η σχέση $(\#)$, όπως εύκολα διαπιστώνεται, είναι ισοδύναμη με την

$$\ln f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)\ln f(x_1) + \lambda\ln f(x_2) \quad (\#\#),$$

η απαίτηση $(\#)$ ισοδυναμεί με το να είναι κυρτή συνάρτηση ο λογάριθμος $\ln f$ της f . Μια συνάρτηση f θα λέγεται υπερ-κυρτή ή λογαριθμικά κυρτή αν παίρνει μόνο θετικές τιμές και ο λογάριθμος της είναι συνάρτηση κυρτή¹². Η ιδιότητα του να είναι μια συνάρτηση υπερ-κυρτή είναι ισχυρότερη από την ιδιότητα του να είναι κυρτή όπως φαίνεται από το επόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 47. Κάθε υπερ-κυρτή συνάρτηση είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω f μια υπερ - κυρτή συνάρτηση. Τότε η $\ln f(x)$ είναι κυρτή. Εφαρμόζοντας την ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 23 συμπεραίνουμε ότι η σύνθεσή της με την γνησίως αύξουσα και κυρτή συνάρτηση e^x θα είναι κυρτή. Άρα η $e^{\ln f(x)}$ δηλαδή η $f(x)$ είναι κυρτή. Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 19. Το ότι μια υπερ-κυρτή είναι κυρτή μπορεί να προκύψει και από την παρατήρηση ότι η ισχύς της ανισότητας $(*)$ προκύπτει από την ισχύ της ανισότητας $(\#)$ αφού λόγω της ανισότητας του Cauchy με βάρη, που θα δούμε αργότερα (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13), ισχύει

$$(f(x_1))^{1-\lambda} (f(x_2))^\lambda \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Όπως είδαμε η σύνθεση μιας γνησίως αύξουσας και κυρτής συνάρτησης με μια κυρτή είναι συνάρτηση κυρτή. Φυσικά δεν μπορούμε να αναμένουμε γενικά να προκύψει κυρτή συνάρτηση αν συνθέσουμε μία κυρτή με μία κοίλη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Η e^x είναι κυρτή, η $-1/x, x > 0$ είναι κοίλη και η $-1/e^x$ είναι κοίλη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Η $x^2 + 2x + 3$ ορισμένη στο $(0, +\infty)$ είναι κυρτή η $\ln x$ είναι κοίλη και η σύνθεση τους $\ln(x^2 + 2x + 3)$ είναι κοίλη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. e^{x^2+2x+3} είναι κυρτή η $\ln x$ είναι κοίλη και η σύνθεση $\ln e^{x^2+2x+3} = x^2 + 2x + 3$ είναι κυρτή.

Οι υπερ-κυρτές συναρτήσεις είναι αρκετά «ανθεκτικές» ώστε συντιθέμενες με την κοίλη λογαριθμική συνάρτηση να δίνουν ως αποτέλεσμα κυρτή συνάρτηση. Μάλιστα δεν είναι δύσκολο να έχουμε και έναν αυτόματο τρόπο παραγωγής όλων των υπερ-κυρτών συναρτήσεων. Έστω f μια υπερ-κυρτή συνάρτηση. Τότε η $g(x) = \ln f(x)$ είναι κυρτή. Είναι δε $f(x) = e^{g(x)}$. Άρα κάθε υπερ-κυρτή συνάρτηση είναι της μορφής $e^{g(x)}$ όπου g κυρτή. Αλλά και αντιστρόφως

¹²Πρόκειται για μια κατηγορία συναρτήσεων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον στα Μαθηματικά ([5] σελ. 137) αλλά και σε εφαρμογές όπως π.χ. στην Οικονομική Ανάλυση. Βλ. Rydell, Peter *The significance of Logarithmic Convexity for Price and Growth Theory*, Western Economi Journal, 6(1), 1967 σελ. 65-71.

αν έχουμε μια κυρτή συνάρτηση g και σχηματίσουμε την $e^{g(x)}$ αυτή θα είναι υπερ-κυρτή αφού ο λογάριθμος της είναι η κυρτή συνάρτηση $g(x)$. Επομένως έχουμε την:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 48. Οι υπερ-κυρτές συναρτήσεις είναι ακριβώς οι συναρτήσεις της μορφής $e^{g(x)}$ όπου η g είναι κυρτή.

Είδαμε ότι το άθροισμα κυρτών συναρτήσεων είναι πάντα κυρτή ενώ το γινόμενο, ακόμη και αν είναι θετικές, μπορεί να είναι κυρτή μπορεί και όχι. Οι υπερ-κυρτές συναρτήσεις συμπεριφέρονται καλλίτερα:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 49. Το άθροισμα και το γινόμενο υπερ-κυρτών συναρτήσεων είναι συνάρτηση υπερ-κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι οι f και g είναι υπερ-κυρτές συναρτήσεις στο Δ . Τότε οι $\ln f$, $\ln g$ είναι κυρτές.

Για την fg Το ότι η fg είναι υπερ-κυρτή προκύπτει από το ότι $\ln fg = \ln f + \ln g$ και το άθροισμα κυρτών είναι κυρτή.

Για την $f + g$ Θα αποδείξουμε ότι η $\ln(f + g)$ είναι κυρτή αποδεικνύοντας ότι για κάθε x_1, x_2 από το Δ με $x_1 < x_2$ υπάρχουν α, β έτσι ώστε για όλα τα x με $x_1 \leq x \leq x_2$ να ισχύει

$$\ln(f(x) + g(x)) \leq \alpha x + \beta$$

ή ισοδύναμα

$$f(x) + g(x) \leq e^{\alpha x + \beta} \quad (*)$$

και το ίσον να ισχύει μόνο αν $x = x_1$ ή $x = x_2$.

Για τις κυρτές συναρτήσεις $\ln f$, $\ln g$ και τα συγκεκριμένα x_1, x_2 υπάρχουν p, q, r, s έτσι ώστε για x με $x_1 \leq x \leq x_2$ να είναι:

$$\ln f(x) \leq px + q, \quad \ln g(x) \leq rx + s$$

ή ισοδύναμα:

$$f(x) \leq e^{px+q}, \quad g(x) \leq e^{rx+s}$$

και οι ισότητες να ισχύουν μόνο αν $x = x_1$ ή $x = x_2$.

Για αυτά τα x ισχύει:

$$f(x) + g(x) \leq e^{px+q} + e^{rx+s} \quad (**)$$

Ας ονομάσουμε

$$w(x) = e^{px+q} + e^{rx+s}.$$

Για τα p, r υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. Είναι άνισα ας πούμε με $p > r$. Για την παράγωγο της $\ln w(x)$ έχουμε:

$$(\ln w(x))' = \frac{pe^{px+q} + re^{rx+s}}{e^{px+q} + e^{rx+s}}$$

Θα είναι

$$\begin{aligned} \frac{pe^{px+q} + re^{rx+s}}{e^{px+q} + e^{rx+s}} &= \frac{e^{rx} (pe^{(p-r)x+q} + re^s)}{e^{rx} (e^{(p-r)x+q} + e^s)} = \\ &= \frac{p(e^{(p-r)x+q} + e^s) + re^s - pe^s}{e^{(p-r)x+q} + e^s} = p - \frac{(p-r)e^s}{e^{(p-r)x+q} + e^s} \end{aligned}$$

Η τελευταία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η $(\ln w(x))'$ είναι γνησίως αύξουσα άρα στην περίπτωση αυτή η w είναι υπερ-κυρτή. Άρα υπάρχουν α, β ώστε $w(x) \leq e^{\alpha x + \beta}$ για όλα τα x από το $[x_1, x_2]$ και το «ίσον» ισχύει μόνο στα άκρα. Επομένως

$$f(x) + g(x) \leq e^{px+q} + e^{rx+s} \leq e^{\alpha x + \beta}$$

και το «ίσον» οποιωνδήποτε δύο από τα τρία μέλη ισχύει μόνο αν $x = x_1$ ή $x = x_2$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε αποδείξει ότι η $f + g$ είναι υπερ-κυρτή.

2. Είναι ίσα. Τότε

$$w(x) = e^{px+q} + e^{rx+s} = e^{px} (e^q + e^r) = e^{px} e^{\ln(e^q + e^r)} = e^{px + \ln(e^q + e^r)}$$

και επομένως

$$f(x) + g(x) \leq e^{px+q} + e^{rx+s} = e^{\overbrace{p}^{\alpha} x + \overbrace{\ln(e^q + e^r)}^{\beta}}$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο αν $x = x_1$ ή $x = x_2$. Οπότε και σε αυτή την περίπτωση η $f + g$ είναι υπερ-κυρτή. Ο.Ε.Δ.

Ένα κριτήριο για να είναι μια συνάρτηση που παίρνει μόνο θετικές τιμές υπερ-κυρτή είναι το ακόλουθο (βλ [30]).

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 50. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο Δ , παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία, η οποία παίρνει μόνο θετικές τιμές. Τα εξής είναι ισοδύναμα.

1. Η f είναι υπερ-κυρτή.
2. Για κάθε πραγματικό αριθμό a η συνάρτηση $e^{ax} f(x)$ είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για το ευθύ έχουμε ότι αφού η f είναι υπερ-κυρτή η $\ln f(x)$ είναι κυρτή άρα και το άθροισμα $\ln f(x) + ax$ είναι κυρτή και το αυτό ισχύει για την σύνθεση $e^{ax + \ln f(x)}$ που είναι η $e^{ax} f(x)$.

Για το αντίστροφο θα αποδείξουμε το εξής:

Αν η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο Δ , παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία και η $e^{ax+\varphi(x)}$ είναι κυρτή για όλα τα a τότε η $\varphi(x)$ είναι κυρτή.

Το αντίστροφο προκύπτει παίρνοντας στην θέση της $\varphi(x)$ την $\ln f(x)$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\varphi'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ . Έστω πως όχι και ότι για $x_1 < x_2$ είναι

$$\varphi'(x_1) \geq \varphi'(x_2).$$

Τότε υπάρχει πάντα επιλογή του a τέτοια ώστε

$$\alpha + \varphi'(x_2) \geq (\alpha + \varphi'(x_2)) e^{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)+a(x_2-x_1)} \quad (*),$$

ή ισοδύναμα ώστε

$$(\alpha + \varphi'(x_2)) \left(1 - e^{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)+a(x_2-x_1)}\right) \geq 0 \quad (**).$$

Παρατηρούμε ότι η $(*)$ είναι ισοδύναμη με την

$$(\alpha + \varphi'(x_2)) (\varphi(x_2) - \varphi(x_1) + a(x_2 - x_1)) \leq 0 \quad (* * *).$$

Η $(* * *)$ και επομένως η $(*)$ ισχύει αν επιλέξουμε το a μεταξύ των αριθμών $-\varphi'(x_2)$ και $-\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}$ κάτι που είναι πάντοτε δυνατόν ακόμη και στην περίπτωση που αυτοί οι δύο αριθμοί είναι ίσοι οπότε το a επιλέγεται να είναι η κοινή τιμή τους. Για ένα τέτοιο a έχουμε ότι

$$\alpha + \varphi'(x_1) \geq (\alpha + \varphi'(x_2)) \geq (\alpha + \varphi'(x_2)) e^{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)+a(x_2-x_1)},$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$(\alpha + \varphi'(x_1)) e^{\varphi(x_1)+ax_1} \geq (\alpha + \varphi'(x_2)) e^{\varphi(x_2)+ax_2},$$

που μας οδηγεί σε άτοπο αφού πρέπει η παράγωγος της $e^{ax+\varphi(x)}$ να είναι γνησίως αύξουσα. Ο.Ε.Δ.

1.13 Κυρτές συναρτήσεις και ανισότητες.

Στην ενότητα αυτή θα δούμε κάποιες ανισότητες που αποδεικνύονται ως συνέπειες των ιδιοτήτων των κυρτών συναρτήσεων ή συνδέονται άμεσα με αυτές. Επιχειρείται η παρουσίαση να είναι τέτοια ώστε, ενδεχομένως με κάποιες παρεμβάσεις του διδάσκοντα με υποερωτήματα, να είναι διδάξιμες στην τάξη. Για τον λόγο αυτό σε αρκετές περιπτώσεις θυσιάστηκε η συντομία.

1.13.1 Η ανισότητα του Jensen

Η ανισότητα του Jensen (1.12) μπορεί να πάρει μια πιο συμμετρική μορφή. Θέτοντας $1 - \lambda = \lambda_1$ και $\lambda = \lambda_2$ έχουμε ότι $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ και $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ η δε ανισότητα, πάντα με την υπόθεση ότι $x_1 \neq x_2$, γράφεται

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (1.13)$$

Η μορφή αυτή είναι γενικεύσιμη για περισσότερους αριθμούς.

1.13.1.1 Η ανισότητα του Jensen για τρεις αριθμούς.

Ας δούμε πρώτα πως μπορεί να γενικευτεί για τρεις αριθμούς. Ας υποθέσουμε ότι οι x_1, x_2, x_3 είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί του διαστήματος Δ και $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τρεις αριθμοί του διαστήματος $(0, 1)$ με άθροισμα 1 δηλαδή $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Θα δείξουμε ότι:

Ο αριθμός $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ ανήκει στο Δ και ότι

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$

Για την απόδειξη του πρώτου, αφού οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 είναι ανά δύο διάφοροι μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι $x_1 < x_2 < x_3$. Τότε

$$\lambda_1 x_1 = \lambda_1 x_1 < \lambda_1 x_3$$

$$\lambda_2 x_1 < \lambda_2 x_2 < \lambda_2 x_3$$

$$\lambda_3 x_1 < \lambda_3 x_2 = \lambda_3 x_3$$

Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις σχέσεις έχουμε

$$\underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}_1 x_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 < \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}_1 x_3$$

δηλαδή:

$$x_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 < x_3$$

επομένως και ο αριθμός $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ ανήκει στο Δ αφού οι x_1, x_3 ανήκουν.

Για την απόδειξη της ανισότητας θα προσπαθήσουμε τον αριθμό $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ να τον φέρουμε σε μία μορφή $px + \lambda_3 x_3$ με τον x να είναι αριθμός του Δ διάφορος του x_3 και οι αριθμοί p, λ_3 να είναι αριθμοί του $(0, 1)$ (ο λ_3 ήδη είναι και να έχουν άθροισμα 1 ώστε να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Jensen όπως την ξέρουμε.

Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε γράφοντας $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = px$ με $p + \lambda_3 = 1$. Η τελευταία σχέση μας λέει ποιος πρέπει να είναι ο p : είναι ο $p = 1 - \lambda_3$ που

φυσικά ανήκει στο $(0, 1)$ αφού ο λ_3 ανήκει. Η ίδια σχέση μας λέει ποιος πρέπει να είναι ο x :

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{p} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{1 - \lambda_3} = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} x_2$$

Επειδή οι αριθμοί $\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3}, \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3}$ είναι θετικοί και έχουν άθροισμα $\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 - \lambda_3} = \frac{1 - \lambda_3}{1 - \lambda_3} = 1$ και οι δύο ανήκουν στο $(0, 1)$ και επομένως ο x βρίσκεται μεταξύ των x_1, x_2 και επομένως στο Δ . Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) = f(px + \lambda_3 x_3) < pf(x) + \lambda_3 f(x_3) =$$

$$(1 - \lambda_3) f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} x_1 + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} x_2\right) + \lambda_3 f(x_3) <$$

$$(1 - \lambda_3) \left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_3} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_3} f(x_2) \right] + \lambda_3 f(x_3) =$$

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$

και επομένως έχουμε αποδείξει ότι $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$.

1.13.1.2 Η γενική ανισότητα του Jensen

Στο επόμενο θα δώσουμε δύο αποδείξεις της γενικευμένης ανισότητας του Jensen. Η πρώτη χρησιμοποιεί μαθηματική επαγωγή που είναι έξω από την σχολική ύλη. Η δεύτερη χρησιμοποιεί την αρχή του ελαχίστου (: Αν ξεκινήσουμε από ένα φυσικό αριθμό και επιλέξουμε ένα μικρότερο κ.ο.κ. η διαδικασία αυτή τερματίζεται) που αν και ισοδύναμη με την αρχή της επαγωγής είναι διαισθητικά προφανέστερη.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 51. Αν η f είναι κυρτή στο Δ , οι $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι $n > 1$ ανά δύο διάφοροι αριθμοί του Δ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι στοιχεία του $(0, 1)$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ τότε το $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ είναι στοιχείο του Δ και ισχύει:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1. Για το πρώτο σκέλος αφού τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι ανά δύο διάφορα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Ισχύουν οι ανισότητες:

$$x_1 \leq x_1 < x_n$$

$$x_1 < x_2 < x_n$$

$$\dots$$

$$x_1 < x_n \leq x_n$$

και επομένως:

$$\lambda_1 x_1 \leq \lambda_1 x_1 < \lambda_1 x_n$$

$$\lambda_2 x_1 < \lambda_2 x_2 < \lambda_2 x_n$$

...

$$\lambda_n x_1 < \lambda_n x_n \leq \lambda_n x_n$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ βρίσκουμε ότι

$$x_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n < x_n$$

επομένως το άθροισμα του μεσαίου μέλους αφού βρίσκεται μεταξύ δύο στοιχείων του Δ ανήκει και αυτό στο Δ .

Για το δεύτερο σκέλος θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n .

Για $n = 2$. Η αποδεικτέα ισχύει (βλ. (1.13)).

Για $n = k$. Υποθέτουμε ότι ισχύει.

Για $n = k + 1$. Έστω $x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1}$ στοιχεία του Δ και αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ του $(0, 1)$ τέτοια ώστε $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1} = 1$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \\ & < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} = \\ & = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k} x_k \right) + \lambda_{k+1} x_{k+1} \end{aligned}$$

με τα

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}, \dots, \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}$$

να είναι στοιχεία του $(0, 1)$ με άθροισμα 1 και το

$$u = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k} x_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k} x_k$$

να είναι στοιχείο του Δ .

Είναι τότε:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = f((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) u + \lambda_{k+1} x_{k+1})$$

και αφού τα $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$, λ_{k+1} ανήκουν στο $(0, 1)$ και τα u , x_{k+1} είναι διαφορετικά (αφού το u δεν υπερβαίνει το x_k) έχουμε:

$$f((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)u + \lambda_{k+1}x_{k+1}) < (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)f(u) + \lambda_{k+1}f(x_{k+1})$$

Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}x_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}x_k\right) \\ &< \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}f(x_2) + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}f(x_k) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)f(u) < \\ &(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}f(x_2) + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}f(x_k)\right) = \\ &\lambda_1f(x_1) + \lambda_2f(x_2) + \dots + \lambda_kf(x_k) \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει η αποδεικτέα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2. Ας χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο, προσωρινό, συμβολισμό: Θα γράφουμε $\tilde{x}$ αντί για $f(x)$. Ξέρουμε ότι για οποιαδήποτε θετικά λ_1, λ_2 με άθροισμα 1 και οποιαδήποτε x_1, x_2 από το Δ είναι

$$\lambda_1\widetilde{x_1 + \lambda_2 x_2} \leq \lambda_1\tilde{x}_1 + \lambda_2\tilde{x}_2$$

Σαν συνέπεια αυτού είναι ότι για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς p, q και οποιαδήποτε x_1, x_2 για το $\frac{px_1 + qx_2}{p+q}$ που ανήκει, φυσικά, στο Δ ισχύει:

$$\frac{\widetilde{px_1 + qx_2}}{p+q} \leq \frac{p\tilde{x}_1 + q\tilde{x}_2}{p+q}$$

Με άλλα λόγια όταν το $\sim$ (δηλαδή η f) «συναντάει» το $\frac{px_1 + qx_2}{p+q}$ το «μεγαλώνει» σε $\frac{p\tilde{x}_1 + q\tilde{x}_2}{p+q}$.

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} &\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 + \dots + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \lambda_nx_n = \\ &(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \lambda_3x_3 + \dots + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \lambda_nx_n = \\ &(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \lambda_3x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} + \dots + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \lambda_nx_n = \\ &(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \lambda_3x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} + \lambda_4x_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} + \dots + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \lambda_nx_n = \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots + \lambda_{n-1}) \frac{\dots + \lambda_{n-1}x_{n-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots + \lambda_{n-1}} + \lambda_n x_n =$$

Ξεκινώντας από την τελευταία σχέση και επιστρέφοντας στην αρχή έχουμε:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots + \lambda_{n-1}) \frac{\dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots + \lambda_{n-1}} + \lambda_n x_n \leq \\ & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots + \lambda_{n-1}) \frac{\dots + \widetilde{\lambda_{n-1} x_{n-1}}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \dots + \lambda_{n-1}} + \lambda_n \widetilde{x_n} \leq \\ & \dots \\ & (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\widetilde{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} + \lambda_3 \widetilde{x_3} + \dots + \lambda_{n-1} \widetilde{x_{n-1}} + \lambda_n \widetilde{x_n} \leq \\ & \lambda_1 \widetilde{x_1} + \lambda_2 \widetilde{x_2} + \lambda_3 \widetilde{x_3} + \dots + \lambda_{n-1} \widetilde{x_{n-1}} + \lambda_n \widetilde{x_n} \end{aligned}$$

Και επομένως έχουμε ότι

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n \leq \lambda_1 \widetilde{x_1} + \lambda_2 \widetilde{x_2} + \lambda_3 \widetilde{x_3} + \dots + \lambda_{n-1} \widetilde{x_{n-1}} + \lambda_n \widetilde{x_n}$$

δηλαδή το αποδεικτέο.

ΣΧΟΛΙΟ 20. Αν στην ανισότητα του Jensen (1.13) επιτρέψουμε στα λ_1, λ_2 να γίνουν ίσα με 0 ή 1 (που σημαίνει ότι το ένα θα γίνει 0 και το άλλο 1) θα έχουμε ισότητα. Ισότητα θα έχουμε επίσης όταν $x_1 = x_2$. Αυτές είναι και οι μόνες περιπτώσεις που έχουμε ισότητα με τα x_1, x_2 να μεταβάλλονται στο Δ και τα λ_1, λ_2 στο $[0, 1]$ έχοντας άθροισμα 1. Ας δούμε την περίπτωση της ισότητας στην γενική περίπτωση. Ας υποθέσουμε ότι για τα $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ από το Δ και τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ ισχύει

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (*)$$

Όσα λ_i είναι μηδέν μπορούμε να τα αγνοήσουμε μαζί με τα αντίστοιχα x_i και θα εξακολουθήσουμε να έχουμε ισότητα απλώς με λιγότερα x_i και να έχουμε ένα σημείο «εκαίνησης» με όλα τα λ_i να είναι διάφορα του μηδενός. Μπορούμε αυτή την υπόθεση να την κάνουμε από την αρχή δηλαδή να υποθέσουμε ότι στην (*) όλα τα είναι όλα λ_i είναι διάφορα του μηδενός. Θα δείξουμε ότι όλα τα x_i είναι ίσα.

Η απόδειξη μπορεί να γίνει πάλι με επαγωγή. Για $n = 2$ το συμπέρασμα ισχύει και αν υποτεθεί ότι ισχύει για $n = k$. Αν έχουμε την ισότητα

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1})$$

με τα λ_i να ανήκουν στο $(0, 1)$ και $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k+1} = 1$ τότε:

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = \\
&= f\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) \left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}\right) + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \leq \\
&\leq (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1})
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_k f(x_k) \leq (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k+1}) f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}\right)$$

άρα:

$$\frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_k f(x_k)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k} \leq f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}\right)$$

Αλλά είναι και:

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_k f(x_k)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}$$

επομένως

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}\right) = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_k f(x_k)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}$$

άρα από την υπόθεση της επαγωγής τα $x_1, \dots, x_k$ είναι ίσα. Οπότε

$$f((\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) x_1 + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) f(x_1) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1})$$

από την οποία έχουμε ότι και το x_{k+1} είναι ίσο με τα υπόλοιπα x_i .

1.13.2 Μερικές εφαρμογές της ανισότητας Jensen

Η ανισότητα του Jensen έχει πολλές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Εδώ θα δούμε μερικές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Η ανισότητα του Cauchy αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου. Θεωρούμε θετικούς αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_n$. Τότε ισχύει

$$\boxed{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} \quad (1.14)$$

και το ίσον ισχύει αν και μόνο αν οι αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι ίσοι.

Πράγματι αρκεί να πάρουμε την κυρτή συνάρτηση e^x και

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$$



Augustin Louis Cauchy
1789-1857

και

$$y_1 = \ln x_1, y_2 = \ln x_2, \dots, y_n = \ln x_n$$

Θα έχουμε:

$$e^{\frac{1}{n}y_1 + \frac{1}{n}y_2 + \dots + \frac{1}{n}y_n} \leq \frac{1}{n}e^{y_1} + \frac{1}{n}e^{y_2} + \dots + \frac{1}{n}e^{y_n}$$

και το «ίσον» ισχύει όταν τα y_i είναι ίσα. Θα έχουμε λοιπόν

$$e^{\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n)} \leq \frac{1}{n}(e^{\ln x_1} + e^{\ln x_2} + \dots + e^{\ln x_n})$$

Αλλά

$$e^{\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n)} = e^{\frac{1}{n} \ln x_1 x_2 \dots x_n} = (e^{\ln x_1 x_2 \dots x_n})^{\frac{1}{n}}$$

οπότε έχουμε:

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

και το ίσον ισχύει όταν τα x_i είναι ίσα. Δηλαδή το αποδεικτέο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Η ανισότητα του Cauchy με βάρη. Θεωρούμε θετικούς αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_n$ και τους αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του $(0, 1)$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Τότε ισχύει

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n} \quad (1.15)$$

και το ίσον ισχύει αν και μόνο αν οι αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι ίσοι.

Η παραπάνω ανισότητα είναι γενίκευση της προηγούμενης η οποία προκύπτει αν πάρουμε τα λ_i να είναι ίσα μεταξύ τους (και ίσα με $\frac{1}{n}$).

Η απόδειξη της γίνεται με ανάλογο τρόπο. Ξεκινάμε πάλι από την κυρτή συνάρτηση e^x και εφαρμόζουμε την ανισότητα Jensen με τους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ως έχουν και τους $y_1 = \ln x_1, y_2 = \ln x_2, \dots, y_n = \ln x_n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14. Η ανισότητα του Young. Αν a, b, p, q είναι θετικοί αριθμοί με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ τότε ισχύει:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.16)$$

Πράγματι παραπάνω ανισότητα ισοδυναμεί με την

$$\ln a + \ln b \leq \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right),$$

δηλαδή την,

$$\frac{p}{p} \ln a + \frac{q}{q} \ln b \leq \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right).$$

Η τελευταία ανισότητα ισοδυναμεί με την

$$\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right),$$

που ισχύει λόγω της ανισότητας Jensen για την κοίλη συνάρτηση $\ln x$.



William Henry Young
1863-1942

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15. Η ανισότητα του Hölder. Αν $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί και p, q θετικοί αριθμοί με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ τότε ισχύει:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.17)$$

Αν όλα τα b_i είναι μηδέν δεν υπάρχει κάτι να αποδείξουμε. Αν δεν είναι όλα μηδέν η απόδειξη (βλ. και [10]) μπορεί να γίνει και εδώ με αξιοποίηση της συνάρτησης $g(x) = x^p, x > 0$ η οποία αφού $p > 1$ (λόγω της $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) και $g''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ είναι κυρτή. Είναι $b_1^q + \dots + b_n^q > 0$ οπότε ορίζονται τα

$$\lambda_i = \frac{b_i^q}{b_1^q + \dots + b_n^q}, \quad x_i = a_i b_i^{1-q} \quad i = 1, \dots, n$$

που είναι στοιχεία του $[0, 1]$ με άθροισμα 1. Από την ανισότητα Jensen είναι:

$$g(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 g(x_1) + \dots + \lambda_n g(x_n).$$

Άρα έχουμε την ανισότητα

$$\left(\frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{b_1^q + \dots + b_n^q} \right)^p \leq \frac{b_1^q (a_1 b_1^{1-q})^p + \dots + b_n^q (a_n b_n^{1-q})^p}{b_1^q + \dots + b_n^q},$$

δηλαδή την

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^p \leq (a_1^p b_1^{q+(1-q)p} + \dots + a_n^p b_n^{q+(1-q)p}) (b_1^q + \dots + b_n^q)^{p-1} \quad (*).$$

Αλλά $q + (1-q)p$ και $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$. Επομένως αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της (*) στην $\frac{1}{p}$ έχουμε την αποδεικτέα.

ΣΧΟΛΙΟ 21. Αν στην ανισότητα του Hölder θέσουμε $p = q = 2$ έχουμε την ειδική περίπτωση της **ανισότητας Cauchy–Schwarz** για θετικούς αριθμούς από την οποία εύκολα αποδεικνύεται η γενική περίπτωση. Πράγματι αν όλοι οι a_i, b_i είναι διάφοροι του μηδενός τότε από την ανισότητα του Hölder έχουμε ότι:

$$|a_1| |b_1| + \dots + |a_n| |b_n| \leq (|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} (|b_1|^2 + \dots + |b_n|^2)^{\frac{1}{2}},$$

και επομένως την:

$$(|a_1 b_1| + \dots + |a_n b_n|)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

Αλλά:

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 = |a_1 b_1 + \dots + a_n b_n|^2 \leq (|a_1 b_1| + \dots + |a_n b_n|)^2,$$



Otto Ludwig Hölder
1859-1937



Hermann Minkowski
1864–1909

επομένως για μη μηδενικούς αριθμούς ισχύει

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 = (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2). \quad (1.18)$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει και όταν για κάποια ζεύγη a_i, b_i έχουμε $a_i b_i = 0$: Την εφαρμόζουμε πρώτα για τα ζεύγη που δεν έχουν μηδενικά, μεγάλωνουμε το β' μέλος συμπληρώνοντας με τα τετράγωνα των αριθμών του ζεύγους που έχουμε γινόμενο μηδέν και συμπληρώνουμε το α' μέλος με τα μηδενικά γινόμενα. Φυσικά η ανισότητα Cauchy–Schwarz αποδεικνύεται για οποιουδήποτε αριθμούς αυτοτελώς με την βοήθεια γνώσεων της Α' Λυκείου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16. Η ανισότητα του Minkowski. Αν $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί και $p > 1$ τότε ισχύει:

$$[(a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p]^{\frac{1}{p}} \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.19)$$

Αν όλα τα b_i είναι μηδέν τότε η αποδεικτέα προφανώς ισχύει. Αν δεν είναι όλα μηδέν τότε γράφουμε:

$$(a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p = (a_1 + b_1)(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + (a_n + b_n)(a_n + b_n)^{p-1} =$$

$$a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + a_n(a_n + b_n)^{p-1} + b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + b_n(a_n + b_n)^{p-1}.$$

Θεωρούμε $q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ παίρνοντας $q = \frac{p}{p-1}$. Τότε τα $a_i + b_i$ είναι μη αρνητικά χωρίς να είναι όλα μηδέν και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα του Hölder για τα

- $a_1, \dots, a_n$ και $a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n$
- $b_1, \dots, b_n$ και $a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n$

και θα έχουμε τις ανισότητες:

$$a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + a_n(a_n + b_n)^{p-1} \leq$$

$$(a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \left[((a_1 + b_1)^{p-1})^q + \dots + ((a_n + b_n)^{p-1})^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + b_n(a_n + b_n)^{p-1} \leq$$

$$(b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} \left[((a_1 + b_1)^{p-1})^q + \dots + ((a_n + b_n)^{p-1})^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω ανισότητες βρίσκουμε ότι:

$$a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + a_n(a_n + b_n)^{p-1} + b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + b_n(a_n + b_n)^{p-1} \leq$$

$$\left[(a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} \right] \left[((a_1 + b_1)^{p-1})^q + \dots + ((a_n + b_n)^{p-1})^q \right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left[(b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} \right] \left[(a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p \right]^{\frac{1}{q}},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $q(p-1) = p$.

Άρα

$$(a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p \leq$$

$$\left[(b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} \right] \left[(a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p \right]^{\frac{1}{q}},$$

δηλαδή

$$\left[(a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p \right]^{1-\frac{1}{q}} \leq (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

και επομένως

$$\left[(a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17. Η ανισότητα του Popoviciu. Έστω $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση. Τότε για κάθε τριάδα x, y, z του Δ ισχύει:

$$\left| f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq \frac{2}{3} \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right) \right| \quad (1.20)$$

Για την απόδειξη (βλ. και [32]) μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να δεχθούμε ότι $x \leq y \leq z$. Αν και οι δύο ανισότητες είναι ισότητες τότε η αποδεικτέα ισχύει. Υποθέτουμε ότι τουλάχιστον μία είναι γνήσια ανισότητα. Το $\frac{x+y}{2}$ είναι μεταξύ των x, y , το $\frac{y+z}{2}$ είναι μεταξύ των y, z και τα $\frac{x+y+z}{3}$ και $\frac{x+z}{2}$ είναι, γενικά, μεταξύ των x, z . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ως προς την θέση του $\frac{x+y+z}{3}$ σε σχέση με το y που μας οδηγούν, η κάθε μια, σε απόδειξη της 1.20.

Περίπτωση 1 $y \leq \frac{x+y+z}{3}$. Στην περίπτωση αυτή επειδή έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$y \leq \frac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow 3y \leq x+y+z \Leftrightarrow y \leq \frac{x+z}{2},$$

$$\frac{x+z}{2} \geq \frac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow 3y+3z \geq 2x+2y+2z \Leftrightarrow y \leq \frac{x+z}{2}$$

και

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2x+2y+2z \geq 3x+3y \Leftrightarrow z \geq \frac{x+y}{2}$$

συνάγουμε την ακόλουθη διάταξη:

$$x \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq y \leq \frac{x+z}{2} \leq \frac{y+z}{2} \leq z.$$

Θα υπάρχουν $\lambda, \mu \in [0, 1]$ ώστε

$$\frac{x+z}{2} = (1-\lambda) \frac{x+y+z}{3} + \lambda z, \quad \frac{y+z}{2} = (1-\mu) \frac{x+y+z}{3} + \mu z.$$



Tiberiu Popoviciu
1906–1975

Λύνοντας ως προς λ, μ βρίσκουμε

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+z-2y}{2z-x-y}, \quad \mu = \frac{1}{2} \cdot \frac{y+z-2x}{2z-x-y},$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$\lambda + \mu = \frac{1}{2}.$$

Από την ανισότητα του Jensen έχουμε:

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) = f\left((1-\lambda)\frac{x+y+z}{3} + \lambda z\right) \leq (1-\lambda)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \lambda f(z),$$

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) = f\left((1-\mu)\frac{x+y+z}{3} + \mu z\right) \leq (1-\mu)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \mu f(z),$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$

Προσθέτοντας τις τρεις αυτές ανισότητες βρίσκουμε:

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq$$

$$(2-\lambda-\mu)f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (\lambda+\mu)f(z) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y),$$

από την οποία προκύπτει ότι

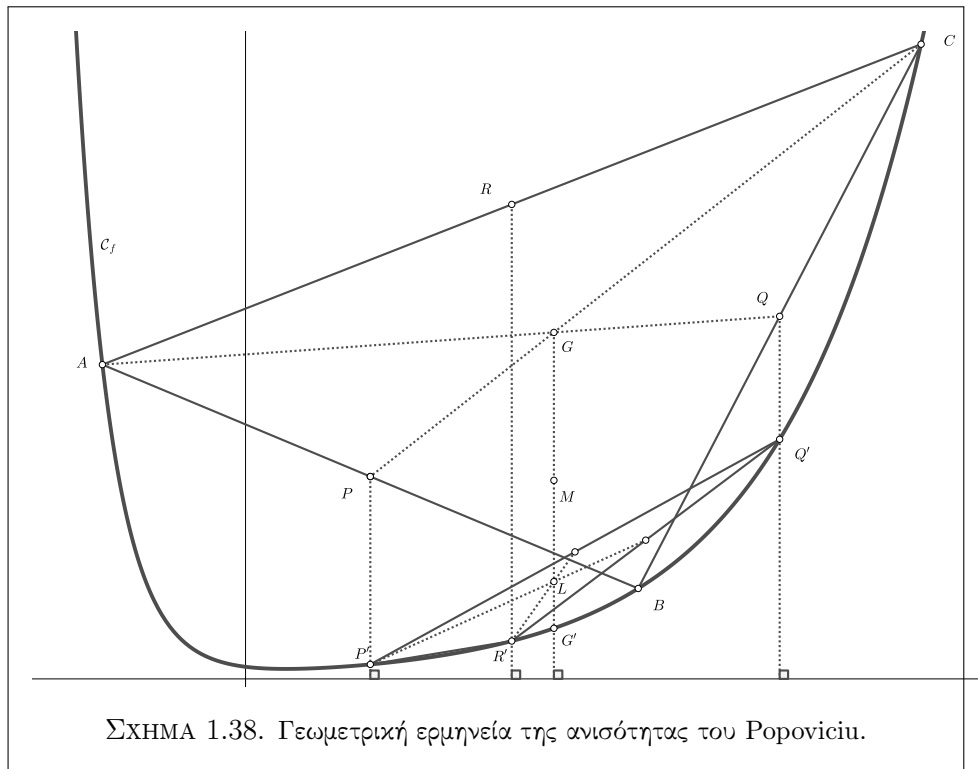
$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{3}{2}f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{1}{2}(f(x) + f(z) + f(y)).$$

Περίπτωση 2 $\frac{x+y+z}{3} \leq y$. Εργαζόμαστε όμοια.

ΣΧΟΛΙΟ 22. Η ανισότητα 1.20 γράφεται

$$\frac{f\left(\frac{x+z}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{3} \leq \frac{f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{1}{3}(f(x) + f(z) + f(y))}{2}.$$

Επομένως η ανισότητα Popoviciu μας πληροφορεί ότι αν πάρουμε τρία σημεία A, B, C στην γραφική παράσταση $\mathcal{C}_f$ μια κυρτής συνάρτησης f , τα μέσα P, Q, R των AB, BC, CA , το κέντρο βάρους G του ABC και φέρουμε από τα P, Q, R, G κάθετες στον $x'x$ που τέμνουν την $\mathcal{C}_f$ στα P', Q', R', G' τότε το μέσο M του $G'G$ είναι πάνω από το κέντρο βάρους L του $P'Q'R'$ (ΣΧΗΜΑ 1.38).



1.13.3 Κυρτότητα και ολοκλήρωση.

Στα προηγούμενα είδαμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του να είναι κυρτή σε αυτό. Όλες οι συνθήκες ενέπλεκαν τιμές της συνάρτησης ή της παραγώγου της. Παραθέτουμε τη μεταγραφή ορισμένων από αυτές:

Γνησίως αύξουσα παράγωγος.

$$f'(x) < f'(x+h)$$

για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ και κάθε $h > 0$ με $x+h$ εσωτερικό του Δ

Η γραφική παράσταση πάνω από την εφαπτομένη.

$$f(x+h) > f'(x)h + f(x)$$

για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ και κάθε $h \neq 0$ με $x+h$ εσωτερικό του Δ

Το τόξο κάτω από την χορδή.

$$f(x+t) < \frac{f(x+h) - f(x)}{h}t + f(x)$$

για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , κάθε $h \neq 0$ με $x + h$ εσωτερικό του Δ και $t \neq 0$ με $x + t$ μεταξύ x και $x + h$

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη κυρτότητας με όρους ολοκλήρωσης (βλ. και [16] σελ. 98 ασκ. 125):

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 52. Έστω f συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν για κάθε $x \in \Delta$ και κάθε $h > 0$ ώστε $x \pm h \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) < \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή. Έστω $y = ax + b$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(x, f(x))$. Τότε για όλα τα $t \in [x-h, x+h]$ είναι $f(t) \geq at + b$ και το ίσον ισχύει μόνο για $t = x$. Επομένως:

$$\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt > \frac{\int_{x-h}^{x+h} (at + b) dt}{2h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2axh + 2bh}{h} = ax + b = f(x).$$

Αντιστρόφως τώρα υποθέτουμε ότι η ανισότητα μας ισχύει και θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή. Αρκεί να δείξουμε (ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 29) ότι η μέγιστη τιμή της f σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του Δ επιτυγχάνεται μόνο σε κάποιο από τα άκρα του και όχι σε εσωτερικό σημείο. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε θα υπάρχει κάποιο κλειστό υποδιάστημα I του Δ τέτοιο ώστε η μέγιστη τιμή της f σε αυτό να επιτυγχάνεται σε κάποιο εσωτερικό σημείο x . Θεωρούμε κατάλληλο h ώστε $[x-h, x+h] \subseteq I$. Φυσικά και πάλι η μέγιστη τιμή της f στο $[x-h, x+h]$ επιτυγχάνεται στο x και ενδεχομένως και σε άλλα σημεία. Θα είναι $f(t) \leq f(x)$ για όλα τα $t \in [x-h, x+h]$ και επομένως:

$$f(x) < \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(x) dt = \frac{1}{2h} 2hf(x) = f(x),$$

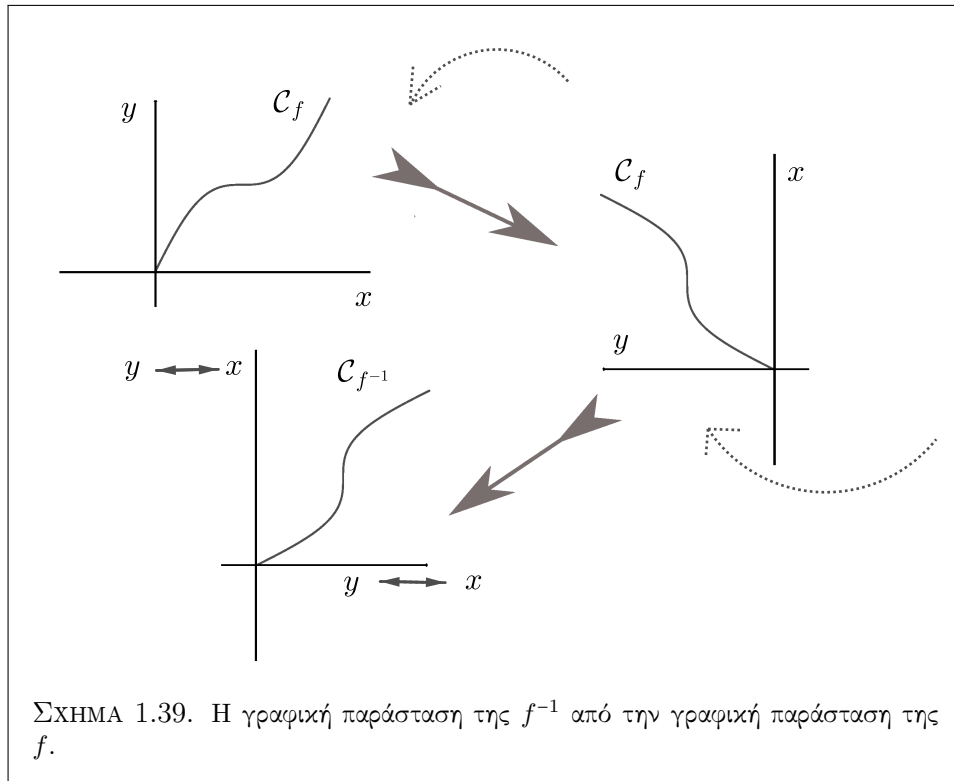
πράγμα αδύνατον.

Ο.Ε.Δ.

1.13.4 Η ανισότητα του Young για ολοκληρώματα.

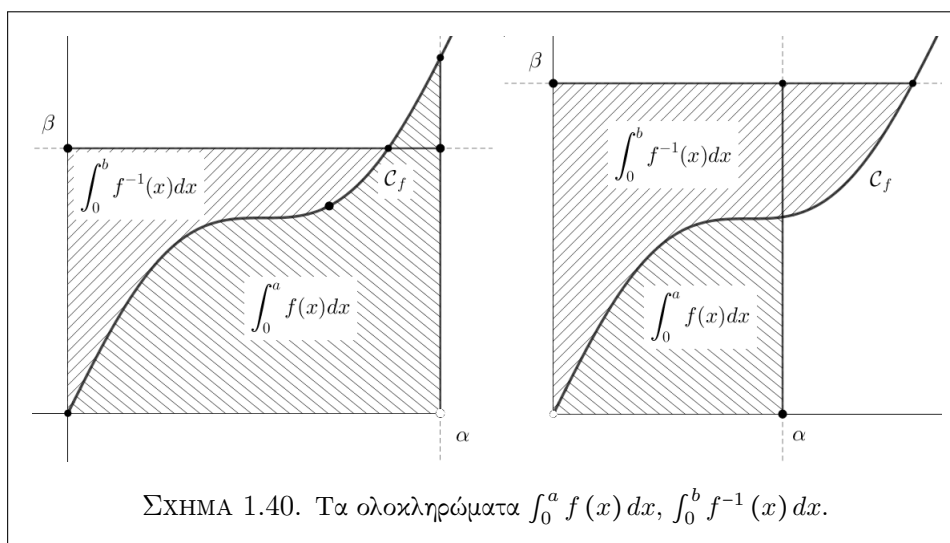
Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$. Η f απεικονίζει το $[0, +\infty)$ σε κάποιο διάστημα J του οποίου το κάτω άκρο είναι μηδέν. Η f^{-1} είναι όπως εύκολα αποδεικνύεται γνησίως αύξουσα και, όπως επίσης εύκολα αποδεικνύεται με τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό συνεχής. ΓΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΤΟΣ ΘΕΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ Η ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΣ f^{-1} ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΤΕΘΕΙ ΩΣ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΥΠΟΘΕΣΗ. Αν έχουμε την γραφική παράσταση C_f της f μπορούμε ως γνωστόν να έχουμε και την γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της αντίστροφης της f^{-1} παίρνοντας την συμμετρική της $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y = x$. Ωστόσο μπορούμε να «βλέπουμε» την γραφική παράσταση της f^{-1} μόνο έχοντας χαραγμένη την C_f . Αρκεί να φαντασθούμε ότι περιστρέφουμε

το χαρτί σχεδίασης, πηγαίνουμε πίσω από αυτό και εναλλάσσοντας τα ονόματα των αξόνων. Πιο τυπικά αυτό επιτυγχάνεται με μία στροφή γύρω από την αρχή των αξόνων κατά 90° αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, μία περιστροφή γύρω από τον κάθετο άξονα (που είναι ο «παλιός» των x) και μια εναλλαγή στα ονόματα των αξόνων (ΣΧΗΜΑ 1.39).



Ας θεωρήσουμε θετικούς αριθμούς $a > 0$ και $b > 0$ από το σύνολο τιμών της f . Αφού τόσο η f όσο και η f^{-1} παίρνουν μη αρνητικές τιμές τα ολοκληρώματα $\int_0^a f(x) dx$ και $\int_0^b f^{-1}(x) dx$ εκφράζουν εμβαδά χωρίων τα οποία μπορούμε να δούμε σε ένα διάγραμμα που περιέχει μόνο την γραφική παράσταση της f .

Απλή εξέταση των σχημάτων που καλύπτουν τις περιπτώσεις $f(a) \geq b$ και $f(a) \leq b$ δείχνει ότι το άθροισμα των δύο ολοκληρωμάτων $\int_0^a f(x) dx$ και $\int_0^b f^{-1}(x) dx$ αντιστοιχεί στο εμβαδόν ενός χωρίου που είναι τουλάχιστον όσο το εμβαδόν ab του ορθογωνίου με κορυφές $(0,0)$, $(a,0)$, $(a,f(a))$, $(0,b)$. Η δε ισότητα ισχύει μόνο αν $b = f(a)$. Επομένως θα ισχύει η πρόταση



ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$. Αν $a \geq 0$ και b είναι μία τιμή της f τότε ισχύει:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx \geq ab \quad (1.21)$$

η δε ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $b = f(a)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πιο πάνω δόθηκε μια γεωμετρική απόδειξη. Παρόμοια επιχειρηματολογία χρησιμοποιείται στο [47]. Ωστόσο τα γεωμετρικά επιχειρήματα σε θέματα της Ανάλυσης εμπεριέχουν κινδύνους και οπωσδήποτε είναι ανοικτά σε κριτική. Στο [11] περιέχεται μια αποτίμηση διαφόρων αποδείξεων και δίνεται μια αναλυτική απόδειξη. Αναλυτική απόδειξη σε γενικότερο πλαίσιο υπάρχει και στο [16]. Ωστόσο οι αποδείξεις αυτές που καλύπτουν την γενική περίπτωση είναι αρκετά τεχνικές. Στα επόμενα θα δούμε μία μεικτή απόδειξη που περιορίζει τα γεωμετρικά επιχειρήματα και δύο ακόμη αναλυτικές αποδείξεις η μία με ενισχυμένες υποθέσεις. Ας σημειωθεί ότι και στο άρθρο του Young όπου εμφανίστηκε η ανισότητα (Βλ. [50]) η πρόταση διατυπώθηκε με ισχυρότερες υποθέσεις (Βλ. ΣΧΟΛΙΟ 23).

Απόδειξη με f συνεχή και ένα γεωμετρικό επιχείρημα. Βλ. και [49].

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Είναι $F'(x) = f(x)$ $\hat{=}$, επομένως η F είναι κυρτή. Άρα για δοθέν x_0 είναι

$$F(x) \geq F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0),$$

για όλα τα x με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = x_0$. Παίρνοντας $x_0 = f^{-1}(b)$ οπότε $F'(x_0) = f(x_0) = f(f^{-1}(b)) = b$ έχουμε ότι για όλα τα x

είναι

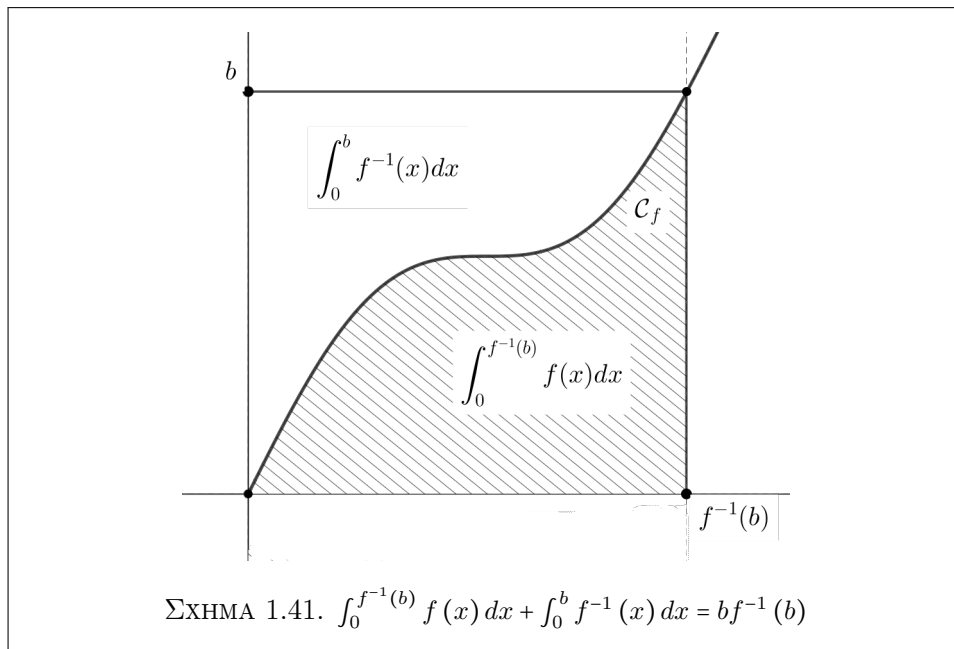
$$\int_0^x f(t) dt \geq b(x - f^{-1}(b)) + \int_0^{f^{-1}(b)} f(t) dt$$

με το «ίσον» να ισχύει αν και μόνο αν $x = f^{-1}(b)$. Παίρνοντας τώρα $x = a$ και γράφοντας αντί t το x έχουμε

$$\int_0^a f(x) dx \geq b(a - f^{-1}(b)) + \int_0^{f^{-1}(b)} f(x) dx \quad (*),$$

και το ίσον ισχύει μόνο όταν $a = f^{-1}(b)$ ή αλλιώς $b = f(a)$. Αλλά (ΣΧΗΜΑ 1.41) είναι

$$\int_0^{f^{-1}(b)} f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx = b f^{-1}(b) \quad (1.22)$$



Επομένως η (*) γράφεται:

$$\int_0^a f(t) dt \geq ab - \int_0^b f(x) dx,$$

που ισοδυναμεί με την αποδεικτέα ανισότητα, το δε «ίσον» ισχύει μόνο στην περίπτωση $b = f(a)$.

Απόδειξη με f παραγωγίσιμη με θετική παράγωγο. Βλ. και [50], [29] σελ. 49, [28] σελ. 292.

Έστω

$$F(x) = xb - \int_0^x f(t) dt.$$

Είναι $F'(x) = b - f(x)$ και επομένως για $0 \leq x < f^{-1}(b)$ είναι $F'(x) > 0$ ενώ για $x > f^{-1}(b)$ είναι $F'(x) < 0$. Άρα η F παρουσιάζει μέγιστο στο $f^{-1}(b)$ που είναι το $bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(t) dt$ και το μέγιστο πραγματοποιείται μόνο αν $x = f^{-1}(b)$. Άρα

$$ab - \int_0^a f(t) dt \leq bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(t) dt.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(t) dt &= bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} (t)' f(t) dt = \\ &= bf^{-1}(b) - \left([tf(t)]_0^{f^{-1}(b)} - \int_0^{f^{-1}(b)} tf'(t) dt \right) = \\ &= bf^{-1}(b) - f^{-1}(b)f(f^{-1}(b)) + \int_0^{f^{-1}(b)} tf'(t) dt = \\ &= \int_0^{f^{-1}(b)} tf'(t) dt \underset{f(t)=u, t=f^{-1}(u)}{=} \int_0^b f^{-1}(u) du \end{aligned}$$

από τις οποίες έχουμε την αποδεικτέα ανισότητα με το «ίσον» να ισχύει μόνο όταν $b = f(a)$.

Απόδειξη με f συνεχή χωρίς το γεωμετρικό επιχείρημα. Μπορούμε να εργασθούμε με την κυρτότητα όπως στην πρώτη απόδειξη και να δώσουμε μια αναλυτική απόδειξη της ισότητας 1.22. Θέτοντας $b = f(c)$ η 1.22 γράφεται:

$$\int_0^c f(x) dx + \int_0^{f(c)} f^{-1}(x) dx = cf(c)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$s(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x)$$

είναι ίση με το μηδέν για όλα τα x . Είναι $s(0) = 0$ και αρκεί να δείξουμε ότι η συνεχής s είναι σταθερή. Θα δείξουμε ότι σε κάθε $x_0 > 0$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο μηδέν¹³. Θα δείξουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = 0 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h}.$$

¹³Η ιδέα της απόδειξης προέρχεται από το <https://math.stackexchange.com/questions/1589918/youngs-inequality>.

Θα επαληθεύσουμε την πρώτη ισότητα. Η δεύτερη επαληθεύεται όμοια.
Για ευκολία στις ενδιάμεσες πράξεις θέτουμε

$$f^{-1} = g, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

Είναι:

$$\begin{aligned} & s(x_0 + h) - s(x_0) = \\ & F(x_0 + h) + G(f(x_0 + h)) - (x_0 + h)f(x_0 + h) - F(x_0) - G(f(x_0)) + x_0 f(x_0) = \\ & [F(x_0 + h) - F(x_0) - hf(x_0 + h)] + \\ & + [G(f(x_0 + h)) - G(f(x_0)) - (f(x_0 + h) - f(x_0))x_0] = \\ & \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0 + h)) dt + \int_{f(x_0)}^{f(x_0+h)} (g(t) - x_0) dt \end{aligned}$$

Είναι $f \uparrow, g \uparrow$ επομένως για $h > 0$ είναι

$$-h(f(x_0 + h) - f(x_0)) = h(f(x_0) - f(x_0 + h)) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0 + h)) dt \leq 0$$

Από την οποία έχουμε:

$$-(f(x_0 + h) - f(x_0)) \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0 + h)) dt}{h} \leq 0 \quad (*)$$

και:

$$\begin{aligned} 0 & \leq \int_{f(x_0)}^{f(x_0+h)} (g(t) - g(f(x_0))) dt = \int_{f(x_0)}^{f(x_0+h)} (g(t) - x_0) dt \leq \\ & \int_{f(x_0)}^{f(x_0+h)} (g(f(x_0 + h)) - x_0) dt = \int_{f(x_0)}^{f(x_0+h)} (x_0 + h - x_0) dt = h(f(x_0 + h) - f(x_0)). \end{aligned}$$

Άρα

$$0 \leq \frac{\int_{f(x_0)}^{f(x_0+h)} (g(t) - x_0) dt}{h} \leq f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (**)$$

Αφού η f είναι συνεχής έχουμε από τις (*), (**) έχουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0 + h)) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_{f(x_0)}^{f(x_0+h)} (g(t) - x_0) dt}{h} = 0$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = 0.$$

ΣΧΟΛΙΟ 23. Ο Young έθεσε την υπόθεση ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) > 0$ για όλα τα x και απέδειξε την ελαφρώς γενικότερη ανισότητα:

$$ab - pq \leq \int_p^a f(x) dx + \int_q^b f^{-1}(x) dx,$$

όπου $0 < p$ και $q = f(p)$. Αυτή προκύπτει από την 1.21 αφού είναι ισοδύναμη με την

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx + \left(\int_0^p f(x) dx + \int_0^q f^{-1}(x) dx - pq \right),$$

στην οποία $\int_0^p f(x) dx + \int_0^q f^{-1}(x) dx - pq = 0$ αφού $q = f(p)$.

ΣΧΟΛΙΟ 24. Η ανισότητα του Young 1.16 μπορεί να αποδειχθεί ως συνέπεια της 1.21 ως εξής: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^{p-1}$ ορισμένη στο $[0, +\infty)$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα αφού $\frac{1}{p} < 1$ και επομένως $p > 1$. Αυτή έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{p-1}}$. Ένας εύκολος υπολογισμός δίνει ότι $\frac{1}{p-1} = q - 1$. Άρα:

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

1.13.5 Οι ανισότητες των Hölder και Minkowski για ολοκληρώματα.

Με την βοήθεια της ανισότητας του Hölder μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα του Hölder για ολοκληρώματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 53. (**Ανισότητα του Hölder για ολοκληρώματα**) Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $[a, b]$ οι οποίες παίρνουν μόνο μη αρνητικές τιμές και p, q θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ισχύει:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.23)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν κάποια από τις f ή g μηδενίζεται σε όλα τα σημεία του $[a, b]$ τότε προφανώς η αποδεικτέα ισχύει. Αν όχι θα υπάρχει ένα τουλάχιστον x για το οποίο $f(x) \neq 0$ και ένα τουλάχιστον x για το οποίο είναι $g(x) \neq 0$ και αφού οι f και g δεν παίρνουν αρνητικές τιμές οι αριθμοί

$$P = \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad Q = \left(\int_a^b g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

είναι θετικοί και η αποδεικτέα ισοδυναμεί με την:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{P} \cdot \frac{g(x)}{Q} dx \leq 1 \quad (*) .$$

Για τυχόν $x \in [a, b]$ λόγω της 1.17 ισχύει

$$\frac{f(x)}{P} \cdot \frac{g(x)}{Q} \leq \frac{\left(\frac{f(x)}{P}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{g(x)}{Q}\right)^q}{q},$$

οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{PQ} dx \leq \int_a^b \frac{\left(\frac{f(x)}{P}\right)^p}{p} dx + \int_a^b \frac{\left(\frac{g(x)}{Q}\right)^q}{q} dx,$$

ή αλλιώς ότι

$$\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{PQ} dx \leq \frac{1}{pP^p} \int_a^b f^p(x) dx + \frac{1}{qQ^q} \int_a^b g^q(x) dx.$$

Αλλά το β' μέλος της παραπάνω ανισότητας γράφεται

$$\frac{P^p}{pP^p} + \frac{Q^q}{qQ^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Επομένως η (*) ισχύει άρα κα η αποδεικτέα.

Ο.Ε.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 25. Η ανισότητα του Hölder για ολοκληρώματα για $p = q = 2$ μας δίνει την ανισότητα **Cauchy-Schwarz για ολοκληρώματα**:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right) \quad (1.24)$$

Φυσικά η ανισότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί και αυτοτελώς με σχολικές γνώσεις (π.χ. βλ [67]).

Από την ανισότητα του Hölder για ολοκληρώματα μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα του Minkowski για ολοκληρώματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ ♦ 54. (**Ανισότητα του Minkowski για ολοκληρώματα**) Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $[a, b]$ οι οποίες παίρνουν μόνο μη αρνητικές τιμές και $p > 1$. Ισχύει:

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.25)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ιδέα της απόδειξης είναι παρόμοια με εκείνη που υπάρχει στο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16. Με q τέτοιο ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ είναι:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))^p dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) (f(x) + g(x))^{p-1} dx =$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x)(f(x)+g(x))^{p-1} dx + \int_a^b g(x)(f(x)+g(x))^{p-1} dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \\
& \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^{q(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} + \\
& \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^{q(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \\
& \left(\left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^p dx \right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Αν τώρα κάποια από τις f, g είναι παντού μηδέν η αποδεικτέα αληθεύει. Αν όχι τότε το $\int_a^b (f(x)+g(x))^p dx$ είναι θετικό και από τα παραπάνω έχουμε

$$\frac{\int_a^b (f(x)+g(x))^p dx}{\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^p dx \right)^{1-\frac{1}{p}}} \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

δηλαδή την αποδεικτέα.

Ο.Ε.Δ.

1.13.6 Η ανισότητα του Cauchy για ολοκληρώματα.

Η ανισότητα της 12 μπορεί να επεκταθεί σε ανισότητα για ολοκληρώματα με άμεσο τρόπο:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 55. (Ανισότητα του Cauchy για ολοκληρώματα) Έστω f συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$ η οποία παίρνει Θετικές τιμές. Ισχύει :

$$e^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (1.26)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τυχόντα n εφαρμόζουμε την ανισότητα του Cauchy για μη τους n -αριθμούς

$$f(a), f\left(a + \frac{b-a}{n}\right), \dots, f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right),$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \sqrt[n]{f(a) f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) \dots f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right)} \leq \\
& \frac{f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right)}{n},
\end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει η

$$(b-a) e^{\ln\left(\sqrt[n]{f(a) f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) \dots f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right)}\right)} \leq$$

$$\frac{b-a}{n} \left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right) \right),$$

και επομένως η

$$(b-a) e^{\frac{1}{b-a} \left(\frac{b-a}{n} (\ln f(a) + \ln f(a + \frac{b-a}{n}) + \dots + \ln f(a + (n-1) \frac{b-a}{n})) \right)} \leq \frac{b-a}{n} \left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right) \right).$$

Παίρνοντας όρια για $n \rightarrow +\infty$ έχουμε την αποδεικτέα.

Ο.Ε.Δ.

1.13.7 Η γενική μορφή της ανισότητας Karamata

Θα δώσουμε στην συνέχεια μια σημαντική ανισότητα που οφείλεται στον Σέρβο μαθηματικό Jovan Karamata ([22], [20]).

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 56. * Η γενική ανισότητα του Karamata. Έστω f μια κυρτή συνάρτηση στο Δ , $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ και $y_1 \geq y_2 \geq \dots > y_n$ στοιχεία του Δ . Έστω ακόμη $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$\lambda_1 x_1 \geq \lambda_1 y_1$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geq \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

...

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} \geq \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_{n-1} y_{n-1}$$

αλλά:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_{n-1} y_{n-1} + \lambda_n y_n.$$

Τότε ισχύει:

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq \lambda_1 f(y_1) + \lambda_2 f(y_2) + \dots + \lambda_n f(y_n)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ονομάζουμε:

$$X_1 = \lambda_1 x_1, \quad Y_1 = \lambda_1 y_1$$

$$X_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad Y_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

...

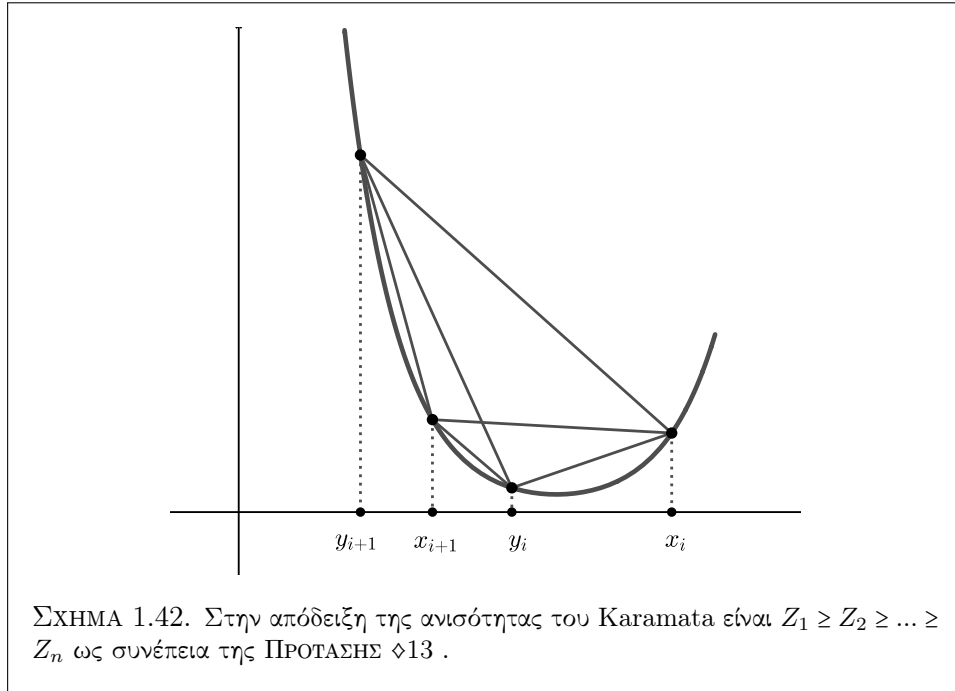
$$X_{n-1} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}, \quad Y_{n-1} = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_{n-1} y_{n-1}$$

$$X_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n, \quad Y_n = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n$$

Παρατηρούμε ότι για όσα ζεύγη x_i, y_i είναι $x_i = y_i$ αυτά δεν επηρεάζουν την αποδεικτέα και μπορούν να διαγραφούν οι αντίστοιχοι προσθετέοι. Άρα χωρίς



Jovan Karamata
1902–1967



βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_i \neq y_i$ για όλα τα i . Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε:

$$\frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} = Z_1, \frac{f(x_2) - f(y_2)}{x_2 - y_2} = Z_2, \dots, \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = Z_n$$

Θα είναι (βλ. και ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 13$)

$$Z_1 \geq Z_2 \geq \dots \geq Z_n$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)) - (\lambda_1 f(y_1) + \lambda_2 f(y_2) + \dots + \lambda_n f(y_n)) = \\ & = \lambda_1 (f(x_1) - f(y_1)) + \lambda_2 (f(x_2) - f(y_2)) + \dots + \lambda_n (f(x_n) - f(y_n)) = \\ & = \lambda_1 Z_1 (x_1 - y_1) + \lambda_2 Z_2 (x_2 - y_2) + \dots + \lambda_n Z_n (x_n - y_n) = \\ & = Z_1 (\lambda_1 x_1 - \lambda_1 y_1) + Z_2 (\lambda_2 x_2 - \lambda_2 y_2) + \dots + Z_n (\lambda_n x_n - \lambda_n y_n) = \\ & = Z_1 (X_1 - Y_1) + Z_2 ((X_2 - X_1) - (Y_2 - Y_1)) + \dots + Z_n ((X_n - X_{n-1}) - (Y_n - Y_{n-1})) = \\ & = (Z_1 - Z_2)(X_1 - Y_1) + (Z_2 - Z_3)(X_2 - Y_2) + \dots + (Z_{n-1} - Z_n)(X_{n-1} - Y_{n-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟ 26. Από την απόδειξη της ανισότητας του Karamata φάνηκε ότι έστω και ένας προσθετέος από τους

$$(Z_1 - Z_2)(X_1 - Y_1), (Z_2 - Z_3)(X_2 - Y_2), \dots, (Z_{n-1} - Z_n)(X_{n-1} - Y_{n-1})$$

να είναι θετικός η ανισότητα είναι γνήσια.

1.13.7.1 Παραδείγματα εφαρμογής της ανισότητας του Karamata

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18. ¹⁴ Έστω a, b, c τα μήκη των πλευρών τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a \geq b \geq c$. Θα εφαρμόσουμε την ανισότητα του Karamata στην ειδική περίπτωση $n = 3$ για $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ στην κοίλη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για τους αριθμούς

$$x_1 = a + b - c, \quad x_2 = c + a - b, \quad x_3 = b + c - a,$$

$$y_1 = a, \quad y_2 = b, \quad y_3 = c.$$

για τους οποίους προφανώς ισχύει

$$x_1 \geq x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3.$$

Λόγω του ότι έχουμε κοίλη συνάρτηση η φορά της ανισότητας θα αντιστραφεί και έτσι έχουμε την αποδεικτέα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19. ¹⁵ Έστω $a_1, \dots, a_n$ θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^3}{a_n} + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν ονομάσουμε $b_i = \ln a_i$ η αποδεικτέα ισοδύναμα γράφεται:

$$e^{3b_1-b_2} + e^{3b_2-b_3} + \dots + e^{3b_{n-1}-b_n} + e^{3b_n-b_1} \geq e^{2b_1} + e^{2b_2} + \dots + e^{2b_{n-1}} + e^{2b_n} \quad (*)$$

Για την απόδειξη της (*) θα εφαρμόσουμε την ανισότητα του Karamata στην κυρτή συνάρτηση $f(x) = e^x$ με $\lambda_i = 1$ επιλέγοντας τους x_i, y_i με τρόπο ώστε:

- ο κάθε x_i να είναι κάποιος από τους αριθμούς $3b_1 - b_2, 3b_2 - b_3, \dots, 3b_{n-1} - b_n, 3b_n - b_1$.
- ο κάθε y_i να είναι κάποιος από τους αριθμούς $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{n-1}, 2b_n$.
- $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$
- $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$.

¹⁴Θέμα της Asian-Pacific Olympiad, 1996, βλ. και [21]

¹⁵Από το ρωσικό Κβαντ βλ. [21]

Επειδή όμως δεν γνωρίζουμε την διάταξη των αριθμών $3b_1 - b_2, 3b_2 - b_3, \dots, 3b_{n-1} - b_n, 3b_n - b_1$ χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

- συμβολίζουμε τον x_1 , που θα είναι ο μέγιστος με $3b_{i_1} - b_{i_1}^*$ όπου με i_1^* δηλώνουμε τον επόμενο φυσικό του του i_1 δηλαδή τον $i_1 + 1$ εκτός από την περίπτωση όπου ο i_1 είναι ο n οπότε ο i_1^* δηλώνει τον 1
- όμοια και για τον αμέσως επόμενο αριθμό x_2 που θα είναι ο μέγιστος των υπολοίπων αν αξαιρέσουμε τον x_1 γράφουμε $x_2 = 3b_{i_2} - b_{i_2}^*$ όπου η σημασία του i_2^* είναι ανάλογη με του i_1^* κ.ο.κ.

Με αυτό τον συμβολισμό θα έχουμε την διάταξη:

$$\underbrace{3b_{i_1} - b_{i_1}^*}_{x_1} \geq \underbrace{3b_{i_2} - b_{i_2}^*}_{x_2} \geq \dots \geq \underbrace{3b_{i_{n-1}} - b_{i_{n-1}}^*}_{x_{n-1}} \geq \underbrace{3b_{i_n} - b_{i_n}^*}_{x_n}$$

και με ανάλογο συμβολισμό την διάταξη:

$$\underbrace{2b_{j_1}}_{y_1} \geq \underbrace{2b_{j_2}}_{y_2} \geq \dots \geq \underbrace{2b_{j_{n-1}}}_{y_{n-1}} \geq \underbrace{2b_{j_n}}_{y_n}.$$

Τώρα έστω φυσικός m με $1 \leq m \leq n$.

Αν $1 \leq m \leq n - 1$

$$x_1 + \dots + x_m = (3b_{i_1} - b_{i_1}^*) + (3b_{i_2} - b_{i_2}^*) + \dots + (3b_{i_m} - b_{i_m}^*)$$

ενώ αφού οι προσθετέοι του β' μέλους της παραπάνω ισότητας είναι οι πρώτοι m πιο μεγάλοι προσθετέοι από τους $3b_{i_k} - b_{i_k}^*$ θα είναι

$$(3b_{i_1} - b_{i_1}^*) + (3b_{i_2} - b_{i_2}^*) + \dots + (3b_{i_m} - b_{i_m}^*) \geq (3b_{j_1} - b_{j_1}^*) + (3b_{j_2} - b_{j_2}^*) + \dots + (3b_{j_m} - b_{j_m}^*)$$

Στο β' μέλος της παραπάνω ανισότητας αφαιρούνται οι $b_{j_1}^*, b_{j_2}^*, \dots, b_{j_m}^*$.

Αν αντί αυτών αφαιρεθούν οι $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_m}$ που είναι κατά σειράν οι m μεγαλύτεροι από τους b_{j_k} θα προκύψει ένας μικρότερος ή ίσος αριθμός δηλαδή:

$$(3b_{j_1} - b_{j_1}^*) + (3b_{j_2} - b_{j_2}^*) + \dots + (3b_{j_m} - b_{j_m}^*) \geq (3b_{j_1} - b_{j_1}) + (3b_{j_2} - b_{j_2}) + \dots + (3b_{j_m} - b_{j_m}).$$

Αλλά:

$$(3b_{j_1} - b_{j_1}) + (3b_{j_2} - b_{j_2}) + \dots + (3b_{j_m} - b_{j_m}) = y_1 + y_2 + \dots + y_m.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες συνάγουμε ότι:

$$x_1 + \dots + x_m \geq y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

Αν $m = n$ Όταν έχουμε n προσθετέους είναι:

$$x_1 + \dots + x_n = (3b_{i_1} + 3b_{i_2} + \dots + 3b_{i_n}) - (b_{i_1^*} + b_{i_2^*} + \dots + b_{i_n^*}) = y_1 + \dots + y_n$$

διότι τα αθροίσματα στις δύο παρενθέσεις περιέχουν όλα τα b_i .

Επομένως ικανοποιούνται οι υποθέσεις για την εφαρμογή της ανισότητας του Karamata και το αποδεικτέο έπεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20. Για τους θετικούς αριθμούς a_i, b_i με $i = 1, \dots, n$ είναι γνωστό ότι:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n,$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n,$$

και

$$a_1 \geq b_1,$$

$$a_1 a_2 \geq b_1 b_2,$$

...

$$a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \geq b_1 b_2 \cdot \dots \cdot b_{n-1},$$

$$a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \geq b_1 b_2 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot b_n.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν πάρουμε τους λογαρίθμους στις δοθείσες σχέσεις έχουμε ότι

$$\ln a_1 \geq \ln b_1$$

$$\ln a_1 + \ln a_2 \geq \ln b_1 + \ln b_2$$

...

$$\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_{n-1} \geq \ln b_1 + \ln b_2 + \dots + \ln b_{n-1}.$$

$$\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_{n-1} + \ln a_n = \ln b_1 + \ln b_2 + \dots + \ln b_{n-1} + \ln b_n.$$

Θεωρούμε τώρα την κυρτή συνάρτηση $f(x) = e^x$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα του Karamata στους αριθμούς $\ln a_i, \ln b_i$ με $i = 1, \dots, n$ και $\lambda_i = 1$. Συμπεραίνουμε ότι

$$f(\ln a_1) + f(\ln a_2) + \dots + f(\ln a_n) \geq f(\ln b_1) + f(\ln b_2) + \dots + f(\ln b_n),$$

από την οποία προκύπτει η αποδεικτέα.

1.13.8 Η ανισότητα Karamata συνεπάγεται την ανισότητα Jensen.

Προηγουμένως είδαμε αυτοτελείς αποδείξεις των ανισοτήτων Jensen και Karamata. Εδώ θα δούμε πως η ανισότητα Jensen προκύπτει ως εφαρμογή της ανισότητας Karamata.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ της ανισότητας Jensen από την ανισότητα Karamata. Παρατηρούμε ότι αν κάποια από τα x_i στην ανισότητα του Jensen είναι μεταξύ τους ίσα τότε μπορούν στο α μέλος να γραφούν σαν ένα με συντελεστή το άθροισμα των αντιστοίχων λ_i και το αυτό να γίνει και για τα $f(x_i)$ στο δεύτερο μέλος. Αναγόμεναι έτσι σε μία ανισότητα με λιγότερα αλλά άνισα x_i . Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την ανισότητα Jensen με τα x_i να είναι ανά δύο διάφορα ως πούμε

$$x_1 > x_2 > \dots > x_n.$$

Κρατάμε τα x_i ως έχουν και θεωρούμε τα y_i να είναι όλα ίσα με το $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ δηλαδή:

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Θα επαληθεύσουμε πρώτα ότι τα x_i, y_i, λ_i ικανοποιούν τις άλλες προϋποθέσεις που οδηγούν στην ανισότητα του Karamata δηλαδή τις:

$$\lambda_1 x_1 \geq \lambda_1 y_1$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geq \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

...

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} \geq \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{n-1} y_{n-1}$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$$

Γενικά θα δείξουμε ότι για $k = 1, \dots, n$ ισχύει

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \geq \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k \quad (*)$$

και ότι ειδικά για $k = n$ η $(*)$ ισχύει σαν ισότητα. Πράγματι η $(*)$ ισοδυναμεί με τις:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \geq \lambda_1 (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) + \dots + \lambda_k (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$$

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \geq (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$$

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} \geq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \quad (**)$$

Η $(**)$, προφανώς, για $k = n$ ισχύει σαν ισότητα. Η ισχύς της για τις άλλες ενδιαμέσες τιμές του k προκύπτει από τον παρακάτω ισχυρισμό:

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ Για $1 \leq k \leq n-1$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ θετικά ισχύει:

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} \geq \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1}}$$

Διότι ως συνέπεια του ισχυρισμού έχουμε ότι

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} \geq \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1}} \geq$$

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} + \lambda_{k+2} x_{k+2}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k + \lambda_{k+1} + \lambda_{k+2}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\underbrace{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}_1}$$

από την οποία συνάγεται η (**).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΥ. Συμβολίζουμε με

$$X = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k, \quad \Lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$$

οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\frac{X}{\Lambda} \geq \frac{X + \lambda_{k+1} x_{k+1}}{\Lambda + \lambda_{k+1}}$$

που ισοδυναμεί με την $\frac{X}{\Lambda} \geq x_{k+1}$. Η τελευταία ισχύει διότι ο $\frac{X}{\Lambda}$ είναι ο σταθμικός μέσος των $x_1, \dots, x_k$ με βάρη τα $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ και ο οποίος είναι μεγαλύτερος ή όσος από των ελάχιστο των $x_1, \dots, x_k$ που είναι ο x_k συνεπώς είναι και μεγαλύτερος ή ίσος του x_{k+1} .

Η ολοκλήρωση της απόδειξης είναι πιο εύκολη από τον έλεγχο των υποθέσεων: Από την ανισότητα του Karamata έχουμε ότι

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq \lambda_1 f(y_1) + \dots + \lambda_n f(y_n)$$

και αφού

$$f(y_1) = \dots = f(y_n) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$$

είναι

$$\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n).$$

Ο.Ε.Δ.

1.13.9 Η ανισότητα Jensen για ολοκληρώματα.

Η ανισότητα του Jensen μπορεί να επεκταθεί και σε ολοκληρώματα. Έστω f κυρτή στο $\mathbb{R}$ και g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Για να βρούμε το $\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ αρκεί να πάρουμε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} g\left(\alpha + k \frac{\beta - \alpha}{n}\right),$$

να βρούμε το όριο τους για $n \rightarrow +\infty$ και να πολλαπλασιάσουμε επί $\beta - \alpha$. Αλλά από την ανισότητα του Jensen έχουμε

$$f\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} g\left(\alpha + k \frac{\beta - \alpha}{n}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(g\left(\alpha + k \frac{\beta - \alpha}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{k=1}^n \frac{\beta - \alpha}{n} f\left(g\left(\alpha + k \frac{\beta - \alpha}{n}\right)\right)$$

Αφού η f είναι συνεχής το όριο για $n \rightarrow +\infty$ του αριστερού μέλους είναι $f\left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx\right)$. Το όριο του δεξιού μέλους είναι $\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) dx$. Η ανισότητα που προκύπτει συνοψίζεται στην παρακάτω πρόταση που συνοδεύεται με άλλη μία απόδειξη:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 57. Η ανισότητα του Jensen για ολοκληρώματα. Αν g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και f κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε

$$f\left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx\right) \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) dx$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η f είναι κυρτή για t_0 σταθερό και κάθε t ισχύει

$$f(t) \geq f'(t_0)(t - t_0) + f(t_0)$$

Επιλέγουμε:

$$t_0 = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx, \quad t = g(x)$$

Άρα

$$f(g(x)) \geq f'\left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx\right)\left(g(x) - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx\right) + f\left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx\right)$$

Ολοκληρώνοντας στο $[\alpha, \beta]$ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) dx &\geq \overbrace{f'\left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx\right)\left(\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx - \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx\right)(\beta - \alpha)\right)}^0 + \\ &\quad + f\left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx\right)(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

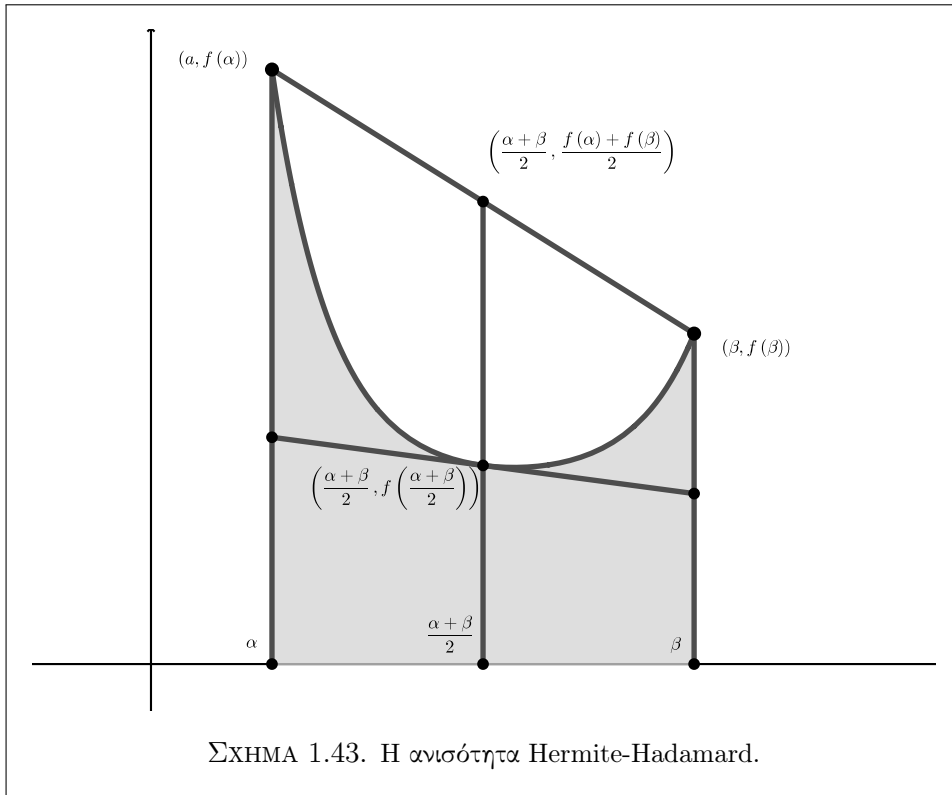
από την οποία έχουμε την αποδεικτέα.

Ο.Ε.Δ.

1.13.10 Η ανισότητα Hermite-Hadamard

Έστω μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ που παίρνει μη αρνητικές τιμές (σχήμα 1.43).

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right)$ ορίζει με τον x' και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ ένα τραπέζιο εμβαδού E_1 το οποίο είναι μικρότερο από το εμβαδό E_2 του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον x' και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$. Αυτό με την σειρά του είναι μικρότερο από το εμβαδόν E_3 του τραπεζίου που έχει κορυφές τα σημεία $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$, $(\beta, f(\beta))$, $(\alpha, f(\alpha))$.



ΣΧΗΜΑ 1.43. Η ανισότητα Hermite-Hadamard.

Στην σχέση

$$E_1 < E_2 < E_3$$

αντικαθιστούμε τις τιμές των εμβαδών και βρίσκουμε:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$$

Για να δουλέψουμε με εμβαδά υποθέσαμε ότι η f δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Αν αυτή η προϋπόθεση δεν ισχύει μπορούμε να θεωρήσουμε την ελάχιστη τιμή της συνεχούς f στο $[\alpha, \beta]$ έστω m και να προσθέσουμε στην f την απόλυτη τιμή της. Θα έχουμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) + |m|$ που είναι μη αρνητική και φυσικά κυρτή. Μπορούμε σε αυτή να επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία και θα βρούμε:

$$g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx < \frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}(\beta-\alpha)$$

που μας δίνει την

$$\left(f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + |m|\right)(\beta-\alpha) <$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + |m|) dx < \frac{f(\alpha) + |m| + g(\beta) + |m|}{2} (\beta - \alpha).$$

Σε αυτήν το $|m|$ διαγράφεται από όλα τα μέλη και έχουμε την προηγούμενη ανισότητα. Αποδείξαμε την ανισότητα Hermite-Hadamard της οποίας παρακάτω δίνουμε άλλη μία απόδειξη:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 58. Η ανισότητα Hermite-Hadamard. Αν η f είναι κυρτή στο $[\alpha, \beta]$ τότε ισχύει:

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)(\beta - \alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο x_0 του $[\alpha, \beta]$ και έχουμε την ανισότητα

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x) \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} (x - \alpha) + f(\alpha).$$

Επειδή στο πρώτο « $\leq$ » το «ίσον» ισχύει μόνο όταν $x = x_0$ και στο δεύτερο μόνο όταν $x = \alpha$ ή $x = \beta$ ολοκληρώνοντας θα έχουμε γνήσιες ανισότητες. Βρίσκουμε:

$$f'(x_0) \left[\frac{(x - x_0)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} + f(x_0)(\beta - \alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx <$$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \left[\frac{(x - \alpha)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} + f(\alpha)(\beta - \alpha),$$

ή

$$\frac{1}{2} f'(x_0)(\beta - \alpha) \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - x_0 \right) + f(x_0)(\beta - \alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha).$$

Θέτοντας όπου $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ έχουμε το αποδεικτέο.

O.E.Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 27. Ας μεταγράψουμε το πρώτο σκελος της ανισότητας Hermite-Hadamard ως:

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)(\beta - \alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt,$$

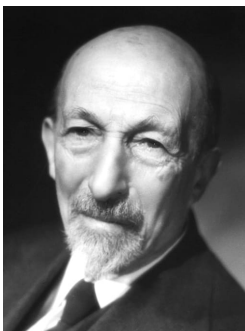
οπότε θέτοντας $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ και $h = \frac{\beta - \alpha}{2}$ είναι $\alpha = x - h$, $\beta = x + h$ και έχουμε την ανισότητα $f(x) 2h < \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$ από την οποία έχουμε ότι

$$f(x) < \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

Την ανισότητα αυτή την συναντήσαμε στην ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 52 η οποία μας παρέχει μια άλλη απόδειξη της ανισότητας Hermite-Hadamard. Η ίδια πρόταση μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι αν έχουμε μια συνάρτηση συνεχή σε ένα διάστημα Δ , παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του και για την οποία για κάθε $\alpha < \beta$ από το Δ ισχύει το πρώτο σκέλος της ανισότητας Hermite-Hadamard στο $[\alpha, \beta]$ τότε η συνάρτηση είναι κυρτή στο Δ .



Charles Hermite
1822-1901



Jacques Salomon Hadamard
1865-1963

ΣΧΟΛΙΟ 28. Το ΣΧΟΛΙΟ 27 υποβάλλει το ακόλουθο εύλογο ερώτημα. Αν έχουμε μια συνάρτηση f συνεχή σε ένα διάστημα Δ , παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του και για την οποία για κάθε $\alpha < \beta$ από το Δ ισχύει το δεύτερο σκέλος της ανισότητας Hermite-Hadamard στο $[\alpha, \beta]$ είναι άραγε η συνάρτηση κυρτή στο Δ ; Η απάντηση είναι και πάλι καταφατική. Έστω μια οποιαδήποτε χορδή με άκρα $\alpha < \beta$ και εξίσωση $y = px + q$. Αν υποθεθεί ότι όλα τα σημεία της C_f με τετμημένη στο διάστημα (α, β) είναι πάνω από την χορδή δηλαδή για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f(x) > px + q$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} (px + q) dx = \frac{1}{2} (\beta - \alpha) (p\alpha + 2q + p\beta).$$

Αλλά

$$p\alpha + 2q + p\beta = (p\alpha + q) + (p\beta + q) = f(\alpha) + f(\beta),$$

επομένως

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2},$$

που μας οδηγεί σε άτοπο. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f με τετμημένη στο διάστημα (α, β) είναι πάνω από την χορδή. Σύμφωνα με την Πρόταση $\diamond 19$ η f είναι κυρτή.

1.14 Οι κυρτές συναρτήσεις σε θέματα εξετάσεων.

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε μέρη από θέματα διαφόρων εξετάσεων που σχετίζονται με την κυρτότητα. Στα περισσότερα έχει γίνει για λόγους συντομίας αλλαγή στην διατύπωση. Για το θέμα του 2003 γίνεται ειδική αναφορά στην ενότητα 2.4.

ΘΕΜΑ 1. Από τις εξετάσεις του 1985, Δέσμη I. Δόθηκε η συνάρτηση

$$f(x) = x^2(x - 3) + 4,$$

ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι τα δύο σημεία της C_f που αντιστοιχούν στα ακρότατα της f και το σημείο καμπής της είναι συνευθειακά.

ΣΧΟΛΙΟ 29. Το ΘΕΜΑ 1 αναφέρεται σε ειδική περίπτωση της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond 45$.

ΘΕΜΑ 2. Από τις εξετάσεις του 1985, Δέσμη IV. Δόθηκε η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1,$$

ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ζητήθηκε να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f στρέφει

α) τα κοίλα άνω

β) τα κοίλα κάτω και ακόμα να βρεθούν τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ 3. Από τις εξετάσεις του 1986, Δέσμη I. Δόθηκε η συνάρτηση

$$f(x) = \left(a - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(a + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$$

ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ζητήθηκε, μεταξύ άλλων, να βρεθεί το a ώστε να παρουσιάζει καμπή στο $\frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ 4. Από τις εξετάσεις του 1990, Δέσμη IV. Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με

$$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + (\alpha^2 + 7)x - 5\alpha^2.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ 5. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη I. Για μία συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ που παίρνει μόνο θετικές τιμές και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι η $g(x) = \ln f(x)$, $x \in \Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ αν και μόνο αν για όλα τα $x \in \Delta$ ισχύει

$$f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2.$$

Στη συνέχεια τέθηκε το ερώτημα:

Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

ΣΧΟΛΙΟ 30. Στο ΘΕΜΑ 5 δίνεται μια συνθήκη ώστε η f να είναι λογαριθμικά κοίλη που είναι η δυϊκή έννοια της λογαριθμικά κυρτής (υπερ-κυρτής) συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 6. Από τις εξετάσεις του 1992, Δέσμη I. Δόθηκε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \alpha^x - x \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad 0 < \alpha < 1$$

και μεταξύ άλλων ζητήθηκε να μελετηθεί ως προς τη τα κοίλα.

ΘΕΜΑ 7. Από τις εξετάσεις του 1993, Δέσμη IV. Ζητήθηκαν τα σημεία καμπής της

$$f(x) = x^{-\nu x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \nu \in \mathbb{N}^*.$$

ΘΕΜΑ 8. Από τις εξετάσεις του 1994, Δέσμη IV. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$$

με $x \in (0, +\infty)$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ΘΕΜΑ 9. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη I. Δόθηκε η συνάρτηση

$$f(x) = (x - \kappa)^5 (x - \lambda)^3,$$

με $\kappa < \lambda$. Ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι η $g(x) = \ln|f(x)|$ είναι κοίλη στο διάστημα (κ, λ) .

ΣΧΟΛΙΟ 31. Και το ΘΕΜΑ 9 στηρίζεται στην έννοια της λογαριθμικά κοίλης συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 10. Από τις εξετάσεις του 1995, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$g(x) f'(x) = 2f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

ΘΕΜΑ 11. Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη IV. Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$f(x) = \int_0^x (x-t)g(t) \cdot dt$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα όταν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 12. Από τις εξετάσεις του 1997, Δέσμη I. Για μία συνάρτηση g ορισμένη στο $\mathbb{R}$, που παίρνει θετικές τιμές, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί την σχέση

$$g''(x)g(x) - (g'(x))^2 > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι

1. Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα.

2. $g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΟ 32. Ουσιαστικά η υπόθεση στην g στο ΘΕΜΑ 12 είναι ότι πρόκειται για υπερ-κυρτή συνάρτηση. Το δε ερώτημα 2. είναι η Jensen για την $\ln g$ με $\lambda = \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 13. Από τις εξετάσεις του 1999, Δέσμη I. Για συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη
- η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και

- και ικανοποιεί τη σχέση

$$f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$g(x) = f(x)e^{-2x},$$

είναι κυρτή $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 14. Από τις εξετάσεις του 2004. Δόθηκε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^2 \ln x,$$

και ζητήθηκε, μεταξύ άλλων να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ 15. Από τις εξετάσεις του 2007. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

ΣΧΟΛΙΟ 33. Και στο ΘΕΜΑ 15 έχουμε ειδική περίπτωση της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond$ 45.

ΘΕΜΑ 16. Από τις εξετάσεις του 2009. Για την συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ δόθηκε ότι ισχύει $f(x) \geq 1$ για όλα τα $x \geq -1$ και ζητήθηκε αφούδειχθεί ότι $\alpha = e$ να αποδειχθεί ότι είναι κυρτή.

ΘΕΜΑ 17. Από τις εξετάσεις ΑΣΕΠ του 2009. Δόθηκε η συνάρτηση

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha,$$

$0 < x < 1$ και $\alpha > 1$, και αφού ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι είναι κυρτή ζητήθηκε να αποδειχθούν οι ανισότητες:

1. Για όλα τα $x, y \in (0, 1)$ και $\alpha > 1$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

2. Για $x > 0, y > 0, \alpha > 1$ και $x + y = 1$:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha + \left(y + \frac{1}{y}\right)^\alpha \geq \frac{5^\alpha}{2^{\alpha-1}}$$

ΣΧΟΛΙΟ 34. Τα ερωτήματα 1. 2. στο ΘΕΜΑ 17 στηρίζονται στην ανισότητα του Jensen. Το 2. προκύπτει από το 1. αφού το α μέλος της ανισότητας του 2. είναι το $2 \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

ΘΕΜΑ 18. Από τις εξετάσεις του 2010 Δόθηκε η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μεταξύ άλλων ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ 19. Από τις εξετάσεις του 2011. Ζητήθηκε ναδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(e^x - x),$$

$x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ 20. Από τις επαναληπτικές εξετάσεις του 2011. Δόθηκε συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τρεις φορές παραγωγίσιμη με

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0),$
- $f'(0) < f(1) - f(0)$ και
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και ζητήθηκε, μεταξύ άλλων, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 21. Από τις εξετάσεις του 2012. Με

$$f(x) = e^{-x}(\ln x - x) \quad x > 0,$$

τέθηκε το ακόλουθο ερώτημα:

Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, \quad x > 0,$$

όπου $\alpha > 0$, είναι κυρτή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x),$$

για κάθε $x > 0$.

ΣΧΟΛΙΟ 35. Το τελευταίο ερώτημα στο ΘΕΜΑ 21 είναι εφαρμογή της ανισότητας Jensen.

ΘΕΜΑ 22. Από τις επαναληπτικές εξετάσεις του 2012. Για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

δόθηκε, χωρίς να ζητηθεί απόδειξη ότι είναι κυρτή και ζητήθηκε

- η εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $A(0, f(0))$ και
- να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει ακριβώς μία λύση.

ΣΧΟΛΙΟ 36. Το αναπόδεικτο στοιχείο του ΘΕΜΑΤΟΣ 22 που αναφέρεται στην κυρτότητα της f επαληθεύεται ως εξής:

Διαπιστώνεται εύκολα ότι για $x \neq 0$ είναι

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2},$$

και ότι για $x = 0$ είναι

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{\frac{0}{0} x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Επίσης εύκολα διαπιστώνεται ότι για $x \neq 0$ είναι

$$f''(x) = \frac{e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x - 2}{x^3},$$

ενώ στο 0 έχουμε

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x x - e^x + 1}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x x - 2e^x + 2 - x^2}{2x^3} = \frac{1}{3}.$$

Επομένως:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x - 2}{x^3} & , \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{3} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Με $h(x) = e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x - 2$ είναι $h'(x) = e^x x^2$, άρα $h \uparrow$. Αφού $h(0) = 0$ η h είναι θετική στα θετικά x και αρνητική στα αρνητικά. Άρα η $f''(x)$ είναι θετική σε κάθε x και επομένως η f είναι κυρτή.

ΘΕΜΑ 23. Από τις επαναληπτικές εξετάσεις του 2012. Με

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right), \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt \quad x > 0$$

ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι η F έχει ένα μοναδικό σημείο καμπής και το οποίο να βρεθεί.

ΘΕΜΑ 24. Από τις εξετάσεις του 2013. Δόθηκε μία μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Ζητήθηκε, μεταξύ άλλων, να αποδειχθεί ότι

- $f'(1) = 0$, καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.
- η g είναι κυρτή

ΘΕΜΑ 25. Από τις επαναληπτικές εξετάσεις του 2013. Δόθηκε μια συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη η οποία μηδενίζονταν στο μηδέν και $f(x)f'(x) \neq 0$ στα θετικά x . Οι υποθέσεις του θέματος οδηγούσαν στα ακόλουθα συμπεράσματα που υπήρχαν σε ερωτήματα:

- $f(x) > 0, f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f'(0) = 1$.
- $f(x)f''(x) + 1 = (f'(x))^2, \quad x > 0$

Για την συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad x > 0,$$

δόθηκε η επιπλέον υπόθεση ότι είναι κυρτή και ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι

- $g(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$
- $\int_0^1 (2-x)f(x) dx < 1$.

ΣΧΟΛΙΟ 37. Το ότι η f είναι κυρτή που δόθηκε σαν επιπλέον δεδομένο στο ΘΕΜΑ 25 μπορεί εύκολα να προκύψει από τα υπόλοιπα ερωτήματα. Η f είναι στο $(0, +\infty)$ θετική με θετική παράγωγο άρα γνησίως αύξουσα. Επομένως $f^2 \uparrow, \frac{1}{f^2} \downarrow, -\frac{1}{f^2} \uparrow$. Έχουμε

$$g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = \frac{(f'(x))^2 - 1 - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = -\frac{1}{(f(x))^2}.$$

Επομένως η g' είναι γνησίως αύξουσα και η g κυρτή.

ΘΕΜΑ 26. Από τις εξετάσεις του 2014. Δόθηκε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και γνησίως αύξουσα. Στη συνέχεια, για τα υπόλοιπα ερωτήματα, δόθηκε ως υπόθεση χωρίς να ζητηθεί απόδειξη ότι η f είναι κυρτή.

ΣΧΟΛΙΟ 38. Για την αναπόδεικτη υπόθεση βλ. ΣΧΟΛΙΟ 36

ΘΕΜΑ 27. Από τις επαναληπτικές εξετάσεις του 2014. Σε ένα υποερώτημα θέματος ζητήθηκε να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα η συνάρτηση $e^x (x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 28. Από τις εξετάσεις του 2015. Για την συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

τέθηκε το ερώτημα:

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

ΘΕΜΑ 29. Από τις εξετάσεις του 2016. Ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$$

είναι κυρτή.

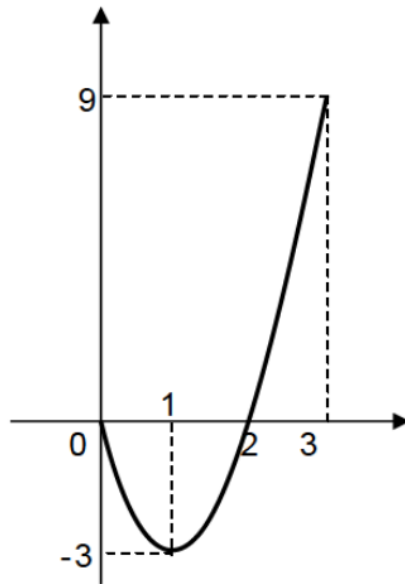
ΘΕΜΑ 30. Από τις εξετάσεις του 2017. Για την συνάρτηση

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

τέθηκε το ερώτημα:

Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ 31. Από τις επαναληπτικές εξετάσεις του 2017. Για μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$ δόθηκε η γραφική παράσταση της f'



και ένα από τα ερωτήματα ήταν να προσδιοριστούν τα διαστήματα τα οποία η f είναι κυρτή.

ΘΕΜΑ 32. Από τις εξετάσεις του 2018. Για την συνάρτηση

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

τέθηκε το ερώτημα:

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ 33. Από τις εξετάσεις του 2018. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

με $\alpha > 1$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

ΘΕΜΑ 34. Από τις εξετάσεις του 2021. Ζητήθηκε να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα η συνάρτηση

$$f(x) = xe^{1-x} \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 35. Από τις εξετάσεις του 2022. Για την συνάρτηση

$$f(x) = x - \ln 3x,$$

ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι είναι κυρτή. Αφού σε κάποιο ερώτημα ζητήθηκε να αποδειχθεί ότι έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1 < 1 < x_2$ ζητήθηκε κατόπιν να εξεταστεί αν η εξίσωση

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2),$$

έχει λύση.

ΣΧΟΛΙΟ 39. Στο ΘΕΜΑ 35 η απάντηση είναι αρνητική. Ένας τρόπος για να τεκμηριωθεί η αρνητική απάντηση είναι να αξιοποιηθεί η κυρτότητα της f και οι ανισότητες:

$$\ln u \leq u - 1 \quad \text{και} \quad f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κυρτές συναρτήσεις. Μερικές επεκτάσεις

2.1 Ο γενικός ορισμός της κυρτότητας.

Όπως είδαμε ο ορισμός της κυρτότητας του Αρχιμήδη είναι ισοδύναμος με την ανισότητα του Jensen. Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν αυτή την ανισότητα για να ορίσουν την κυρτή συνάρτηση¹. Ο ορισμός αυτός έχει πολλά πλεονεκτήματα. Είναι αυτοτελής και δεν χρησιμοποιεί άλλες αναλυτικές έννοιες, επιδέχεται άμεση γεωμετρική ερμηνεία, είναι γενικότερος, και μπορεί να επεκταθεί και σε πραγματικές συναρτήσεις περισσότερων της μίας μεταβλητής². Έτσι ορίζεται:

Μια συνάρτηση f είναι *κυρτή* σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε x_1, x_2 από το Δ και για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Ας σημειωθεί ότι στην παραπάνω ανισότητα αν πάρουμε $x_1 = x_2$ ή $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$ έχουμε ισότητα. Αν θέλουμε αυτές να είναι οι μόνες περιπτώσεις που έχουμε ισότητα ορίζουμε:

Μια συνάρτηση f είναι *αυστηρώς κυρτή* σε ένα διάστημα Δ αν για κάθε x_1, x_2 από το Δ με $x_1 \neq x_2$ και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Για να μην υπάρχει σύγχυση με τον σχολικό ορισμό της κυρτής συνάρτησης θα χρησιμοποιούμε, για τις ανάγκες του παρόντος, την κάπως άβολη διατύπωση *κυρτή υπό ευρεία έννοια* ή *αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έννοια* στη θέση αντιστοίχως του *κυρτή* και *αυστηρώς κυρτή*. Είναι προφανές ότι κάθε συνάρτηση που είναι αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έννοια θα είναι και κυρτή υπό ευρεία έννοια. Στις κυρτές υπό ευρεία έννοια συναρτήσεις απαιτούμε τα εσωτερικά σημεία κάθε χορδής της γραφικής παράστασης να μην είναι κάτω από τα

¹Ενδεικτικά βλ. [61] κεφ. 19, [43] σελ. 183, [38] σελ. 62, [24] σελ. 60, [6] σελ. 22, [46] 7.10.

²Βλ. [37] κεφ. 4.

αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης ενώ στις αυστηρώς κυρτές υπό ευρεία έννοια απαιτούμε κάτι περισσότερο: Τα εσωτερικά σημεία της χορδής να είναι πάνω από τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης. Το αντίστροφο δεν ισχύει και η $f(x) = ax + b$ αποτελεί ένα απλό αντιπαράδειγμα. Ένα άλλο πιο σύνθετο αποτελεί η συνάρτηση h (αλλά και η δεύτερη παράγωγος της h''), του ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 1. Για παραγωγίσιμες συναρτήσεις έχουμε μια άμεση αντιστοίχιση των δύο αυτών εννοιών με τη μονοτονία της παραγώγου:

- Μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια αν και μόνο αν η παράγωγος της είναι αύξουσα.
- Μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ είναι αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έννοια αν και μόνο αν η παράγωγος της είναι γνησίως αύξουσα.

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε ουσιαστικά τον παραπάνω γενικό ορισμό της κυρτότητας για τη μέτρηση κύκλου μέσω προσεγγίσεων με πολύγωνα που φυσικά αντιστοιχούν σε μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Μια συνάρτηση κυρτή υπό ευρεία έννοια μπορεί να είναι αλλά και μην είναι παραγωγίσιμη. Λ.χ. οι συναρτήσεις h, h'' του παραδείγματος 1. Ωστόσο οι συναρτήσεις που είναι κυρτές υπό ευρεία έννοια δεν μπορεί να είναι πολύ «κακές». Πρώτα απ' όλα είναι συνεχείς στα εσωτερικά σημεία:

ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 59. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια στο διάστημα Δ είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ και θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . Επαναλαμβάνουμε μερικά πράγματα που έχουμε δει στην ενότητα 1.7. Ας θεωρήσουμε τρία οποιαδήποτε σημεία $x_1 < x_2 < x_3$ του Δ .

Αν ονομάσουμε $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in [0, 1]$ τότε αφού $x_2 = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (x_3 - x_1) + x_1$ είναι $x_2 = \lambda (x_3 - x_1) + x_1$ δηλαδή $x_2 = (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_3$.

Αφού η f είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια θα ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3) = \\ &= \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) \end{aligned}$$

που δίνει την

$$(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) + (x_1 - x_3)f(x_2) \geq 0$$

από την οποία εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (*)$$

Αφού το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ θα υπάρχουν a, b, c στο Δ ώστε

$$a < b < x_0 < c$$

οπότε για κάθε x με

$$a < b < x < x_0 < c$$

εφαρμόζοντας διαδοχικά την (*) έχουμε:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(c) - f(x_0)}{c - x_0}$$

που γεωμετρικά σημαίνει (βλ. ΣΧΗΜΑ 2.1) ότι για τους αντίστοιχους συντελεστές διευσθύνσεως των τμημάτων έχουμε:

$$\lambda_{AB} \leq \lambda_{BM} \leq \lambda_{MX_0} \leq \lambda_{X_0C}$$

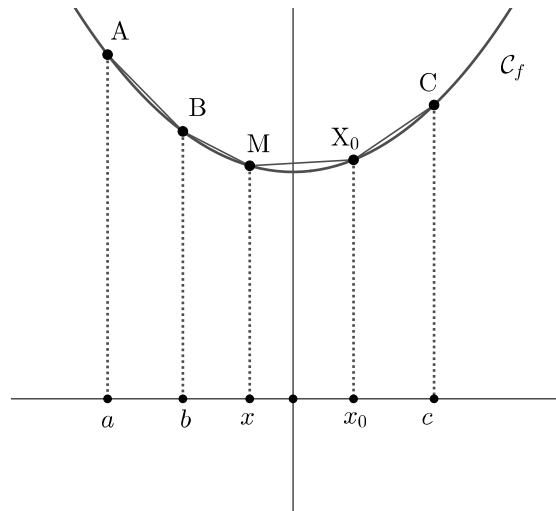
ειδικότερα ότι:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(c) - f(x_0)}{c - x_0}$$

οπότε για $b < x < x_0$ είναι:

$$(f(b) - f(a))(x_0 - x) \leq f(x_0) - f(x) \leq (f(c) - f(x_0))(x_0 - x)$$

Από το κριτήριο της παρεμβολής συνάγουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ και επομένως η f είναι συνεχής στο x_0



ΣΧΗΜΑ 2.1. Κάθε συνάρτηση κυρτή υπό ευρεία έννοια είναι συνεχής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21. Στα άκρα ενός διαστήματος δεν είναι απαραίτητο να είναι μια κυρτή υπό ευρεία έννοια (ακόμα και αυστηρώς κυρτή) συνεχής. Ένα παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = -1 \\ x^2 & -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

η οποία είναι αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έννοια αλλά δεν είναι συνεχής.

Σε αντίθεση με την συνέχεια μια συνάρτηση μπορεί να είναι αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έννοια σε ένα διάστημα χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα εσωτερικά σημεία του. Ένα παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x) = x^2 + |x|$ η οποία είναι αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έννοια στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Ωστόσο δεν μπορεί να αποτυγχάνει να είναι παραγωγίσιμη σε «πολλά» σημεία. Σχετικά ισχύει:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. * Έστω f αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έννοια σε ένα διάστημα Δ . Το σύνολο των σημείων του Δ στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη είναι αριθμήσιμο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν παραγωγίζεται στα εσωτερικά σημεία $x_0 < x'_0$ του Δ . Θεωρούμε σημεία a, b, c, d εσωτερικά σημεία του Δ τέτοια ώστε $a < x_0 < b < c < x'_0 < d$. Είναι:

$$a \leq x_0 - h < x_0 \Leftrightarrow h \in (0, x_0 - a] = D_1$$

$$x_0 < x_0 + h < b \Leftrightarrow h \in (0, b - x_0] = D_2$$

Αν h_1, h_2 είναι στοιχεία του D_1 με $h_1 < h_2$ είναι $x_0 - h_1 > x_0 - h_2$ και επομένως

$$\frac{f(x_0 - h_2) - f(x_0)}{-h_2} < \frac{f(x_0 - h_1) - f(x_0)}{-h_1}.$$

Άρα η συνάρτηση

$$h \rightarrow \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h},$$

ορισμένη στο D_1 είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης είναι συνεχής αφού η f είναι και συνεχής. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το

$$\left[\frac{f(x_0 - f(a))}{x - a}, \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \right)$$

Αλλά

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} < \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} < \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Άρα το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Σχεπτόμενοι ανάλογα βρίσκουμε ότι το όριο $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Επίσης:

1. Αφού για $h \in D_1 \cap D_2$ είναι

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και περνώντας στα όρια θα είναι

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. Αφού η f δεν παραγωγίζεται στο x_0 η παραπάνω ανισότητα είναι γνήσια.

3. Αφού για κάθε $h \in D_2$ είναι

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} < \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Άρα στο σημείο x_0 οι πλευρικές παράγωγοι της f υπάρχουν και ισχύει

$$\frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} < f'(x_0^-) < f'(x_0^+) < \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Ανάλογα για το x'_0 όπου επίσης η f δεν παραγωγίζεται έχουμε ότι

$$\frac{f(c) - f(b)}{c - b} < f'(x_0'^-) < f'(x_0'^+) < \frac{f(d) - f(x'_0)}{d - x'_0}$$

Από τα προηγούμενα συνάγουμε ότι

$$f'(x_0^-) < f'(x_0^+) < f'(x_0'^-) < f'(x_0'^+)$$

δηλαδή τα διαστήματα $[f'(x_0^-), f'(x_0^+)]$, $[f'(x_0'^-), f'(x_0'^+)]$ είναι ξένα.

Κάθε σημείο όπου η f δεν παραγωγίζεται ορίζει ένα κλειστό διάστημα με άκρα τις πλευρικές παραγώγους. Τα διαστήματα αυτά ανά δύο είναι ξένα. Κάθε ένα από αυτά περιέχει ένα τουλάχιστον ρητό. Αν επιλέξουμε ένα ρητό από κάθε ένα διάστημα οι ρητοί αυτοί είναι διαφορετικοί. Το πλήθος τους είναι τόσο όσο τα διαστήματα δηλαδή όσο το πλήθος των σημείων που η f δεν παραγωγίζεται. Άρα το πλήθος των σημείων αυτών είναι αριθμήσιμο αφού κάθε υποσύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο. Ο.Ε.Δ.

2.2 Κυρτές συναρτήσεις και κυρτά σχήματα.

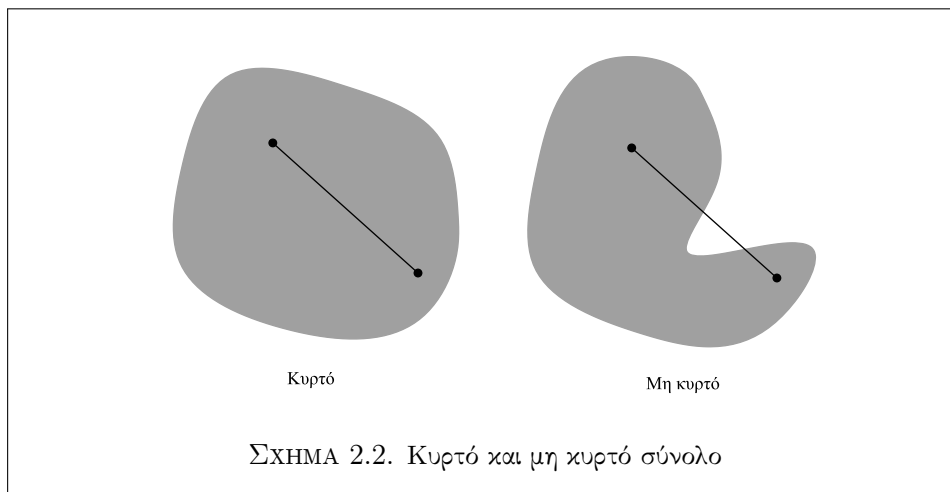
2.2.1 Σύνδεση της κυρτότητας σχημάτων και της κυρτότητας συναρτήσεων.

Υπάρχει μία σύνδεση των κυρτών συναρτήσεων με τα κυρτά σχήματα και η κοινή χρήση του όρου «κυρτός» δεν είναι τυχαία. Στα επόμενα ως ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο ταυτιζόμενα σημεία θα εννοούμε το μονοσύνολο τους.

2.2.1.1 Κυρτά σχήματα.

Υπενθυμίζουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Ένα επίπεδο σχήμα (σύνολο) ονομάζεται *κυρτό* αν οποτεδήποτε περιέχει δύο σημεία περιέχει και το ευθύγραμμο τμήμα που έχει αυτά τα δύο σημεία ως άκρα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22. Το ίδιο το επίπεδο, οι ευθείες του, οι ημιευθείες του και τα ημιεπίπεδα του είναι κυρτά σχήματα. Τα μονοσύνολα σημείων είναι κυρτά. Επίσης οι κυκλικοί δίσκοι (τα σύνολα σημείων που η απόστασή τους από δοθέν σημείο, το κέντρο, είναι μικρότερη ή ίση από ένα δοθέν μήκος, την ακτίνα) είναι κυρτά σχήματα. Το κενό σύνολο είναι κυρτό (ο λόγος: κάθε συνεπαγωγή με ψευδή υπόθεση είναι αληθής).

Ισχύει η παρακάτω απλή πρόταση:

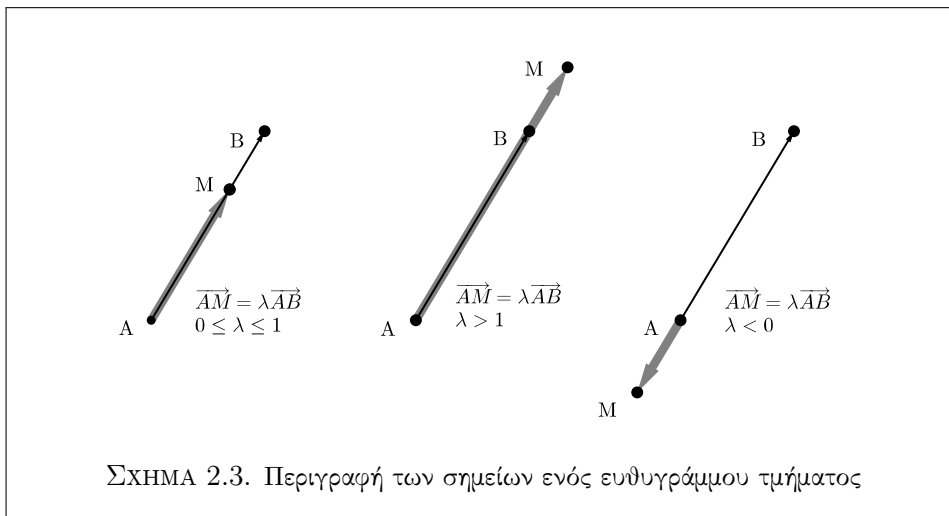
ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Η τομή οσωνδήποτε κυρτών σχημάτων είναι σχήμα κυρτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν έχουμε κάποια κυρτά σχήματα και ονομάσουμε X την τομή τους τότε αν A, B είναι δύο σημεία από το X αυτά ανήκουν σε όλα τα κυρτά σχήματα που έχουμε, το ευθύγραμμο τμήμα τους περιέχεται στο καθένα τους και επομένως στην τομή τους X . Ο.Ε.Δ.



Στην Γεωμετρία ένα πολύγωνο ονομάζεται *κυρτό* αν έχει την ιδιότητα όλα του τα σημεία να περιέχονται σε ένα μόνο από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει ο φορέας οποιασδήποτε πλευράς του. Προφανώς είναι και η τομή όλων αυτών των ημιεπιπέδων. Επομένως είναι τομή κυρτών σχημάτων. Συνεπώς είναι κυρτό και με τον ανωτέρω ορισμό.

Η περιγραφή της κυρτότητας ενός επιπέδου σχήματος που δώσαμε είναι γεωμετρική. Μπορεί να γίνει αλγεβρική και να εκφραστεί με αλγεβρικές σχέσεις αν περάσουμε σε συντεταγμένες. Γενικά αν έχουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ υπάρχει ένας απλός τρόπος για να περιγράψουμε αλγεβρικά το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα A, B . Απαρτίζεται ακριβώς από εκείνα τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι της μορφής $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ με $0 \leq \lambda \leq 1$. Επομένως θα πρέπει:



$$(x - x_1, y - y_1) = \lambda (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Άρα πρέπει:

$$x - x_1 = \lambda (x_2 - x_1), \quad y - y_1 = \lambda (y_2 - y_1) \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

και επομένως λύνοντας ως προς x, y έχουμε μία περιγραφή των σημείων του τμήματος με άκρα A, B : Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ απαρτίζεται από τα σημεία (x, y) με

$$x = (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2, \quad y = (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2 \quad \lambda \in [0, 1] \quad (2.1)$$

Άρα η γεωμετρική συνθήκη της κυρτότητας μπορεί να αντικατασταθεί από την αλγεβρική:

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Ένα σχήμα του επιπέδου είναι κυρτό αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος σημείων του $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ και κάθε $\lambda \in [0, 1]$ το σημείο $((1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2)$, που γράφεται και $(1 - \lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)$, είναι επίσης σημείο του σχήματος.

Η συνθήκη αυτή γενικεύεται για περισσότερα από δύο σημεία. Ένα σχήμα είναι κυρτό αν και μόνο αν για οποιαδήποτε σημεία του $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ και οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ με άθροισμα 1 το σημείο

$$\lambda_1(x_1, y_1) + \dots + \lambda_n(x_n, y_n)$$

είναι επίσης σημείο του σχήματος. Η απόδειξη του τελευταίου μπορεί να γίνει με επαγωγή ακολουθώντας ανάλογη πορεία με εκείνη της πρώτης απόδειξης στην ανισότητα Jensen.

2.2.1.2 Επιγράφημα συνάρτησης.

Έστω τώρα μία οποιαδήποτε συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Η ταινία που ορίζει το Δ στο επίπεδο δηλαδή το σύνολο των σημείων που η τετμημένη τους ανήκει στο Δ ή αλλιώς το σύνολο όλων των σημείων που η προβολή τους στον άξονα των x περιέχεται στο Δ χωρίζεται σε τρία σύνολα.

- Εκείνο που απαρτίζεται από τα σημεία (x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$. Το σύνολο τους είναι η γραφική παράσταση $\mathcal{C}_f$ της f . Πρόκειται για τα σημεία που βρίσκονται επί της γραφικής παράστασης της f .
- Εκείνο που απαρτίζεται από τα σημεία (x, y) για τα οποία ισχύει $y > f(x)$. Πρόκειται για τα σημεία που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της f . Ας το συμβολίσουμε $\mathcal{A}_f$. Τέλος
- Εκείνο που απαρτίζεται από τα σημεία (x, y) για τα οποία ισχύει $y < f(x)$. Πρόκειται για τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την γραφική παράσταση της f . Ας το συμβολίσουμε $\mathcal{K}_f$.

Το σύνολο που απαρτίζεται από τα σημεία που βρίσκονται επί της γραφικής παράστασης ή επάνω από την γραφική παράσταση της f δηλαδή το σύνολο που περιλαμβάνει τα σημεία (x, y) με $y \geq f(x)$ και το οποίο δεν είναι άλλο από το $\mathcal{K}_f \cup \mathcal{C}_f$ ονομάζεται *επιγράφημα* (epigraph) της f ([36], σελ. 80, [25], σελ. 199) και συμβολίζεται με $\text{epi}(f)$. Απλή εξέταση των επιγραφημάτων διαφόρων συναρτήσεων μας οδηγούν στην πρόταση:

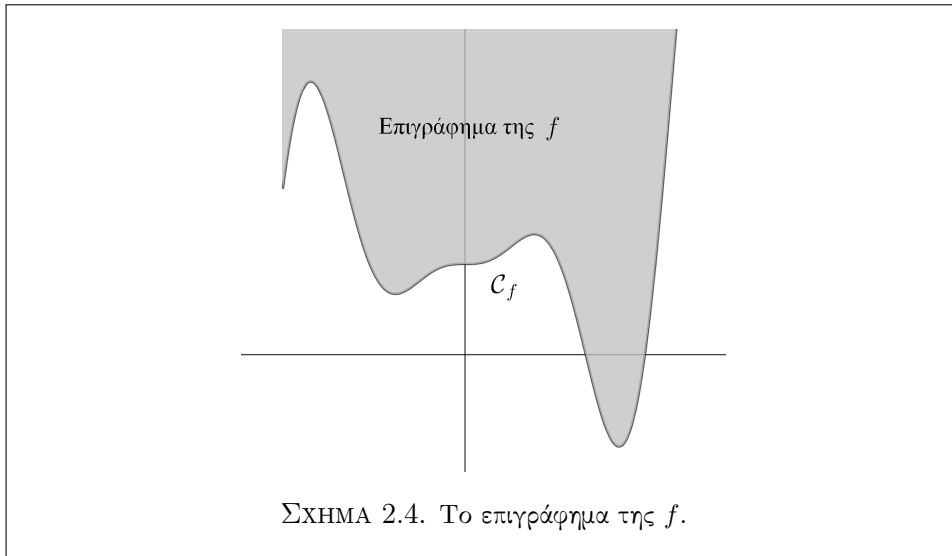
ΠΡΟΤΑΣΗ 5. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Η f θα είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια αν και μόνο αν το επιγράφημα της είναι κυρτό σύνολο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια. Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ από το επιγράφημα $\text{epi}(f)$ της f . Θα ισχύει

$$y_1 \geq f(x_1), \quad y_2 \geq f(x_2).$$

Το τυχόν σημείο M του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα A και B έχει τετμημένη

$$x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$$



και τεταγμένη

$$y = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2.$$

Είναι τότε

$$y \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Αλλά το σημείο με τεταγμένη $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ και τεταγμένη $(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$ ανήκει στην χορδή της C_f με άκρα τα σημεία $A'(x_1, f(x_1))$ και $B'(x_2, f(x_2))$ και βρίσκεται πάνω από την C_f . Άρα είναι

$$(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geq f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2)$$

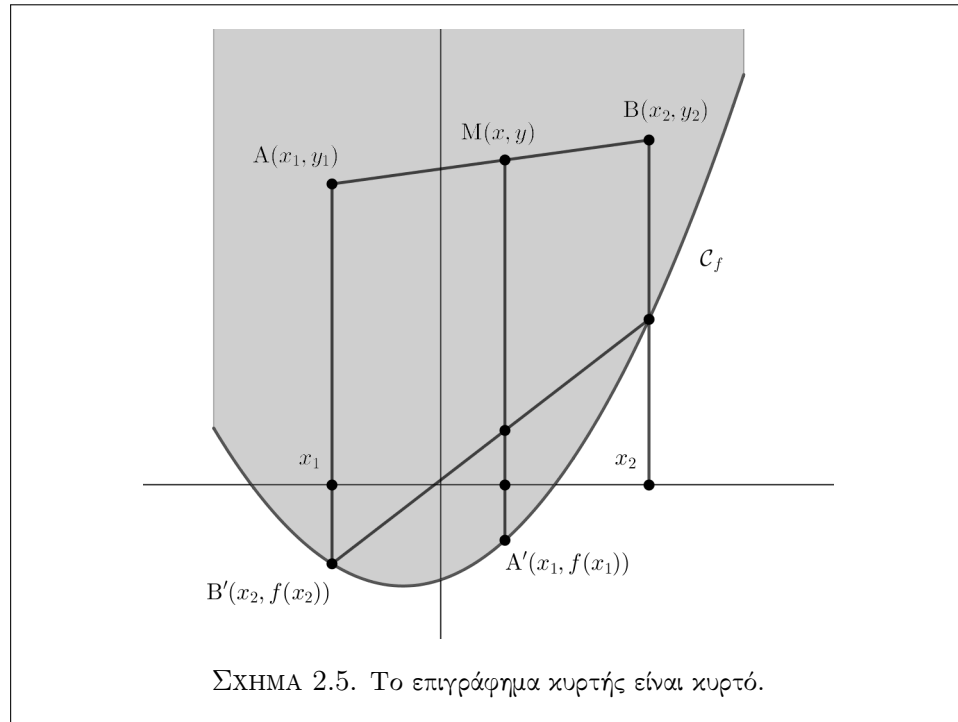
και επομένως $y \geq f(x)$ που σημαίνει ότι το M ανήκει στο επιγράφημα της f το οποίο κατά συνέπεια είναι κυρτό.

Αντιστρόφως τώρα. Έστω ότι το $\text{epi}(f)$ είναι κυρτό. Κάθε σημείο (x, y) οποιασδήποτε χορδής της C_f βρίσκεται στο $\text{epi}(f)$ άρα πάνω από το C_f και επομένως $y \geq f(x)$. Άρα η f είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια. Ο.Ε.Δ.

2.2.1.3 Κυρτές συναρτήσεις και κυρτά πολύγωνα.

Οι κυρτές συναρτήσεις σχετίζονται με τα κυρτά πολύγωνα. Αν ένα πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο στην γραφική παράσταση μιας κυρτής συνάρτησης είναι κυρτό. Συγκεκριμένα ισχύει το επόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ 6. Έστω $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση. Αν οι αριθμοί $x_1 < x_2 < \dots, x_n$ ανήκουν στο Δ και $A_1(x_1, f(x_1)), A_2(x_2, f(x_2)), \dots, A_n(x_n, f(x_n))$ είναι τα αντίστοιχα σημεί της C_f τότε το πολύγωνο με κορυφές $A_1 A_2 \dots A_n$ είναι κυρτό.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν θεωρήσουμε τον φορέα μιας οποιασδήποτε πλευρά του πολυγώνου όλες οι κορυφές ανήκουν στο ίδιο από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Η πλευρά είναι η $A_n A_1$ Τότε όλα τα σημεία της C_f με τετμημένες μεταξύ x_1, x_n βρίσκονται κάτω από την χορδή $A_n A_1$. Άρα όλες οι κορυφές του πολυγώνου βρίσκονται στο ίδιο από τα δύο ημιεπίπεδα της χορδής.

Η πλευρά είναι η $A_i A_{i+1}$ με $1 \geq i \geq n - 1$. Τότε τα (βλ. ΣΧΟΛΙΟ 2) σημεία της C_f με τετμημένη μικρότερη του x_i ή μεγαλύτερη του x_{i+1} βρίσκονται πάνω από τον φορέα της $A_i A_{i+1}$ άρα πάλι όλες οι κορυφές του πολυγώνου βρίσκονται στο ίδιο από τα δύο ημιεπίπεδα. Ο.Ε.Δ.

2.2.2 Γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας Jensen

Είδαμε (ΠΡΟΤΑΣΗ 6) ότι αν τοποθετήσουμε n σημεία στην γραφική παράσταση μιας κυρτής συνάρτησης και συνδέσουμε εκείνο με τη μικρότερη τετμημένη με εκείνο με την αμέσως μεγαλύτερη κ.ο.κ το δε τελευταίο με το πρώτο τότε το πολύγωνο που σχηματίζουν είναι κυρτό.

Το σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας (Παρ. 2.20) ορίζει ως *εσωτερικό σημείο ενός κυρτού πολυγώνου* κάθε σημείο που είναι κοινό εσωτερικό σημείο όλων των (κυρτών) γωνιών του ανάγοντας έτσι τον ορισμό του εσωτερικού σημείου πολυγώνου στον ορισμό του εσωτερικού σημείου κυρτής γωνίας. Μια άλλη

ισοδύναμη περιγραφή των εσωτερικών σημείων είναι η ακόλουθη: Σε κάθε κυρτό πολύγωνο ο φορέας μιας πλευράς ορίζει δύο ημιεπίπεδα εκ των οποίων ένα και μόνον περιέχει τις κορυφές του πολυγώνου. Κάθε τέτοιο ημιεπίπεδο είναι κυρτό σχήμα και η τομή τους είναι σχήμα επίσης κυρτό. Επειδή η τομή περιέχει τις κορυφές ως κυρτό σχήμα θα περιέχει και τις πλευρές. Αν από αυτή την τομή εξαιρέσουμε τα σημεία της περιμέτρου, δηλαδή εκείνα που ανήκουν στις πλευρές, θα έχουμε το εσωτερικό του πολυγώνου. Συμβολικά έστω ένα κυρτό πολύγωνο $A_1A_2...A_n$ και

- $H_1, H_2, \dots, H_n$ εκείνα τα ημιεπίπεδα με αρχή τις ευθείες $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ που περιέχουν τις κορυφές του πολυγώνου και
- $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ τα σύνολα των σημείων των πλευρών $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ του πολυγώνου,

τότε

$$\text{Εσωτερικό } A_1A_2...A_n = \bigcap_{i=1}^n H_i - \bigcup_{i=1}^n \Pi_i$$

Μια άλλη περιγραφή για το εσωτερικό είναι να θεωρήσουμε τα ανοικτά ημιεπίπεδα O_i που προκύπτουν από τα ημιεπίπεδα H_i αν εξαιρέσουμε τα σημεία των αρχών τους, δηλαδή των φορέων των πλευρών του πολυγώνου, και πάρουμε την τομή τους:

$$\text{Εσωτερικό } A_1A_2...A_n = \bigcap_{i=1}^n O_i$$

ΣΧΟΛΙΟ 40. Ας σημειωθεί ότι ένα κυρτό πολύγωνο ως σημειοσύνολο, δηλαδή ως το σύνολο όλων των σημείων που ανήκουν στις πλευρές του, δεν είναι κυρτό. Όμως το εσωτερικό του πολυγώνου καθώς και το εσωτερικό συν την περίμετρο δηλαδή τα σύνολα $\bigcap_{i=1}^n O_i$ και $\bigcap_{i=1}^n H_i$ είναι κυρτά.



Ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε κυρτό πολύγωνο $A_1A_2...A_n$. Ας υποθέσουμε ότι για $i = 1, 2, \dots, n$ η κορυφή A_i είναι το σημείο (x_i, y_i) . Έστω $S = \bigcap_{i=1}^n H_i$ όπως πριν. Λόγω της κυρτότητας του S αν $\lambda_i \in [0, 1]$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ τότε το σημείο

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i, y_i), \quad \lambda_i \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (*),$$

ανήκει στο S . Αντιστρόφως τώρα κάθε σημείο $M(x, y)$ του S παίρνει τη μορφή (*). Πράγματι (βλ. και ΣΧΗΜΑ 2.6) :

- Αν μεν το M ανήκει σε κάποια πλευρά, ας πούμε την A_pA_q τότε για κατάλληλο $\lambda \in [0, 1]$ είναι $(x, y) = (1 - \lambda)(x_p, y_p) + \lambda(x_q, y_q)$ οπότε παίρνοντας $\lambda_p = 1 - \lambda$, $\lambda_q = \lambda$ και όλα τα άλλα λ_i να είναι μηδέν έχουμε το (x, y) στη μορφή (*).

- Αν το M είναι εσωτερικό σημείο του πολυγώνου τότε το συνδέουμε την κορυφή A_1 . Τότε «προφανώς»³ η ημιευθεία A_1M θα τμήσει κάποια πλευρά το πολυγώνου ας πούμε την A_pA_q σε κάποιο σημείο N της μορφής $(1-\lambda)(x_p, y_p) + \lambda(x_q, y_q)$, $\lambda \in [0, 1]$ και επειδή το M ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα A_1N θα υπάρχει $\mu \in [0, 1]$ ώστε

$$(x, y) = (1-\mu)(x_1, y_1) + \mu[(1-\lambda)(x_p, y_p) + \lambda(x_q, y_q)].$$

Αλλά τότε

$$(x, y) = (1-\mu)(x_1, y_1) + \mu(1-\lambda)(x_p, y_p) + \mu\lambda(x_q, y_q),$$

και αν πάρουμε

$$\lambda_1 = 1-\mu, \quad \lambda_p = \mu(1-\lambda), \quad \lambda_q = \mu\lambda,$$

και όλα τα άλλα λ_i να είναι μηδέν έχουμε πάλι ότι το M γράφεται στη μορφή (*). Ο.Ε.Δ.



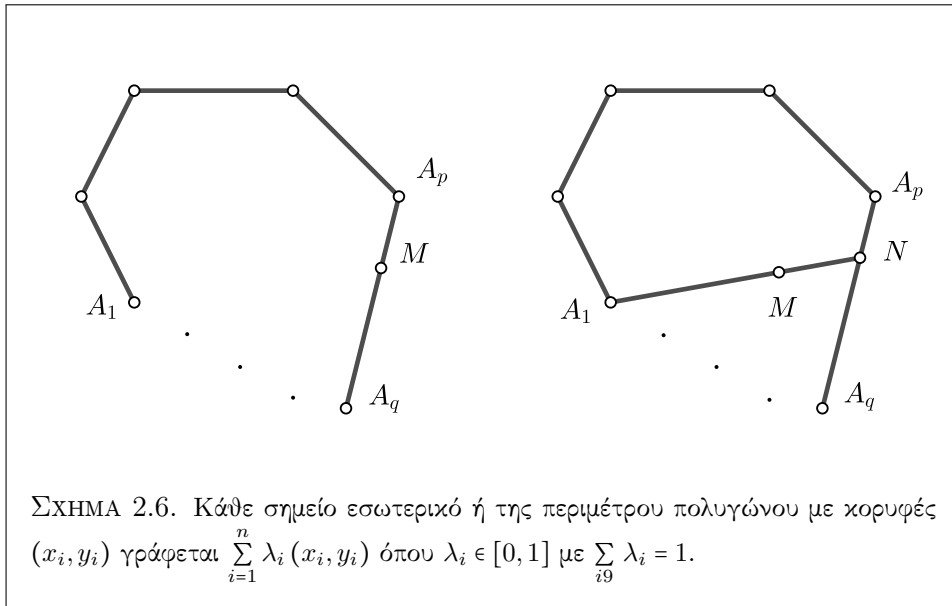
Αν τώρα f είναι μια κυρτή συνάρτηση και $A_1(x_1, f(x_1)), A_2(x_2, f(x_2)), \dots, A_n(x_n, f(x_n))$ είναι σημεία της C_f με $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ τότε οποιοδήποτε σημείο της περιμέτρου ή του εσωτερικού του πολυγώνου $A_1A_2\dots A_n$ ανήκει στο επιγράφημα της f και βρίσκεται πάνω από την C_f το δε σημείο αυτό παίρνει τη μορφή (*). Ακριβώς επειδή βρίσκεται στο επιγράφημα μίας κυρτής θα είναι $f(\text{τετμημένης}) \leq \text{τεταμένη}$. Με άλλα λόγια ισχύει

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i),$$

που είναι η ανισότητα του Jensen σχετικά με την γεωμετρική ερμηνεία της οποίας βλ. και [31].

³Τα σχολικά βιβλία Γεωμετρίας, και καλώς, υιοθετούν μια αποδεικτική διαδικασία ενδιάμεσης αυστηρότητας, πολύ κοντά σε εκείνη του Ευκλείδη. Πολλά επιχειρήματα υποβάλλονται από το σχήμα ή την διαισθηση. Κανονικά σε ένα μαθηματικά αυστηρό πλαίσιο ο ισχυρισμός αυτός χρειάζεται απόδειξη η οποία όμως χρειάζεται κάποια ενδιάμεσα βήματα. Σχετικά βλ.

1. DAVID HILBERT *Θεμέλια της Γεωμετρίας*, Μετ. Στράτης Παπαδόπουλος, ΤΡΟΧΑΛΙΑ, 1995, παρ. 1.4
2. ΙΩΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ, *Γεωμετρία του Επιπέδου*, Τόμος I, ΚΟΡΦΙΑΤΗΣ, 1970, παρ. 2.43-2.45.
3. JOHN M. LEE, *Axiomatic Geometry*, American Mathematical Society, 2012 κεφ. 8



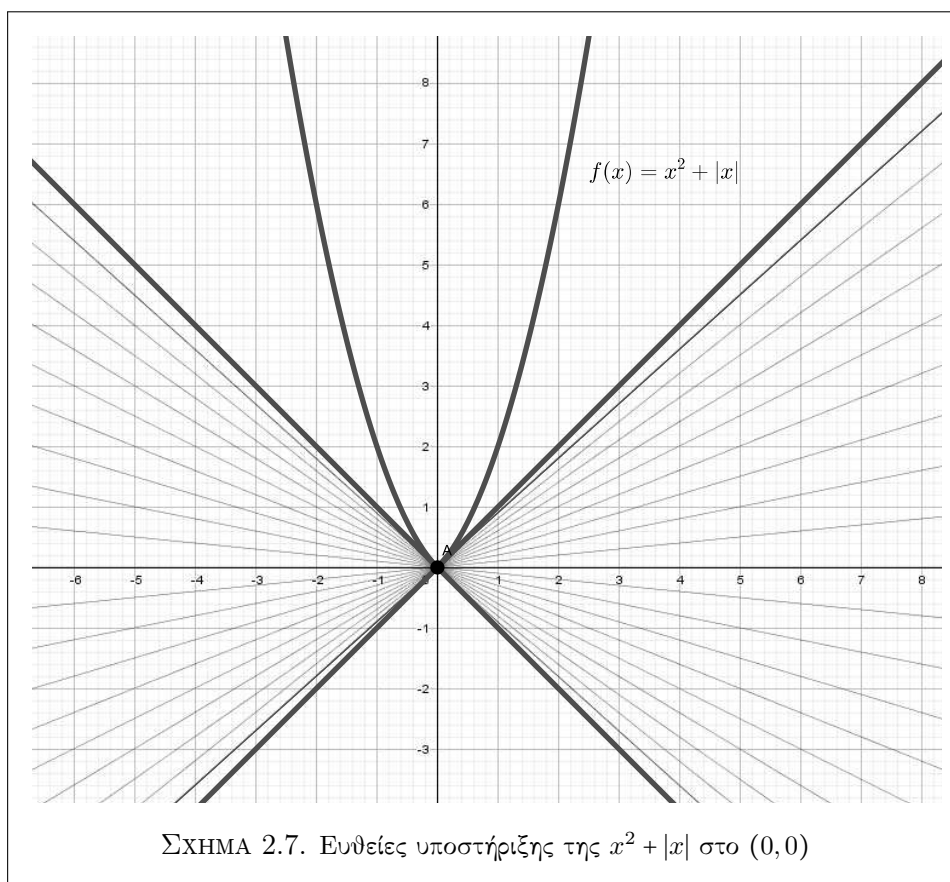
2.2.3 Ευθείες υποστήριξης

Στα σχολικά βιβλία συναντάμε την έννοια «κυρτός» για διάφορα επίπεδα σχήματα:

1. Κυρτή γωνία: Α' Γυμνασίου σ 153,
2. Κυρτή γωνία: Γεωμετρία Α' Λυκείου σ 153,
3. Κυρτή τεθλασμένη: Γεωμετρία Α' Λυκείου, σ 28
4. Κυρτό πολύγωνο: Γεωμετρία Α' Λυκείου, σ. 29

Σε όλους τους ορισμούς των παραπάνω κυρτών σχημάτων (αλλά και εκείνων που υπάρχουν στο μέρος της στερεομετρίας) η κυρτότητα ορίζεται έμμεσα με την βοήθεια των λεγομένων *ευθειών υποστήριξης* (supporting lines) ενός σχήματος Σ . Πρόκειται για ευθείες που περιέχουν ένα τουλάχιστον σημείο του Σ και «αφήνουν» το Σ προς το ίδιο από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζουν. Οι ευθείες υποστήριξης στην περίπτωση της γωνίας, τεθλασμένης ή πολυγώνου είναι οι πλευρές του. Στην περίπτωση της γραφικής παράστασης μιας κυρτής συνάρτησης είναι οι εφαπτομένες της. Η έννοια μπορεί να γενικευθεί ([36] σελ. 12) και για τις κυρτές συναρτήσεις υπό ευρεία έννοια (βλ και ΣΧΗΜΑ 2.7) αν για κάθε σημείο $(x_0, f(x_0))$ της $\mathcal{C}_f$ ορίσουμε ως ευθεία υποστήριξης την $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ όπου m είναι οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



2.3 Η κατά τα μέσα κυρτότητα

Ο Jensen όρισε τις κυρτές συναρτήσεις να είναι εκείνες που ικανοποιούν μια ειδική περίπτωση της ανισότητας του, εκείνη όπου οι συντελεστές λ_1, λ_2 είναι ίσοι και επομένως ίσοι με $\frac{1}{2}$. Στο παρόν κείμενο θα αποκαλούμε τις συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα *κατά τα μέσα κυρτές* (midpoint convex) δηλαδή ορίζουμε:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. Μία συνάρτηση θα ονομάζεται *κατά το μέσο κυρτή* στο διάστημα Δ αν για κάθε ζεύγος αριθμών x_1, x_2 από το Δ ισχύει

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Επίσης ορίζουμε την *αυστηρώς κυρτή κατά τα μέσα συνάρτηση* κατά τον αναμενόμενο τρόπο:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Μία συνάρτηση θα ονομάζεται *αυστηρώς κατά το μέσο κυρτή*⁴ στο

⁴Στο [61] σελ. 58 ασχ. 19-22 χρησιμοποιείται ο όρος *ασθενώς κυρτή*.

διάστημα Δ αν για κάθε ζεύγος αριθμών $x_1 \neq x_2$ από το Δ ισχύει

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Προφανώς η κατά τα μέσα κυρτότητα είναι ασθενέστερη της κυρτότητας υπό ευρεία έννοια αφού μία συνάρτηση κυρτή υπό ευρεία έννοια θα είναι και κατά τα μέσα κυρτή. Ο Jensen ([19]) απέδειξε το αντίστροφο για τις συνεχείς συναρτήσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7. (Jensen). Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και κατά τα μέσα κυρτή στο διάστημα Δ τότε είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια στο Δ .

Αρχικά θα δούμε την παραπάνω πρόταση ακολουθώντας ιδέες από το άρθρο ([19]) του Jensen. Αργότερα θα δώσουμε και μία ακόμη απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το επόμενο:

ΛΗΜΜΑ 1. Αν η f είναι κατά τα μέσα κυρτή στο Δ τότε για κάθε θετικό ακέραιο n και κάθε $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Delta$ ισχύει:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δείχνουμε πρώτα την ισχύ της ανισότητας για την ειδική περίπτωση όπου $n = 2^m$ με επαγωγή στο m .

για $m = 1$ Ισχύει λόγω του ορισμού της κατά τα μέσα κυρτής συνάρτησης.

για $m \leq k$ Υποθέτουμε ότι για κάθε $m \leq k$ ισχύει

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^m}}{2^m}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^m})}{2^m}.$$

για $m = k + 1$ Έχουμε:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right) \leq \\ &\frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) + f\left(\frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \right) \stackrel{\text{υπόθεση επαγωγής}}{\leq} \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^k})}{2^k} + \frac{f(x_{2^k+1}) + f(x_{2^k+2}) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^k} \right) = \\ &\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^k}) + f(x_{2^k+1}) + f(x_{2^k+2}) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Για την περίπτωση που ο n δεν είναι δύναμη του 2 θα υπάρχει κατάλληλος θετικός ακέραιος m ώστε:

$$2^{m-1} < n < 2^m.$$

Αν ονομάσουμε

$$y = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

έχουμε

$$f(y) = f\left(\frac{ny + \overbrace{y + \dots + y}^{2^n - n}}{2^n}\right) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n + \overbrace{y + \dots + y}^{2^n - n}}{2^n}\right) \stackrel{\leq}{\leq} \text{προσθετέοι}$$

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n) + \overbrace{f(y) + \dots + f(y)}^{2^n - n}}{2^n} = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n) + (2^n - n)f(y)}{2^n}$$

Επομένως:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n) + (2^n - n)f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)}{2^n}$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$2^n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq f(x_1) + \dots + f(x_n) + (2^n - n)f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

δηλαδή ότι:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Με αυτό έχουμε καλύψει όλες τις περιπτώσεις για το n και η απόδειξη είναι πλήρης. Ο.Ε.Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 7 Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε αριθμό $\lambda \in (0, 1)$ και κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad (*)$$

Δείχνουμε πρώτα ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για την περίπτωση όπου ο λ είναι ρητός έστω $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν είναι ακέραιοι με $0 < \mu < \nu$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) &= f\left(\left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right)x_1 + \frac{\mu}{\nu}x_2\right) = f\left(\frac{(\nu - \mu)x_1 + \mu x_2}{\nu}\right) = \\ &= f\left(\frac{\overbrace{x_1 + \dots + x_1}^{\nu - \mu} + \overbrace{x_2 + \dots + x_2}^{\mu}}{\nu}\right) \leq \frac{\overbrace{f(x_1) + \dots + f(x_1)}^{\nu - \mu} + \overbrace{f(x_2) + \dots + f(x_2)}^{\mu}}{\nu} = \end{aligned}$$

$$\frac{(\nu - \mu) f(x_1) + \mu f(x_2)}{\nu} = (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Επομένως η (*) ισχύει για $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Για την περίπτωση όπου ο λ είναι δεν είναι ρητός θεωρούμε ακολουθία ρητών (λ_i) από το διάστημα $(0, 1)$ που συγκλίνει στο λ . Για κάθε i θα ισχύει

$$f((1 - \lambda_i)x_1 + \lambda_i x_2) \leq (1 - \lambda_i) f(x_1) + \lambda_i f(x_2)$$

Παίρνοντας όρια για $i \rightarrow +\infty$ στην παραπάνω ανισότητα και λόγω της συνέχειας της f θα έχουμε πάλι ότι η (*) ισχύει. Ο.Ε.Δ.



Η ανισότητα

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

στην περίπτωση όπου $x_1 = x_2$ προφανώς ισχύει ως ισότητα. Αν αυτή είναι και η μοναδική περίπτωση που ισχύει η ισότητα δηλαδή με $x_1 \neq x_2$ ισχύει ως γνήσια ανισότητα τότε σε περίπτωση που η f είναι συνεχής, μπορούμε με μικρές επεμβάσεις στις προηγούμενες αποδείξεις να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η f είναι αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έννοια. Πράγματι έχουμε την:

ΠΡΟΤΑΣΗ 8. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε ζεύγος διαφορετικών στοιχείων του x_1, x_2 ισχύει

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

τότε είναι αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έννοια στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Μπορούμε στο ΛΗΜΜΑ 1 να θέσουμε σαν υπόθεση ότι

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

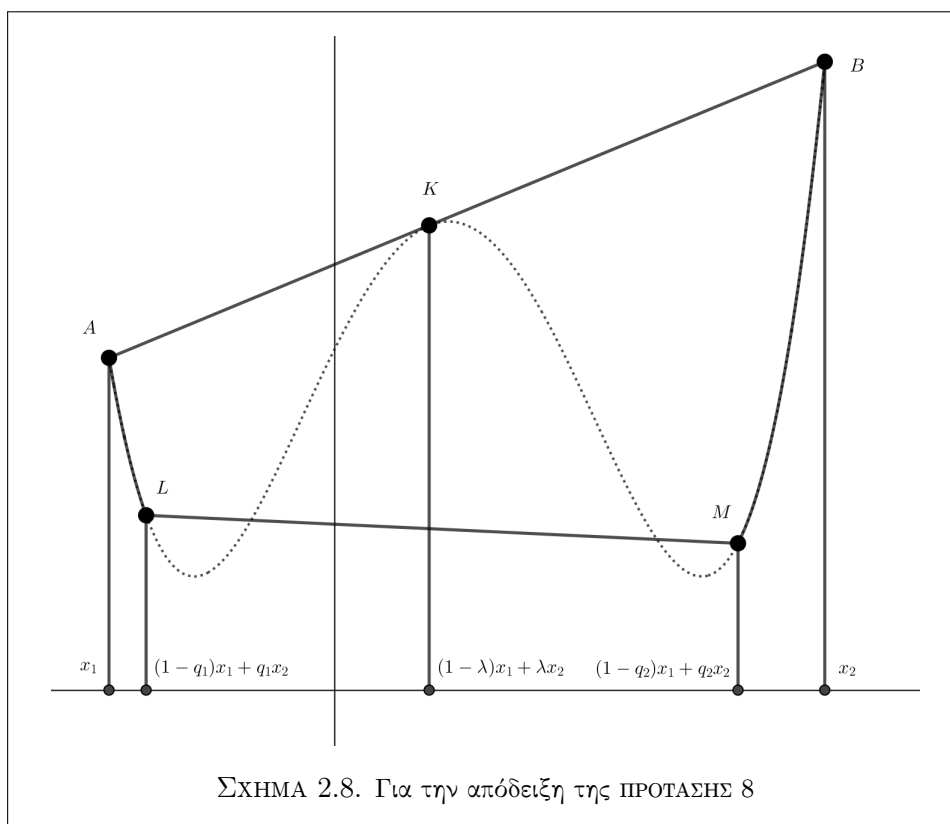
και μία τουλάχιστον από τις παραπάνω ανισότητες να είναι γνήσια. Τότε επαναλαμβάνοντας την απόδειξη καταλήγουμε στο ότι η ανισότητα του συμπεράσματος του λήμματος είναι επίσης γνήσια. Συγκεκριμένα:

1. Στο πρώτο μέρος της απόδειξης όταν $n = 2^m$ το κρίσιμο σημείο είναι στο βήμα της επαγωγής όπου αφού

$$\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k} < \frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}$$

θα ισχύει

$$f\left(\frac{\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right) < \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) + f\left(\frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \right).$$



2. Στο δεύτερο μέρος όπου ο n είναι τυχόν τό κρίσιμο σημείο είναι όταν θεωρούμε το

$$f\left(\frac{ny + \overbrace{y + \dots + y}^{2^n - n}}{2^n}\right) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n + \overbrace{y + \dots + y}^{2^n - n}}{2^n}\right)$$

όπου στο άθροισμα

$$x_1 + \dots + x_n + y + \dots + y$$

κάποιος από τους x_i είναι διάφορος του y και επομένως δύο τουλάχιστον από τους 2^n προσθετέους είναι άνισοι.

Επομένως αν στο λήμμα έχουμε δύο τουλάχιστον άνισους προσθετέους η ανισότητα του συμπεράσματος είναι γνήσια.

Τώρα στην απόδειξη της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 7 εξασφαλίζεται το γνήσιο της ανισότητας (*) όταν το λ είναι ρητός και τα x_1, x_2 είναι διακεκριμένα.

Η γενική περίπτωση με το πέρασμα από ρητό λ σε τυχόντα χρειάζεται προσοχή γιατί οι οριακές διαδικασίες δεν διατηρούν τις γνήσιες ανισότητες. Θεωρούμε $x_1 < x_2$ και ξέρουμε ότι η ανισότητα (*) ισχύει για τα ρητά λ ενώ

για τα άρρητα ενδέχεται να ισχύει ως ισότητα. Θα αποκλείουμε την τελευταία περίπτωση. Ας πούμε λοιπόν ότι για κάποιο λ έχουμε στην (*) ισότητα. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο $K(((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)))$ βρίσκεται επί της χορδής με άκρα τα $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$. Επιλέγουμε ρητούς q_1, q_2 έτσι ώστε

$$x_1 < (1-q_1)x_1 + q_1x_2 < (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 < (1-q_2)x_1 + q_2x_2 < x_2$$

Τότε τα σημεία

$$L((1-q_1)x_1 + q_1x_2, f((1-q_1)x_1 + q_1x_2)) \text{ και}$$

$$M((1-q_2)x_1 + q_2x_2, f((1-q_2)x_1 + q_2x_2))$$

είναι κάτω από την χορδή AB (ΣΧΗΜΑ 2.8). Αλλά το σημείο K πρέπει να είναι επί ή κάτω από την χορδή LM ενώ βρίσκεται πάνω από αυτήν. Άτοπο. Επομένως η (*) ισχύει για όλα τα λ . Ο.Ε.Δ.



Είδαμε ότι μια κατά τα μέσα κυρτή και συνεχής συνάρτηση είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια. Φυσικά το αυτό ισχύει αν αντικαταστήσουμε την υπόθεση συνέχειας με την παραγωγισιμότητα. Αν δε επιπλέον ενισχύσουμε και την υπόθεση της κατά τα μέσα κυρτότητας οδηγούμαστε σε κυρτές συναρτήσεις. Δηλαδή ισχύει το επόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ 9. Κάθε αυστηρώς κατά τα μέσα κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω f μια παραγωγίσιμη και αυστηρώς κατά τα μέσα κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ας συμβολίσουμε για ευκολία με $\lambda(a, b)$ την κλίση ή συντελεστή μεταβολής της f στα a, b :

$$\lambda(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Αν τα $a < b < c$ από το Δ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής πρόοδου δηλαδή το b είναι ο μέσος αριθμητικός των a, c τότε από την υπόθεση έχουμε ότι

$$f(b) = f\left(\frac{a+c}{2}\right) < \frac{f(a) + f(c)}{2}.$$

Από αυτήν έχουμε ότι

$$f(b) - f(a) < f(c) - f(b)$$

και διαιρώντας τα δύο μέλη με τους ίσους θετικούς αριθμούς $b-a, c-b$ έχουμε:

$$\lambda(a, b) < \lambda(b, c)$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η παράγωγος της f' είναι αύξουσα και μετά ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Η f' είναι αύξουσα. Θεωρούμε $x_1 < x_2$ από το Δ και τυχόντα θετικό ακέραιο n . Χωρίζουμε το διάστημα $[x_1, x_2]$ σε n υποδιαστήματα ίσου πλάτους με τους αριθμούς $y_i, i = 1, \dots, n-1$ ώστε

$$x_1 < y_1 < y_2, \dots < y_{n-1} < x_2$$

Τότε

$$\lambda(x_1, y_1) < \lambda(y_1, y_2) < \dots < \lambda(y_{n-1}, x_2)$$

που σημαίνει ότι:

$$\frac{f\left(x_1 + \frac{x_2 - x_1}{n}\right) - f(x_1)}{\frac{x_2 - x_1}{n}} < \frac{f\left(x_2 - \frac{x_2 - x_1}{n}\right) - f(x_2)}{-\frac{x_2 - x_1}{n}}$$

Παίρνοντας όρια για $n \rightarrow +\infty$ και αφού τότε $\frac{x_2 - x_1}{n} \rightarrow 0$ βρίσκουμε ότι:

$$f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα. Θεωρούμε πάλι $x_1 < x_2$. Έστω $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Τότε

$$\lambda(x_1, x_3) < \lambda(x_3, x_2)$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_3)$ και $\xi_2 \in (x_3, x_2)$ ώστε $\lambda(x_1, x_3) = f'(\xi_1)$ και $\lambda(x_3, x_2) = f'(\xi_2)$. Άρα

$$f'(x_1) \leq f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \leq f'(x_2)$$

επομένως $f'(x_1) < f'(x_2)$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα. Ο.Ε.Δ.

Γενικά η ιδιότητα της κατά τα μέσα κυρτότητας δεν επαρκεί για να είναι μια συνάρτηση κυρτή υπό ευρεία έννοια. Αυτό φαίνεται από το επόμενο:

ΠΡΟΤΑΣΗ 10. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι κατά τα μέσα κυρτές χωρίς να είναι κυρτές υπό ευρεία έννοια.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $\mathcal{B}$ μία βάση Hamel του $\mathbb{R}$ (θεωρούμενου ως διανυσματικού χώρου) επί του (σώματος) $\mathbb{Q}$. Θεωρούμε $u, v \in \mathcal{B}$ και την (μοναδική) $\mathbb{Q}$ -γραμμική απεικόνιση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται στην βάση $\mathcal{B}$ αντιμετωπίζοντας τα u, v και αφήνοντας τα άλλα στοιχεία της βάσης αναλλοίωτα δηλαδή από τις σχέσεις:

- $\varphi(u) = v$
- $\varphi(v) = u$
- $\varphi(w) = w$ για κάθε $w \in \mathcal{B} - \{u, v\}$

Λόγω γραμμικότητας θα ισχύει:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\varphi(x)$$

και επομένως για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών x_1, x_2 θα ισχύει

$$\varphi\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) = \frac{1}{2}(\varphi(x_1) + \varphi(x_2))$$

από την οποία προκύπτει ότι η φ είναι κατά τα μέσα κυρτή κατά τετριμμένο τρόπο.

Όμως η φ δεν είναι και κυρτή υπό ευρεία έννοια. Αν ήταν, δηλαδή ικανοποιούσε την ανισότητα Jensen, θα ήταν και συνεχής (ΠΡΟΤΑΣΗ 59). Αλλά αφού είναι γραμμική ισχύει και $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ για όλα τα x_1, x_2 δηλαδή ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy. Είναι όμως γνωστό (βλ. π.χ. [58]) ότι αφού είναι συνεχής θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\varphi(x) = cx \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Όμως τότε

$$u = \varphi(v) = cv, \quad v = \varphi(u) = cu$$

και επομένως $c = \pm 1$ δηλαδή τα u, v θα είναι γραμμικώς εξαρτημένα (άτοπο). Ο.Ε.Δ.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ούτε η αυστηρώς κατά τα μέσα κυρτότητα συνεπάγεται την κυρτότητα υπό ευρεία έννοια:

ΠΡΟΤΑΣΗ 11. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι αυστηρώς κατά τα μέσα κυρτές χωρίς να είναι κυρτές υπό ευρεία έννοια.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση φ από την απόδειξη της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 10. Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις σ με $\sigma(x) = x^2$ και $f = \sigma \circ \varphi$.

Η f είναι αυστηρώς κατά τα μέσα κυρτή. Πράγματι

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) &= (\sigma \circ \varphi)\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(\varphi(x_1) + \varphi(x_2))\right)^2 = \\ &= \frac{\varphi^2(x_1) + \varphi^2(x_2) + 2\varphi(x_1)\varphi(x_2)}{4} \underset{(*)}{\leq} \frac{\varphi^2(x_1) + \varphi^2(x_2)}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \end{aligned}$$

Η ισότητα στην (*) ισχύει αν και μόνο αν $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ δηλαδή, δεδομένου ότι η φ είναι 1-1, όταν $x_1 = x_2$.

Η γραφική παράσταση της φ είναι σύνολο πυκνό στο επίπεδο όπως ισχύει με όλες τις ασυνεχείς λύσεις της συναρτησιακής εξίσωσης του Cauchy (βλ. [58]). Αυτό σημαίνει ότι κάθε κλειστό διάστημα Δ απεικονίζεται από την φ σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα τα τετράγωνα των τιμών της φ , δηλαδή οι τιμές της f , στο Δ απαρτίζουν ένα σύνολο πυκνό στο $[0, +\infty)$. Άρα η εικόνα

του Δ μέσω της f δεν μπορεί να είναι κλειστό διάστημα και επομένως η f δεν είναι συνεχής. Άρα η f δεν μπορεί να είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια αφού τότε θα ήταν συνεχής. Ο.Ε.Δ.

Οι κατηγορίες κυρτών συναρτήσεων που έχουμε δει συνοψίζονται στο διάγραμμα του ΣΧΗΜΑΤΟΣ 2.9.

Επανερχόμαστε στην απόδειξη του ότι η κατά τα μέσα κυρτότητα των συνεχών συναρτήσεων συνεπάγεται την υπό ευρεία έννοια κυρτότητα:

ΑΛΛΗ ΜΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 7 ([32] σελ. 10) Υποθέτουμε ότι η f είναι κατά τα μέσα κυρτή και συνεχής και θα δείξουμε ότι είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια δηλαδή ότι για κάθε $x_1 < x_2$ απο Δ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2),$$

πράγμα που όπως έχουμε δει γεωμετρικά σημαίνει ότι η μέρος της C_f που αντιστοιχεί στο διάστημα (x_1, x_2) είναι κάτω από το αντίστοιχο τμήμα της ευθείας που συνδέει τα $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$. Δηλαδή η διαφορά της f και της συνάρτησης $L(x)$ που αντιστοιχεί στην ευθεία των $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ να είναι στο (x_1, x_2) αρνητική.

Ας υποθέσουμε ότι το αποδεικτέο δεν ισχύει. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ώστε η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) - f(x_1)$$

να παίρνει στο (x_1, x_2) και θετικές τιμές. Ας ονομάσουμε M το supremum των θετικών τιμών της g στο $[x_1, x_2]$ και x_0 το infimum των τιμών x για τις οποίες $g(x) = M$. Λόγω συνεχείας της g είναι $g(x_0) = M$ και αφού $g(x_1) = g(x_2) = 0$ είναι $x_1 < x_0 < x_2$. Έστω $t > 0$ με την ιδιότητα $x_1 < x_0 - t < x_0 < x_0 + t < x_2$ ισχύει

- $g(x) < M \quad x \in [x_0 - t, x_0)$
- $g(x) \leq M \quad x \in [x_0, x_0 + t]$

Εδிகότερα:

$$g(x_0 - t) < M, \quad g(x_0 + t) \leq M \quad (*)$$

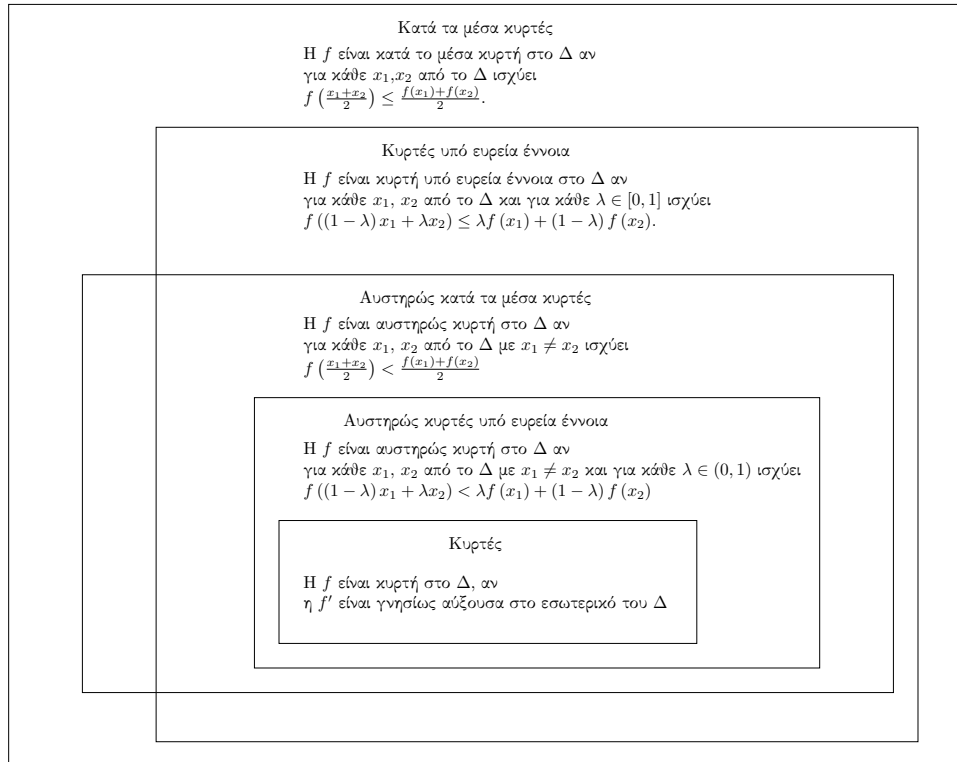
και επομένως:

$$\frac{g(x_0 - t) + g(x_0 + t)}{2} < M = f(x_0) = f\left(\frac{x_0 - t}{2} + \frac{x_0 + t}{2}\right)$$

Αλλά η $(*)$ μας οδηγεί σε άτοπο αφού g είναι της μορφής $f(x) + px + q$ και επομένως κατά τα μέσα κυρτή διότι:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + p\left(\frac{a+b}{2}\right) + q \\ &< \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) + p\left(\frac{a+b}{2}\right) + q = \frac{1}{2}(g(a) + g(b)). \end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟ 41. Η πρώτη απόδειξη της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 7 αν και εκτενέστερη χρησιμοποιεί λιγότερα εργαλεία. Συγκεκριμένα στηρίζεται μόνο στην πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς και όχι στην πληρότητα των πραγματικών που ουσιαδώς χρησιμοποιεί η δεύτερη. Επομένως εξασφαλίζει ότι η πρόταση ισχύει σε κάθε αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα ([56]).



ΣΧΗΜΑ 2.9. Κατηγορίες κυρτών συναρτήσεων.

ΣΧΟΛΙΟ 42. Είδαμε ότι η κατά τα μέσα κυρτότητα απαιτεί ενίσχυση για να αναχθεί σε κυρτότητα υπό ευρεία έννοια. Υπάρχουν διάφορες κατάλληλες συνθήκες:

- Η συνάρτηση να είναι φραγμένη.
- Η συνάρτηση να είναι μονότονη.
- Η συνάρτηση να είναι μετρήσιμη.

Στα επόμενα δίνουμε την απόδειξη για τις δύο πρώτες. Στο [36] σελ. 221-222 αποδεικνύεται ότι μία μετρήσιμη και κατά τα μέσα κυρτή συνάρτηση είναι συνεχής και επομένως και κυρτή υπό ευρεία έννοια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12. Αν μία συνάρτηση f είναι μονότονη και κατά τα μέσα κυρτή στο διάστημα Δ τότε είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η περίπτωση της φθίνουσας αποδεικνύεται όμοια. Θεωρούμε x, y από το Δ για τα οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \leq y$ και λ από το $[0, 1]$. Θα δείξουμε ότι

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (*)$$

Αν $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$ αποδεικτέα προφανώς ισχύει. Έστω ότι $0 < \lambda < 1$. Θεωρούμε μια φθίνουσα ακολουθία ρητών (λ_n) που να συγκλίνει στον λ . Για όλα τα n θα είναι $\lambda \leq \lambda_n$ και επομένως

$$x + \lambda(y - x) \leq x + \lambda_n(y - x) \quad (**)$$

Στην απόδειξη της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 7 είδαμε ότι η ανισότητα $(*)$ ισχύει όταν ο λ είναι ρητός. Έτσι λαμβάνοντας υπ' όψιν και τη μονοτονία της f έχουμε:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) = f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x + \lambda_n(y - x)) \leq (1-\lambda_n)f(x) + \lambda_n f(y),$$

και παίρνοντας όρια για $n \rightarrow +\infty$ έχουμε την $(*)$.

Ο.Ε.Δ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13. Αν μία συνάρτηση f είναι φραγμένη και κατά τα μέσα κυρτή στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ τότε είναι κυρτή υπό ευρεία έννοια στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ⁵ Θα δείξουμε αν μια συνάρτηση είναι κατά τα μέσα κυρτή και φραγμένη στο Δ είναι συνεχής σε αυτό οπότε το συμπέρασμα έπεται από την ΠΡΟΤΑΣΗ 7. Έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 . Η απόδειξη διευκολύνεται αν το x_0 είναι μηδέν και η συνάρτηση μηδενίζεται σε αυτό. Για τον λόγο αυτό εργαζόμαστε όχι με την f αλλά μια κατάλληλη παράλληλη μεταφορά της την

$$g(x) = f(x + x_0) - f(x_0), \quad x \in (\alpha - x_0, \beta - x_0).$$

Προφανώς η g είναι φραγμένη και όπως εύκολα διαπιστώνεται είναι και κατά τα μέσα κυρτή. Θα δείξουμε ότι η g είναι συνεχής στο 0 οπότε αφού

$$f(x) = g(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in (\alpha, \beta),$$

έχουμε ότι αν η g είναι συνεχής στο 0 η f θα είναι συνεχής στο x_0 . Χάριν απλότητας θέτουμε $A = \alpha - x_0$, $B = \beta - x_0$.

Ας υποθέσουμε ότι η g δεν είναι συνεχής στο 0. Τότε δεν επαληθεύεται ο ορισμός της συνέχειας στο 0 σύμφωνα με τον οποίο:

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } x \in (-\delta, \delta) \cap (A, B) \text{ ισχύει } |g(x) - g(0)| < \varepsilon.$$

⁵Η ιδέα προέρχεται από τον σύνδεσμο <https://math.stackexchange.com/questions/3637220/midpoint-convex-bounded-function-is-continuous>

Δηλαδή επαληθεύεται η άρνηση του προηγούμενου:

Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε **για κάθε** $\delta > 0$ να **υπάρχει** $x \in (-\delta, \delta) \cap (A, B)$ ώστε να **ισχύει** $|g(x) - g(0)| \geq \varepsilon$.

Θα καταλήξουμε σε άτοπο με την ακόλουθη βασική ιδέα: Η σχέση $|g(x) - g(0)| \geq \varepsilon$ γράφεται $|g(x)| \geq \varepsilon$. Αν υποθεθεί ότι ο $g(x)$ είναι θετικός τότε η σχέση γίνεται $g(x) \geq \varepsilon$. Λόγω της κατά τα μέσα κυρτότητας έχουμε:

$$\varepsilon \leq g(x) = g\left(\frac{2x+0}{2}\right) \leq \frac{g(2x) + g(0)}{2} = \frac{g(2x)}{2},$$

δηλαδή

$$g(2x) \geq 2\varepsilon \quad (*)$$

Εφαρμόζοντας την $(*)$ n φορές βρίσκουμε ότι

$$g(2^n x) \geq 2^n \varepsilon,$$

από την οποία προκύπτει ότι υπάρχει τιμή της g η οποία μπορεί να ξεπεράσει οποιονδήποτε αριθμό αφού δοθέντος $M > 0$ μπορούμε να έχουμε $g(2^n x) \geq M$ αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $2^n \varepsilon \geq M$ δηλαδή $n \geq \frac{\ln M - \ln \varepsilon}{\ln 2}$. Ωστόσο η παραπάνω ιδέα στηρίζεται σε δύο παραδοχές

Παραδοχή 1. Το $g(x)$ είναι θετικό. Η παραδοχή αυτή εξασφαλίζεται εύκολα. Αν είναι $g(x) < 0$ τότε αφού

$$0 = g(0) = g\left(\frac{x + (-x)}{2}\right) \leq \frac{g(x) + g(-x)}{2},$$

είναι $g(x) + g(-x) \geq 0$ και $g(-x) \geq 0 \geq -g(x)$. Τότε

$$|g(-x)| = g(-x) \geq -g(x) = |g(x)| \geq \varepsilon.$$

Μπορούμε λοιπόν αντί να εργασθούμε με το x να εργασθούμε με το $-x$.

Παραδοχή 2. Το $g(2^n x)$ ορίζεται. Για να εξασφαλίσουμε αυτή την παραδοχή χρειάζεται το $2^n x$ να ανήκει στο (A, B) . Για να το πετύχουμε αρκεί για τον συγκεκριμένο ε να θεωρήσουμε τον $\delta > 0$ ώστε $(-\frac{\delta}{2^n}, \frac{\delta}{2^n}) \subseteq (-\delta, \delta) \subseteq (A, B)$ και να εργασθούμε με τον $\delta' = \frac{\delta}{2^n}$ επιλέγοντας το x από το $(-\frac{\delta}{2^n}, \frac{\delta}{2^n})$ ώστε $|g(x)| \geq \varepsilon$.

Ανακεφαλαιώνοντας: Έχουμε τον ε δεδομένο. Δοθέντος του $M > 0$ βρίσκουμε n και γι αυτόν τον n παίρνουμε το $(-\frac{\delta}{2^n}, \frac{\delta}{2^n})$ στο οποίο υπάρχει x για το οποίο τελικά $g(2^n x) \geq M$ και επομένως καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα η αρχική f είναι συνεχής και επομένως κυρτή υπό ευρεία έννοια. Ο.Ε.Δ.

2.4 Το 4ο θέμα του 2003.

2.4.1 Η διατύπωση του θέματος

Στις εξετάσεις του έτους 2003 δόθηκε το ακόλουθο θέμα:

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ να αποδείξετε ότι:

1. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) .
2. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.
3. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

2.4.2 Γιατί το θέμα ήταν λάθος.

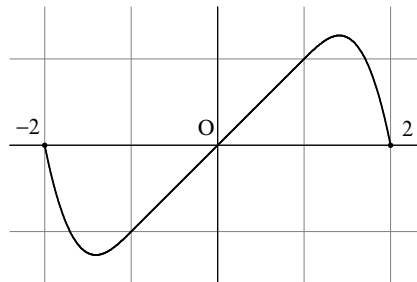
Το θέμα αυτό είναι λάθος. Διότι ο μόνος ορισμός που μπορούμε να δεχθούμε στις εξετάσεις για τα σημεία καμπής είναι εκείνος του σχολικού βιβλίου. Ένα αντιπαράδειγμα είναι το ακόλουθο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23.

Έστω η συνάρτηση $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} -2x^3 - 6x^2 - 5x - 2 & , \quad -2 \leq x \leq -1 \\ x & , \quad -1 < x < 1 \\ -2x^3 + 6x^2 - 5x + 2 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Η γραφική της παράσταση είναι:



Η πρώτη παράγωγος της είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} -6x^2 - 12x - 5 & , \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 1 & , \quad -1 < x < 1 \\ -6x^2 + 12x - 5 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$f''(x) = \begin{cases} -12x - 12 & , \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 0 & , \quad -1 < x < 1 \\ -12x + 12 & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

και εύκολα διαπιστώνεται ότι η f δεν έχει σημεία καμψής.

2.4.3 Η υπεκφυγή του γενικού ορισμού.

Γύρω από το συγκεκριμένο θέμα γράφτηκε μια μελανή σελίδα στην ιστορία των πανελληνίων εξετάσεων. Η επιτροπή εξετάσεων έστειλε μια εσφαλμένη λύση (σύμφωνα με την οποία η αλλαγή προσήμου της δεύτερης παραγώγου συνεπάγεται την ύπαρξη σημείου καμψής) και αρνήθηκε να παραδεχθεί ότι το θέμα ήταν λάθος. Την ίδια θέση υιοθέτησε και το Υπουργείο Παιδείας. Ζητήθηκε από τους βαθμολογητές να διορθώσουν τα γραπτά με βάση την εσφαλμένη λύση. Το τότε (2003) Διοικητικό Συμβούλιο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας απέφυγε να τοποθετηθεί επί της ουσίας προσφέροντας έτσι κάλυψη στην επιτροπή εξετάσεων⁶. Από την επιτροπή των εξετάσεων επινοήθηκε και η εξής «γραμμή» υπεράσπισης του λάθος θέματος. Ελέγχθη ότι ναι μεν το θέμα δεν είναι σωστό με βάση τον ορισμό του σχολικού βιβλίου αλλά δεν είναι μαθηματικά εσφαλμένο αν υιοθετήσουμε άλλο ορισμό. Ο ορισμός που προτάθηκε ήταν ακριβώς εκείνος της κυρτής υπό ευρεία έννοια που επιτρέπει μέρη της γραφικής παράστασης να είναι ευθείες και παρέκαμπτε τα πρώτα αντιπαραδείγματα. Ωστόσο όπως απέδειξαν τότε αρκετοί μαθηματικοί ούτε με τον πιο γενικό, άρα και πιο χαλαρό, ορισμό το θέμα ήταν σωστό.

2.4.4 Γιατί το θέμα ήταν λάθος ακόμη και με τον γενικό ορισμό.

ΣΕ ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΕΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΟΝΟΝ ΘΑ ΥΙΟΘΕΤΗΣΟΥΜΕ ΤΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ:

- Ως κυρτές συναρτήσεις θεωρούμε εκείνες που είναι κυρτές υπό ευρεία έννοια και κοίλες εκείνες που προκύπτουν με αντιστροφή της ανισότητας (οι ευθείες είναι κυρτές και κοίλες).
- Ως θέσεις καμψής θεωρούμε εκείνα τα x_0 για τα οποία σε κάποιο διάστημα (a, x_0) η συνάρτηση είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) και σε κάποιο διάστημα (x_0, b) η συνάρτηση είναι κοίλη (αντιστοίχως κυρτή). Φυσικά και όλα τα εσωτερικά σημεία ευθυγράμμων τμημάτων που τυχόν ανήκουν στην γραφική παράσταση θεωρούνται σημεία καμψής.

⁶Βλ. ΛΑΚΑΣΑΣ, Α. Έτσι συγκάλυψαν την γκάφα με το λάθος θέμα Μαθηματικών. Εφημερίδα Η ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ 8-6-2003 <https://www.kathimerini.gr/society/153151/etsi-syngalypsan-tin-gkafa-me-to-lathos-thema-ton-mathimatikon/>

Με αυτές τις παραδοχές θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

ΠΡΟΤΑΣΗ 14. Υπάρχει διάστημα $[\alpha, \beta]$ και συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια ώστε

- $f(\alpha) = f(\beta) = 0$
- $f(\gamma) > 0, f(\delta) < 0$ για κάποια $\gamma, \delta \in (\alpha, \beta)$

η οποία δεν έχει σημεία καμπής.

2.4.4.1 Πρώτη προσέγγιση για την απόδειξη της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 14.

Στα επόμενα αναπτύσσεται μια σχετικά απλή απόδειξη⁷ του ότι ακόμη και με τον γενικότερο ορισμό το 4ο θέμα του 2003 ήταν λάθος.

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το σύνολο $\mathcal{C}$ του Cantor. Υπενθυμίζεται ([7] σελ. 25, [38] σελ. 41) ότι το σύνολο του Cantor απαρτίζεται από εκείνα τα στοιχεία του διαστήματος $[0, 1]$ τα οποία *μπορούν* να γραφούν ως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad (\diamond)$$

όπου $a_n = 0$ ή $a_n = 2$. Α σημειωθεί ότι η τριαδική παράσταση (όπως και η δεκαδική) δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες εκτός αν τεθούν επιπλέον συνθήκες. Έτσι μολονότι

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \dots$$

ο $\frac{1}{3}$ ανήκει στο σύνολο του Cantor αφού

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots$$

και επομένως είναι αριθμός της μορφής $(\diamond)$.

Το σύνολο του Cantor κατασκευάζεται ως εξής: Θέτουμε $I_0 = [0, 1]$. Χωρίζουμε το I_0 σε τρία ισομήκη διαστήματα με άκρα

$$0, \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}, 1$$

. Έτσι

$$I_0 = [0, 1] = \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right]}_{K_{1,1}} \cup \underbrace{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{A_{1,1}} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, 1\right]}_{K_{1,2}}$$

⁷Η ιδέα της απόδειξης οφείλεται στον Δρ. Κωνσταντίνο Γκότση μέλος ΕΔΙΠ στο Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών ο οποίος μου την ανέφερε σε επικοινωνία μας την ίδια ημέρα των εξετάσεων (29-5-2003).

Αφαιρούμε από το I_0 το μεσαίο διάστημα $\Delta_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. και έχουμε έτσι το σύνολο

$$I_1 = I_0 - A_{1,1} = \underbrace{\left[0, \frac{1}{3}\right]}_{K_{1,1}} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{3}, 1\right]}_{K_{1,2}}$$

Χωρίζουμε κάθε ένα από τα δύο κλειστά διαστήματα $K_{1,1}$ και $K_{1,2}$ σε τρία ισομήκη διαστήματα με άκρα αντίστοιχα:

$$0, \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \quad \frac{2}{9}, \frac{3}{9}$$

και

$$\frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \quad \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \quad \frac{8}{9}, 1$$

αντιστοίχως. Είναι:

$$I_1 = \underbrace{\left[0, \frac{1}{9}\right]}_{K_{2,1}} \cup \underbrace{\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]}_{A_{2,1}} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]}_{K_{2,2}} \cup \underbrace{\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]}_{K_{2,3}} \cup \underbrace{\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]}_{A_{2,2}} \cup \underbrace{\left[\frac{8}{9}, 1\right]}_{K_{2,4}}$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε τα δύο μεσαία διαστήματα κάθε τριάδας δηλαδή τα ανοικτά διαστήματα

$$A_{2,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), A_{2,2} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

Απομένει το σύνολο

$$I_2 = \underbrace{\left[0, \frac{1}{9}\right]}_{K_{2,1}} \cup \underbrace{\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]}_{K_{2,2}} \cup \underbrace{\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]}_{K_{2,3}} \cup \underbrace{\left[\frac{8}{9}, 1\right]}_{K_{2,4}}$$

Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο χωρίζοντας τα διαστήματα που έχουν απομείνει σε τρία ισομήκη διαστήματα και αφαιρώντας τα εσωτερικά σημεία των μεσαίων διαστημάτων. Έτσι σχηματίζουμε μια ακολουθία συνόλων:

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_\nu \supseteq I_{\nu+1} \supseteq \dots$$

Το I_ν είναι ένωση 2^ν κλειστών ξένων διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^\nu}$. Το $I_{\nu+1}$ προκύπτει από το I_ν με τριχοτόμηση των 2^ν διαστημάτων που το απαρτίζουν, αφαίρεση των εσωτερικών σημείων των 2^ν μεσαίων διαστημάτων

$$A_{\nu,1}, A_{\nu,2}, \dots, A_{\nu,2^\nu}$$

που οδηγεί σε διπλασιασμό των υπαρχόντων διαστημάτων δηλαδή σε $2 \cdot 2^\nu = 2^{\nu+1}$ που το κάθε ένα έχει μήκος το $\frac{1}{3}$ του προηγούμενου μήκους δηλαδή $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^\nu} = \frac{1}{3^{\nu+1}}$.

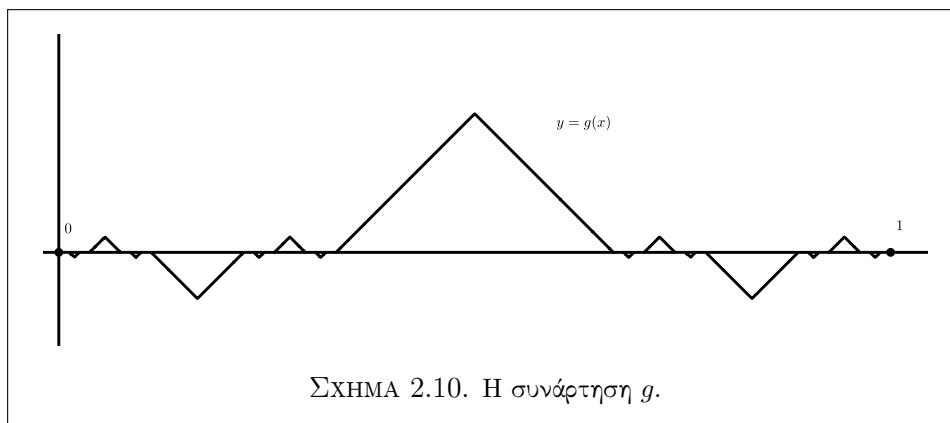
Κάθε I_ν περιέχει τα 0 και 1. Επομένως η τομή τους $\bigcap_{\nu=0}^{\infty} I_\nu$ των I_ν είναι μη κενό σύνολο. Πρόκειται για το σύνολο $\mathcal{C}$ του Cantor. Το σύνολο $\mathcal{C}$ έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες που κάποιες θα χρησιμοποιήσουμε εκ των ενόντων στα επόμενα.

2.4.4.1.1 1η Απόδειξη της πρότασης 14. Η ιδέα της απόδειξης είναι να δημιουργήσουμε την συνάρτηση μας εκκινώντας από μία συνεχή μεν αλλά «κακή» δεύτερη παράγωγο που να μην «επιτρέπει» την ύπαρξη σημείων καμπής. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

1. $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{C}$.
2. $g(x) = (-1)^\nu \left(\left| x - \frac{a_{\nu,\mu} + b_{\nu,\mu}}{2} \right| - \frac{b_{\nu,\mu} - a_{\nu,\mu}}{2} \right)$ αν $x \in A_{\nu,\mu} = (a_{\nu,\mu}, b_{\nu,\mu})$, $\mu = 1, 2, \dots, 2^{\nu-1}$ όπου $A_{\nu,\mu}$ είναι το μ -οστό ανοικτό διάστημα που αφαιρείται στο ν -οστό βήμα σχηματισμού του συνόλου του Cantor.

Η γραφική παράσταση της g προκύπτει αν σε κάθε αφαιρούμενο διάστημα τοποθετήσουμε ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο που έχει το τμήμα που ορίζει το διάστημα ως υποτείνουσα

- Προς τα άνω αν πρόκειται για διάστημα που αφαιρείται στην 1η, 3η, 5η, ... φάση σχηματισμού του συνόλου του Cantor
- προς τα κάτω αν αφαιρείται κατά την 2η, 4η, 6η, .. φάση.

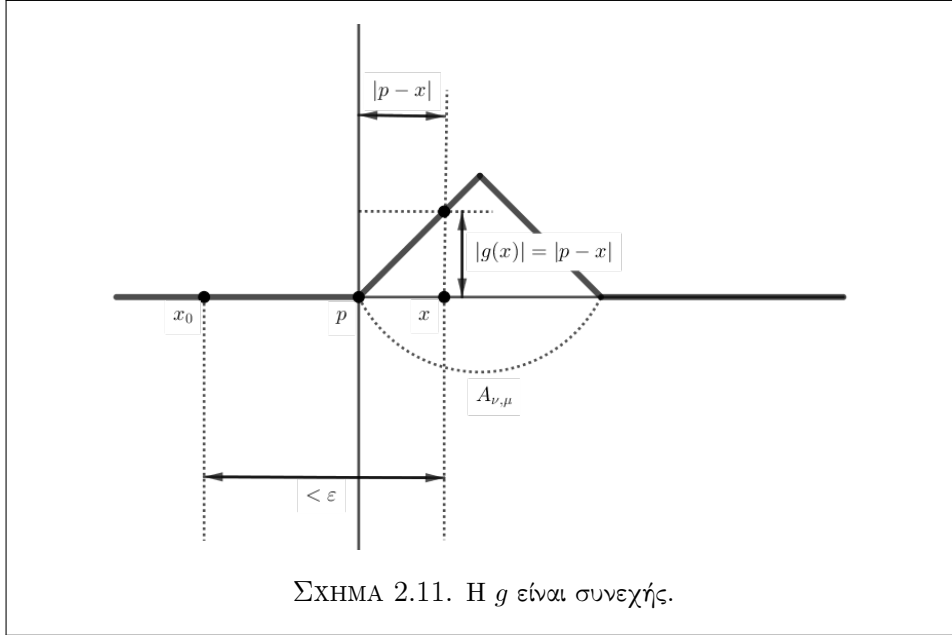


ΣΧΗΜΑ 2.10. Η συνάρτηση g .

Η συνάρτηση g είναι συνεχής. Αυτό διότι:

1. Είναι προφανώς συνεχής σε κάθε x_0 που ανήκει σε κάποιο από τα ανοικτά διαστήματα $A_{\nu,\mu}$.
2. Έστω τώρα $x_0 \in \mathcal{C}$ και $\varepsilon > 0$. Έστω ότι για κάποιο $x \in [0, 1]$ ισχύει $|x - x_0| < \varepsilon$. Για το x διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
 - (α') $x \in \mathcal{C}$. Τότε $|g(x)| = 0 < \varepsilon$.
 - (β') $x \in [0, 1] - \mathcal{C}$. Τότε το x ανήκει σε κάποιο διάστημα $A_{\nu,\mu}$. Έστω (ΣΧΗΜΑ 2.11) p το εγγύτερο προς το x άκρο του $A_{\nu,\mu}$ (αν το x είναι

μέσο του $A_{\nu,\mu}$ επιλέγουμε ως p ένα οποιοδήποτε από τα δύο άκρα του). Τότε $|g(x)| = |p - x| < |x_0 - x| < \varepsilon$. Άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \varepsilon$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ να είναι $|g(x) - g(x_0)| = |g(x)| < \varepsilon$. Επομένως και σε αυτή την περίπτωση η g είναι συνεχής στο x_0 .



Έστω τώρα η συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$h(x) = \int_0^x \left(\int_0^u g(t) dt \right) du - x \int_0^1 \left(\int_0^u g(t) dt \right) du.$$

Η h είναι προφανώς δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και έχει δεύτερη παράγωγο την συνεχή g . Επίσης $h(0) = h(1) = 0$.

Έστω $\Delta = [-1, 1]$ και f η συνάρτηση που ορίζεται στο Δ με την βοήθεια της h επεκτείνοντας την στο $[-1, 0)$ με μία συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων. Δηλαδή ορίζουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -h(-x) & , \quad -1 \leq x < 0 \\ h(x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ισχύει

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0^+)$$

και αφού η f είναι παραγωγίσιμη και σε όλα τα μη μηδενικά σημεία του $[-1, 1]$ είναι και παραγωγίσιμη είναι δε:

$$f'(x) = \begin{cases} h'(-x) & , \quad -1 \leq x < 0 \\ h'(x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Επίσης

$$f''(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h'(-x) - h'(0)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-h''(-x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-g'(-x)) = 0 = f''(0^+)$$

Επομένως η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο την

$$f''(x) = \begin{cases} -g(-x) & , \quad -1 \leq x < 0 \\ g(x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής. Τέλος η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[0, 1]$ διότι αν ήταν θα ήταν και η δεύτερη παράγωγος της κάτι που προφανώς είναι άτοπο. Άρα στο $(0, 1)$ παίρνει μία μη μηδενική τιμή και λόγω συμμετρίας στο $(-1, 0)$ παίρνει την αντίθετη της.

Συνοψίζοντας η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν $\gamma, \delta \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\gamma) > 0$, $f(\delta) < 0$.

Θα δείξουμε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να αποδείξουμε ότι η f δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του $[0, 1]$ οπότε λόγω συμμετρίας δεν μπορεί να παρουσιάζει καμπή ούτε στο $[-1, 0)$. Έστω λοιπόν $x_0 \in [0, 1]$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$x_0 \notin \mathcal{C}$. Τότε το x_0 ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα $A_{\nu, \mu}$ στο οποίο η δεύτερη παράγωγος της f δηλαδή η g παίρνει μόνο θετικές ή μόνο αρνητικές τιμές και επομένως δεν μπορεί να έχουμε καμπή στο x_0 .

$x_0 \in \mathcal{C}$. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ένα οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα S που περιέχεται στο $[0, 1]$ και του οποίου το ένα άκρο είναι το x_0 . Έστω s το μήκος του διαστήματος S . Αφού το x_0 ανήκει στο $\mathcal{C}$ τότε ανήκει σε όλα τα I_ν και για κάθε ν . Αυτό σημαίνει ότι για κάθε ν θα ανήκει πάντα σε κάποιο διάστημα $K_{\nu, \mu}$ το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{3^\nu}$. Αν θεωρήσουμε ν_0 ώστε $\frac{1}{3^{\nu_0}} < s$ τότε και για κάθε $\nu > \nu_0$ θα είναι $\frac{1}{3^\nu} < s$ συνεπώς για $\nu > \nu_0$ το S θα έχει και σημεία εκτός του $K_{\nu, \mu}$ που θα ανήκουν σε κάποιο $A_{\nu, \mu}$. Σε αυτά για ν περιττό η g θα παίρνει θετικές τιμές και για ν άρτιο παίρνει αρνητικές. Άρα σε κάθε ανοικτό διάστημα με άκρο το x_0 η δεύτερη παράγωγος της f παίρνει ετερόσημες τιμές.

Από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις συνάγουμε ότι σε κανένα σημείο του $[0, 1]$ η f δεν έχει καμπή. Ο.Ε.Δ.

2.4.4.2 Δεύτερη προσέγγιση για την απόδειξη της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 14.

Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιεί περισσότερες προκαταρκτικές έννοιες από την προηγούμενη. Θα εργασθούμε αυτή τη φορά στο διάστημα $I = [0, 1]$. Ας

θεωρήσουμε τον διανυσματικό χώρο $C^2[0, 1]$ των συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν για μία συνεχή συνάρτηση g στο I ορίσουμε

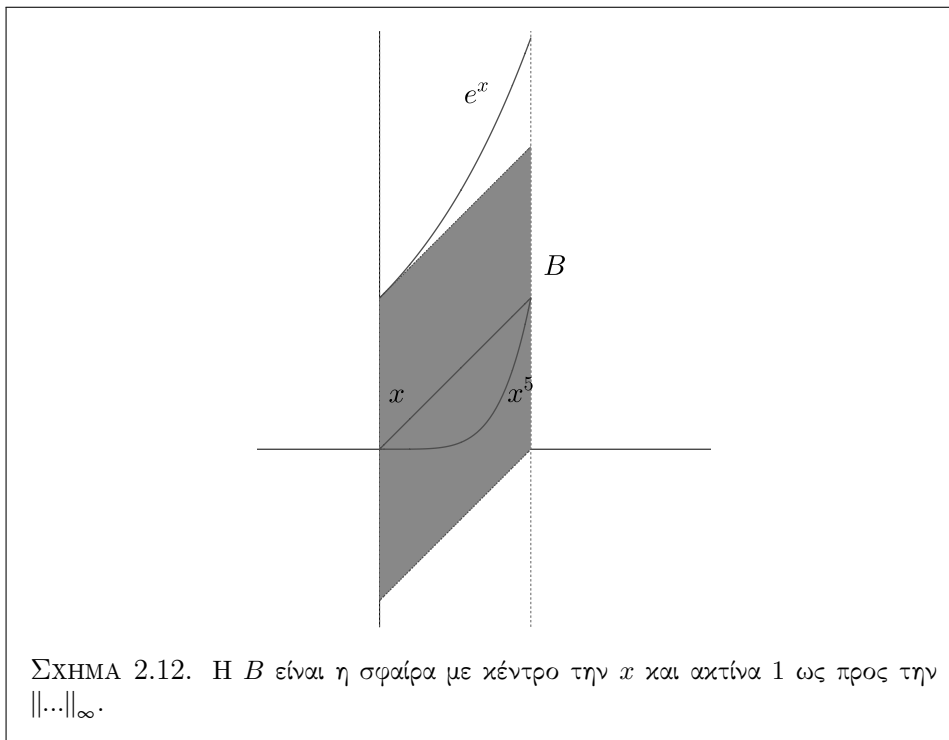
$$\|g\|_{\infty} = \sup \{|g(x)| : x \in I\} = \max \{|g(x)| : x \in I\}$$

την $\sup$ στάθμη⁸ (norm) τότε το $C^2[0, 1]$ εφοδιασμένο με την στάθμη (norm):

$$\|f\|_{C^2} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty},$$

είναι ([14] σελ 316) χώρος Banach (πλήρης σταθμισμένος χώρος (αλλιώς πλήρης χώρος με norm)).

Ας σημειωθεί ότι η $\|\dots\|_{C^2}$ είναι ισχυρότερη από την $\|\dots\|_{\infty}$. Επίσης ενώ η $\|\dots\|_{\infty}$ επιδέχεται μια άμεση γεωμετρική ερμηνεία αυτό δεν συμβαίνει με την $\|\dots\|_{C^2}$. Για παράδειγμα ως προς την $\|\dots\|_{\infty}$ η σφαίρα B με κέντρο την x και ακτίνα 1 περιλαμβάνει όλες τις συναρτήσεις που η γραφική τους παράσταση βρίσκεται στην ταινία που προκύπτει αν μετατοπίσουμε άνω-κάτω την x κατά 1. Η B περιέχει την συνάρτηση x^5 αλλά όχι την e^x (ΣΧΗΜΑ 2.12) η οποία απέχει από την x , ως προς την $\|\dots\|_{\infty}$, απόσταση μεγαλύτερη το ψ 1. Ωστόσο ως προς την $\|\dots\|_{C^2}$ η e^x βρίσκεται στην x εγγύτερα της x^5 .



ΣΧΗΜΑ 2.12. Η B είναι η σφαίρα με κέντρο την x και ακτίνα 1 ως προς την $\|\dots\|_{\infty}$.

⁸Την απόδοση του όρου norm ως στάθμη την έμαθα από τον αείμνηστο Καθηγητή Ανδρέα Ζαχαρίου.

2.4.4.2.1 2η Απόδειξη της πρότασης 14. Έστω το σύνολο M όλων των συναρτήσεων του $C^2[0, 1]$ που:

- Μηδενίζονται στα $0, 1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμες
- έχουν συνεχή δεύτερη παράγωγο
- $f\left(\frac{1}{4}\right) = -1, f\left(\frac{3}{4}\right) = 1$.

Σημειώνεται ότι το M δεν είναι υπόχωρος του χώρου Banach $C^2[0, 1]$ διότι δεν είναι διανυσματικός χώρος αλλά απλώς είναι μετρικός χώρος με απόσταση την

$$d(\varphi, \sigma) = \|\varphi - \sigma\|_{C^2}.$$

Θα δείξουμε ότι κάποια από τις συναρτήσεις του M δεν έχει σημείο καμπής και έτσι θα έχουμε αποδείξει την ΠΡΟΤΑΣΗ 14.

ΛΗΜΜΑ 2. Ο μετρικός χώρος M είναι πλήρης.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν θεωρήσουμε μια ακολουθία (f_n) στοιχείων του M η οποία συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση f του $C^2[0, 1]$ ως προς την στάθμη $\|f\|_{C^2}$. Προφανώς η ακολουθία των τιμών της (f_n) στα $0, 1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ συγκλίνει στις τιμές της f στα σημεία αυτά και επομένως $f(0) = f(1) = 0$ και $f\left(\frac{1}{4}\right) = -1, f\left(\frac{3}{4}\right) = 1$. Άρα η f ανήκει στο M . Επομένως το M είναι κλειστό υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου $C^2[0, 1]$. Επομένως είναι, ως μετρικός χώρος, πλήρης. Ο.Ε.Δ.

Αν μία συνάρτηση φ του M έχει καμπή στο $x_0 \in (0, 1)$ τότε θα υπάρχουν a, b με $0 < a < x_0 < b < 1$ ώστε στο διάστημα (a, x_0) η συνάρτηση είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) και στο διάστημα (x_0, b) είναι κοίλη (αντιστοίχως κυρτή). Επομένως θα υπάρχουν ρητοί p, q με $0 < a < p < x_0 < q < 1$ ώστε η φ να είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) στο (p, x_0) και κοίλη (αντιστοίχως κυρτή) στο (x_0, q) . Για κάθε ζεύγος ρητων p, q με $0 < p < q < 1$ συμβολίζουμε:

- με $A_{p,q}$ το σύνολο των $\varphi \in M$ οι οποίες είναι κοίλες σε κάποιο διάστημα $(p, x_0) \subset (p, q)$ και κυρτές στο (x_0, q) ,
- με $\Delta_{p,q}$ το σύνολο των $\varphi \in M$ οι οποίες είναι κυρτές σε κάποιο διάστημα $(p, x_0) \subset (p, q)$ και κοίλες στο (x_0, q) .

Κάθε συνάρτηση που έχει καμπή θα ανήκει τουλάχιστον σε ένα $A_{p,q}$ ή σε ένα $\Delta_{p,q}$. Φυσικά αν μία συνάρτηση ανήκει σε κάποιο από τα $A_{p,q}$ ανήκει σε άπειρα από αυτά και το αυτό ισχύει αν ανήκει σε κάποιο από τα $\Delta_{p,q}$. Τέλος δεν αποκλείεται μια συνάρτηση να ανήκει σε σύνολα και των δύο κατηγοριών.

Η γενική ιδέα της απόδειξης είναι να εξασφαλίσουμε ότι κάθε ένα από τα $A_{p,q}, \Delta_{p,q}$ είναι αραιό ή αλλιώς πουθενά πυκνό σύνολο. Υπενθυμίζεται ότι ένα σύνολο W ενός μετρικού (και γενικότερα τοπολογικού) χώρου ονομάζεται

αραιό ή πουθενά πυκνό (rare, nowhere dense) αν η κλειστότητα (closure) του W δεν περιέχει κανένα ανοικτό σύνολο. Ή, ισοδύναμα για μετρικούς χώρους, ([41] σελ. 74) αν κάθε ανοικτή σφαίρα περιέχει μία ανοικτή σφαίρα ξένη προς το W . Τότε από το θεώρημα κατηγορίας του Baire ([41] κεφ. 2 ενότητα 12, [7] κεφ. 9, [62] σελ. 54-55) η ένωση των $A_{p,q}$, $\Delta_{p,q}$, που είναι αριθμήσιμα το πλήθος, δεν μπορεί να δώσει τον πλήρη μετρικό χώρο M και κατά συνέπεια θα υπάρχει συνάρτηση στο M που δεν θα ανήκει σε κανένα $A_{p,q}$, $\Delta_{p,q}$ και επομένως δεν έχει σημείο καμπής.

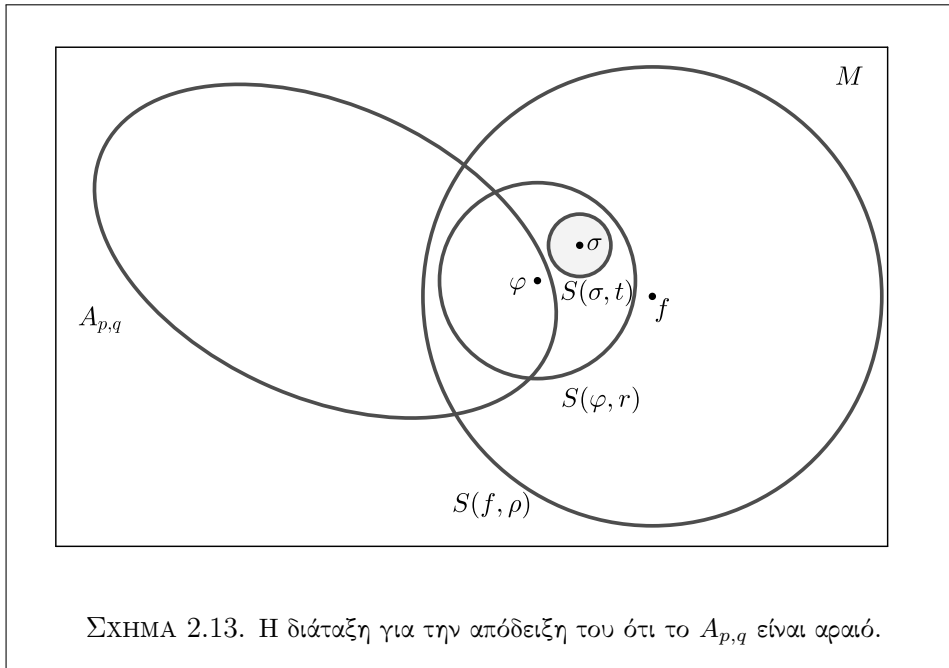
Θα δείξουμε ότι το τυχόν $A_{p,q}$ είναι αραιό. Η απόδειξη για τα $\Delta_{p,q}$ είναι όμοια⁹. Έστω

$$S(f, \rho) = \{g \in M : \|f - g\|_{C_2} < \rho\},$$

μια οποιαδήποτε σφαίρα του M με κεντρο την f και ακτίνα ρ . Θα δείξουμε ότι αυτή περιέχει κάποια σφαίρα ξένη προς το $A_{p,q}$. Αν η $S(f, \rho)$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο του $A_{p,q}$ έχουμε τελειώσει. Αν όχι τότε θεωρούμε $\varphi \in S(f, \rho)$ τέτοια ώστε $\varphi \in A_{p,q}$. Θεωρούμε τώρα σφαίρα

$$S(\varphi, r) = \{g \in M : \|\varphi - g\|_{C_2} < r\} \subseteq S(f, \rho).$$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί με βήματα ως εξής (βλ. και ΣΧΗΜΑ 2.13).



- Αποδεικνύεται πρώτα ότι η $S(\varphi, r)$ περιέχει κάποιο σ που δεν ανήκει στο $A_{p,q}$ (ΛΗΜΜΑ 3).

⁹Επίσης μπορεί να γίνει με βάση την παρατήρηση ότι κάθε $\Delta_{p,q}$ προκύπτει από ένα $A_{p,q}$ μέσω ενός μετασχηματισμού $\varphi \rightarrow -\varphi + 2\varphi(x_0)$.

- Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι η $S(\varphi, r)$ (επομένως και η $S(f, \rho)$) περιέχει σφαίρα $S(\sigma, t)$ ξένη προς το $A_{p,q}$. Αυτό γίνεται στο ΛΗΜΜΑ 5 για την απόδειξη του οποίου θα χρησιμοποιήσουμε το ΛΗΜΜΑ 4.

ΛΗΜΜΑ 3. Η $S(\varphi, r)$ περιέχει $\sigma \notin A_{p,q}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υπάρχει $x_0 \in A_{p,q}$ ώστε η φ να είναι κοίλη στο (p, x_0) και κυρτή στο (x_0, q) . Η ύπαρξη της σ θα εξασφαλιστεί κατασκευαστικά «χειρουργώντας» την φ . Θα δημιουργήσουμε ένα εξογκώμα στην φ κατά τρόπο ώστε η νέα συνάρτηση σ που θα προκύψει να εξακολουθεί να ανήκει στην $S(\varphi, r)$ αλλά να είναι κυρτή και σε κάποιο ανοικτό υποδιάστημα του (p, x_0) οπότε η σ θα παρουσιάζει την εναλλαγή κοίλη, κυρτή, κοίλη κυρτή και δεν θα ανήκει στο $A_{p,q}$. Για την δημιουργία του εξογκώματος θα χρησιμοποιήσουμε ως βάση την συνάρτηση

$$b(x) = \begin{cases} (1-x^2)^3 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

μέσω κατάλληλης μετατροπής.

Κατ' αρχάς δείχνουμε ότι η συνάρτηση b είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Για $x \in (-1, 1)$ είναι $b'(x) = -6x(1-x^2)^2$, $b''(x) = 6(1-x^2)(5x^2-1)$ ενώ στο $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ οι παράγωγοι της b είναι μηδέν. Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b(x) - b(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x^2)^3}{x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b'(x) - b'(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-6x(1-x^2)^2}{x - 1} = 0$$

και επομένως η b είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο 1 με παραγώγους μηδέν και το αυτό ισχύει στο -1. Άρα:

$$b'(x) = \begin{cases} -6x(1-x^2)^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

και

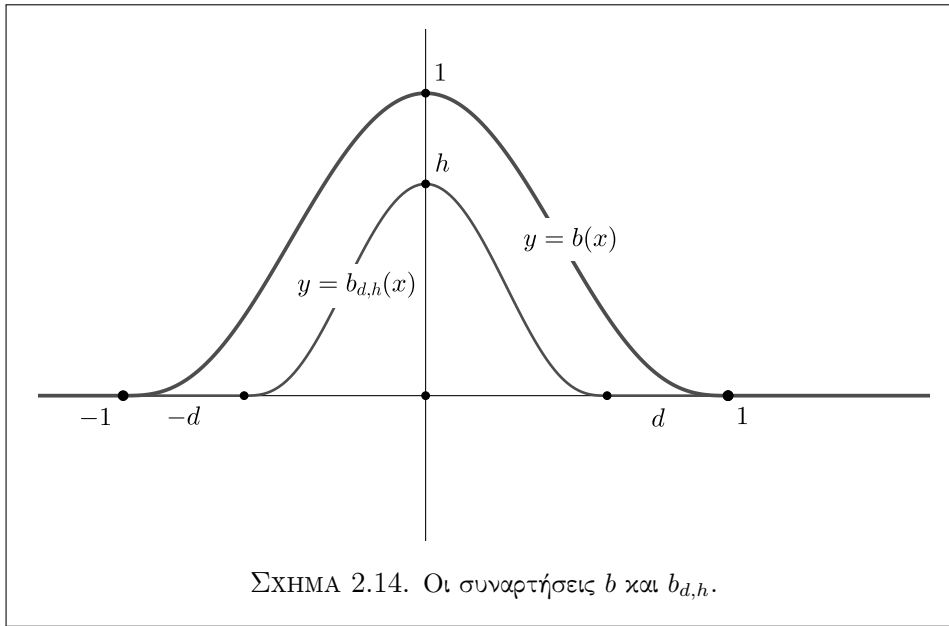
$$b''(x) = \begin{cases} 6(1-x^2)(5x^2-1) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases},$$

η οποία είναι και συνεχής.

Θα προσαρμόσουμε την b κατάλληλα μετασχηματίζοντας την μέσω ομοπαράλληλικού μετασχηματισμού με δύο παραμέτρους:

$$b_{d,h}(x) = hb\left(\frac{x}{d}\right).$$

Με τα d, h ελέγχουμε το πλάτος και το ύψος του εξογκώματος (ΣΧΗΜΑ 2.14). Είναι



$$b'_{d,h}(x) = -6h \frac{x}{d^6} (d^2 - x^2)^2, \quad b''_{d,h}(x) = -\frac{6h}{d^6} (d^2 - x^2) (d^2 - 5x^2),$$

και στο $(-d, d)$ είναι

$$b'''_{d,h}(x) = \frac{24hx}{d^6} (3d^2 - 5x^2).$$

Από τη μελέτη της $b_{d,h}$ και των παραγώγων της (Βλ. διάγραμμα στο ΣΧΗΜΑ 2.15) προκύπτει ότι:

$$\|b_{d,h}\|_{\infty} = h, \quad \|b'_{d,h}\|_{\infty} = \left(\frac{96}{125}\sqrt{5}\right) \frac{h}{d}, \quad \|b''_{d,h}\|_{\infty} = \frac{24}{5} \frac{h}{d^2}$$

και επομένως

$$\|b_{d,h}\|_{C_2} = \left(\frac{125d^2 + 96\sqrt{5}d + 600}{125d^2}\right) h \quad (2.2)$$

Θα επιλέξουμε x_1, x_2 από το (p, q) και $d > 0$ με

$$p < x_1 - d < x_1 < x_1 + d < x_0 - d < x_0 < x_0 + d < x_2 - d < x_2 < x_2 + d < q \quad (2.3)$$

ώστε αν

- πάρουμε την $-b_{d,h}$ που είναι κυρτή, και την $b_{d,h}$ που είναι κοίλη
- τις μεταφέρουμε κατά $\vec{v} = (x_1, 0)$, $\vec{u} = (x_2, 0)$ δημιουργώντας τις $-b_{d,h}(x - x_1)$, $b_{d,h}(x - x_2)$ και

x	$-d$	$-\frac{\sqrt{15}}{5}d$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}d$	0	$\frac{\sqrt{5}}{5}d$	$\frac{\sqrt{15}}{5}d$	d			
$b'''_{d,h}(x)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$b''_{d,h}(x)$	0	$\nearrow \frac{24}{5} \frac{h}{d^2}$	$\longrightarrow 0 \longrightarrow$	$-6 \frac{h}{d^2}$	$\longrightarrow 0 \longrightarrow$	$\frac{24}{5} \frac{h}{d^2}$	$\searrow 0$			
$b'_{d,h}(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{96h}{125d}\sqrt{5}$	$\searrow 0 \searrow$	$-\frac{96h}{125d}\sqrt{5}$	$\searrow$	$\nearrow$			0
$b_{d,h}(x)$	0	$\nearrow$	h	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$				0

ΣΧΗΜΑ 2.15. Οι μεταβολές της συνάρτησης $b_{d,h}(x)$ στο $(-d,d)$.

- τις προσθέσουμε στην φ

ώστε να έχουμε μια συνάρτηση σ (βλ. και ΣΧΗΜΑ 2.16) με

$$\sigma(x) = \varphi(x) - b_{d,h}(x - x_1) + b_{d,h}(x - x_2),$$

που

- κοντά στο x_1 να είναι αυστηρώς κυρτή, κοντά στο x_2 να είναι αυστηρώς κοίλη επομένως να μην ανήκει στο $A_{p,q}$ και
- να απέχει ως προς την στάθμη $\|\dots\|_{C_2}$ από την φ απόσταση μικρότερη του r .

Είναι

$$\varphi(x) - \sigma(x) = b_{d,h}(x - x_1) - b_{d,h}(x - x_2).$$

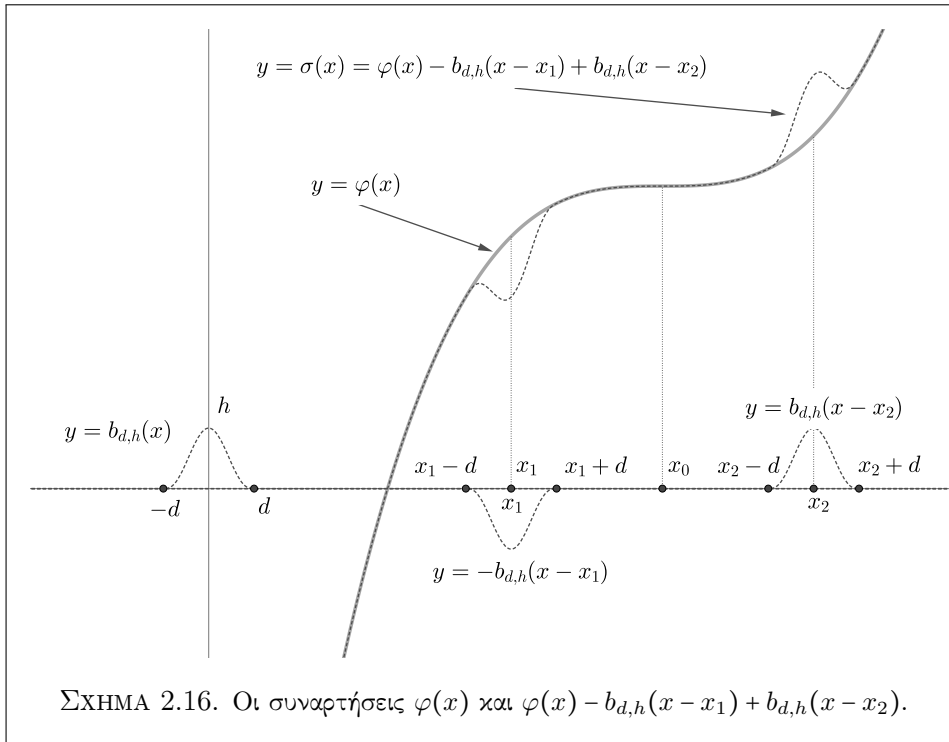
Αλλά οι $b_{d,h}(x - x_1)$, $-b_{d,h}(x - x_2)$ έχουν, ως παράλληλη μεταφορά της $b_{d,h}(x)$, την ίδια C_2 -στάθμη με αυτήν και επιπλέον επειδή τα διαστήματα που οι $b_{d,h}(x - x_1)$, $-b_{d,h}(x - x_2)$ δεν μηδενίζονται είναι ξένα θα είναι

$$\|\varphi(x) - \sigma(x)\|_{C_2} = \|b_{d,h}(x - x_1) - b_{d,h}(x - x_2)\|_{C_2} = \|b_{d,h}(x)\|_{C_2}.$$

Για να εξασφαλίσουμε δε ότι η σ είναι γνησίως κυρτή κοντά στο x_1 και γνησίως κοίλη κοντά στο x_2 αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $\sigma''(x_1) > 0$ και $\sigma''(x_2) < 0$ δηλαδή ότι $|b_{d,h}''(0)| > |\varphi''(x_1)|$ και $|b_{d,h}''(0)| > |\varphi''(x_2)|$. Για να εξασφαλίσουμε ότι η σ ανήκει στην $S(\varphi, r)$ θέλουμε $\|b_{d,h}(x)\|_{C_2} < r$.

Οι παραπάνω απαιτήσεις συνοψίζονται στις

$$6 \frac{h}{d^2} > |\varphi''(x_1)|, \quad 6 \frac{h}{d^2} > |\varphi''(x_2)| \quad (2.4)$$



$$\left(\frac{125d^2 + 96\sqrt{5}d + 600}{125d^2} \right) h < r \quad (2.5)$$

Αρκεί λοιπόν να εξασφαλισθεί ότι

$$\max \left(\frac{|\varphi''(x_1)|}{6}, \frac{|\varphi''(x_2)|}{6} \right) d^2 < h < \frac{125d^2}{125d^2 + 96\sqrt{5}d + 600} r \quad (2.6)$$

Κατ' αρχάς εξασφαλίζουμε ότι

$$\max \left(\frac{|\varphi''(x_1)|}{6}, \frac{|\varphi''(x_2)|}{6} \right) < \frac{125d^2}{125d^2 + 96\sqrt{5}d + 600} r. \quad (2.7)$$

Λόγω της 2.3 θα είναι $0 < d < k$ όπου

$$k = \frac{q-p}{6}.$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση που εμφανίζεται στο β' μέλους της 2.7

$$w(x) = \frac{125}{125x^2 + 96\sqrt{5}x + 600},$$

η w στο $[0, k]$ είναι γνησίως φθίνουσα επομένως $w(k) \leq w(x) \leq w(0)$. Επειδή η φ έχει καμπή στο x_0 και η φ'' είναι συνεχής έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{|\varphi''(x)|}{6} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{|\varphi''(x)|}{6} = \frac{|\varphi''(x_0)|}{6} = 0,$$

επομένως υπάρχουν x_1, x_2 με $p < x_1 < x_0 < x_2 < q$ ώστε

$$\frac{|\varphi''(x_1)|}{6} < w(k), \quad \frac{|\varphi''(x_2)|}{6} < w(k).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε d από το $((0, k)$ ώστε

$$d < \frac{1}{2} \min \left(x_1 - p, \frac{x_0 - x_1}{2}, \frac{x_2 - x_0}{2}, p - x_2 \right).$$

Για αυτά τα x_1, x_2, d εξασφαλίζεται η ισχύς των 2.3 και 2.7. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας με d^2 και παρεμβάλλοντας κατάλληλο h έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη των x_1, x_2, d, h . Ο.Ε.Δ.

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο:

ΛΗΜΜΑ 4. Έστω διάστημα $I = [a, b]$ και F, G δύο συναρτήσεις ορισμένες στο I που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν η F είναι γνησίως κυρτή (αντ. κοίλη) στο I , $F''(c) = s \neq 0$ και $|F''(c) - G''(c)| < \frac{|s|}{2}$ τότε υπάρχει κάποιο ανοικτό υποδιάστημα J του I στο οποίο η G είναι γνησίως κυρτή (αντ. κοίλη).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από την υπόθεση έχουμε:

$$F''(c) - \frac{|s|}{2} < G''(c) < F''(c) + \frac{|s|}{2}$$

Αν η F είναι γνησίως κυρτή θα είναι $s > 0$ και επομένως έχουμε

$$\frac{s}{2} < G''(c) < \frac{3s}{2},$$

από την οποία προκύπτει ότι $G''(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι σε κάποιο εσωτερικό σημείο του I η G'' είναι θετική άρα και σε κάποιο ανοικτό υποδιάστημα του I .

Αν η F είναι γνησίως κοίλη θα καταλήξουμε στην $\frac{3s}{2} < G''(c) < \frac{s}{2}$ και στο ανάλογο συμπέρασμα. Ο.Ε.Δ.

ΛΗΜΜΑ 5. Υπάρχει σφαίρα $S(\sigma, t) \subseteq S(\varphi, r)$ ξένη προς το $A_{p,q}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Παρατηρούμε ότι από την κατασκευή της σ υπάρχουν υποδιαστήματα $I' = [a', b']$, $I'' = [a'', b'']$ του (p, q) με $b' < a''$ ώστε η σ στο I' να είναι γνησίως κυρτή και στο I'' γνησίως κοίλη. Έστω $c' \in I'$, $c'' \in I''$ με $\sigma''(c') \sigma''(c'') \neq 0$. Έστω $\delta = \|\varphi - \sigma\|_{C_2}$ και $s' = \sigma''(c')$, $s'' = \sigma''(c'')$. Θεωρούμε t με

$$0 < t < \min \left(r - \delta, \frac{|s'|}{2}, \frac{|s''|}{2} \right).$$

Προφανώς $S(\sigma, t) \subseteq (\varphi, r)$. Αν $\theta \in S(\sigma, t)$ τότε

$$\|\theta - \sigma\|_{\infty} \leq \|\theta - \sigma\|_{C_2} < \frac{|s'|}{2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι στο I' είναι $|\theta'(c) - \sigma'(c)| < \frac{|s'|}{2}$ και από το ΛΗΜΜΑ 4 υπάρχει ανοικτό υποδιάστημα J' του I' στο οποίο η θ να είναι γνησίως κυρτή. Όμοια υπάρχει ανοικτό υποδιάστημα J'' του I'' στο οποίο η θ να είναι γνησίως κοίλη. Άρα $\theta \notin A_{p,q}$ και η $S(\sigma, t)$ είναι ξένη προς το $A_{p,q}$. Ο.Ε.Δ.

2.5 Κυρτές Συναρτήσεις και Επαναληπτικές Μέθοδοι.

Είναι γνωστό ότι δεν είναι όλες οι εξισώσεις επιλύσιμες. Ακριβέστερα ακόμη και αν μια εξίσωση έχει λύσεις δεν είναι πάντα δυνατόν να τις εκφράσουμε χρησιμοποιώντας τις τέσσερις πράξεις και προκαθορισμένες συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24. 1. Στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, β, γ ακέραιους και θετική διακρίνουσα δεν είναι πάντα δυνατόν να εκφραστούν οι λύσεις χρησιμοποιώντας μόνο ακέραιους και τις τέσσερις πράξεις. Αν η διακρίνουσα δεν είναι τετράγωνο ακέραιου απαιτείται και η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας.

2. Στις πολυωνυμικές εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές με βαθμό μεγαλύτερο του 4 δεν είναι πάντα δυνατόν να εκφραστούν οι λύσεις τους με την βοήθεια ακέραιων, των τεσσάρων πράξεων ακόμη και αν επιστρατευθούν ριζικά ποικίλων τάξεων. Ένα παράδειγμα είναι η εξίσωση:

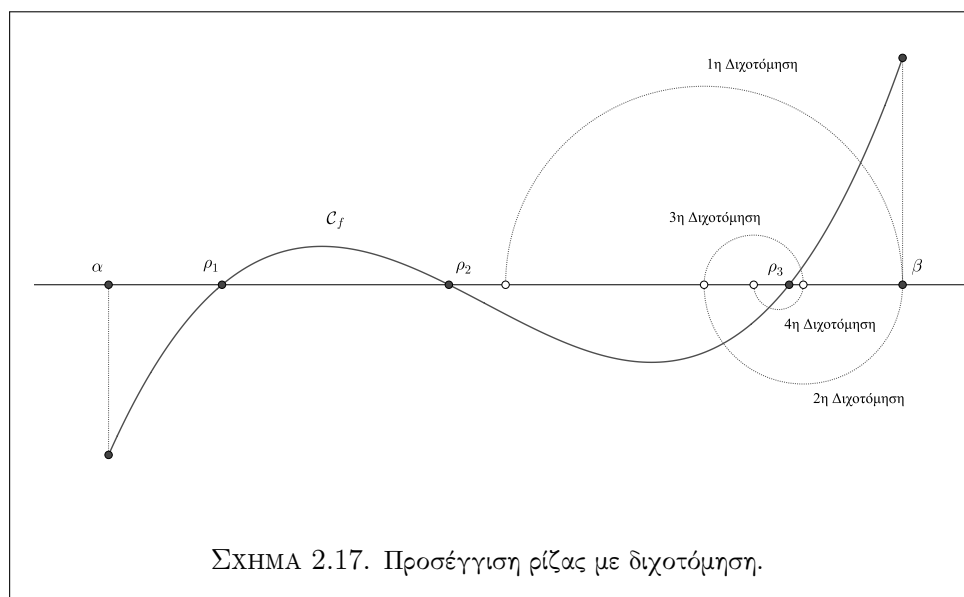
$$2x^5 - 10x + 5 = 0.$$

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, με μελέτη της συνάρτησης του α' μέλους, έχει τρεις (απλές) πραγματικές ρίζες, Ωστόσο δεν είναι δυνατόν να εκφραστούν με τις τέσσερις πράξεις και χρήση πεπερασμένου αριθμού ριζικών. Επίσης δεν φαίνεται να είναι γνωστό αν οι ρίζες της μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια των στοιχειωδών αριθμών που είναι οι αριθμοί οι οποίοι προκύπτουν από τους ρητούς με χρήση πράξεων, λογαρίθμων και εκθετικών συναρτήσεων (βλ. [8]).

Δεδομένου ότι η επίλυση με κλειστό τύπο εξισώσεων δεν είναι πάντα δυνατή, ή όταν είναι δυνατή είναι πολύπλοκη ή τέλος συχνότατα μας ενδιαφέρουν μόνο κατά προσέγγισιν τιμές των λύσεων έχουν αναπτυχθεί διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι (Ενδεικτικά βλ. [51], κεφ. 2, [48]).

2.5.1 Η μέθοδος της διχοτόμησης.

Η πιο απλή είναι η μέθοδος της διχοτόμησης που περιγράφεται για πολυώνυμα στο βιβλίο Άλγεβρας της Β' Λυκείου (σε όλες τις εκδόσεις του, ενδεικτικά βλ. [65] Κεφ. 2). Αξιοποιεί το θεώρημα του Bolzano και έμμεσα στηρίζεται σε μία από τις αποδείξεις του θεωρήματος μέσω κιβωτισμένων διαστημάτων. Εφαρμόζεται γενικά για μια συνεχή συνάρτηση που παίρνει ετερόσημες τιμές

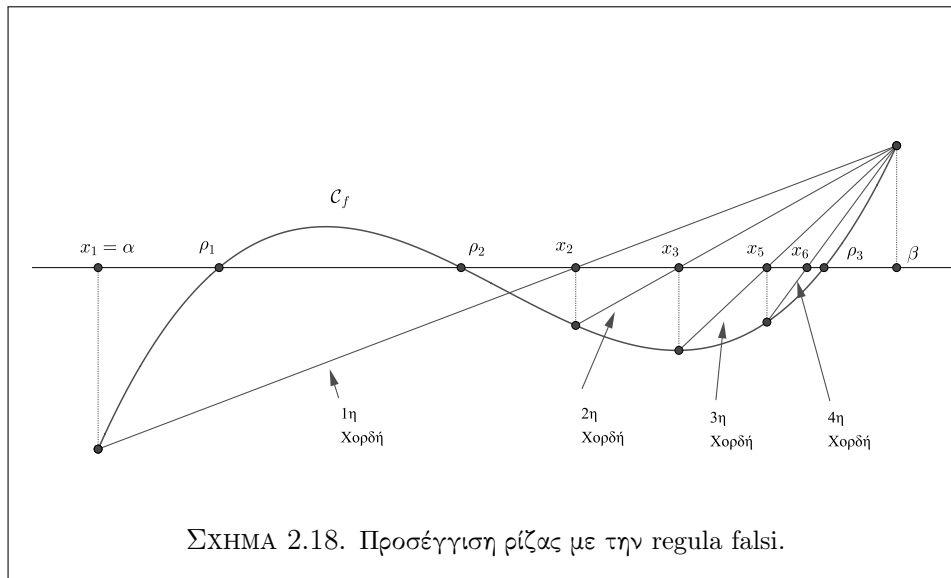


ΣΧΗΜΑ 2.17. Προσέγγιση ρίζας με διχοτόμηση.

στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος οπότε έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε αυτό. Διχοτομούμε το διάστημα παίρνοντας το μέσο του δηλαδή το ημίανθροισμα των άκρων του. Δοκιμάζουμε την τιμή αυτή στην συνάρτηση. Αν το αποτέλεσμα είναι μηδέν έχουμε βρει μια ρίζα. Αν όχι αναγκαστικά ένα από τα δύο υποδιαστήματα που προέκυψαν θα περιέχει ρίζα. Συνεχίζουμε με αυτό το διάστημα την διαδικασία. Μετά από n βήματα θα έχουμε περιορίσει ρίζα σε ένα διάστημα πλάτους $\frac{\ell}{2^n}$, όπου ℓ το πλάτος του αρχικού διαστήματος και τα άκρα αυτού του διαστήματος θα προσεγγίζουν την ρίζα καθ' έλλειψή ή καθ' υπεροχή με σφάλμα $< \frac{\ell}{2^n}$. Τα διαστήματα αυτά θα είναι κιβωτισμένα, θα έχουν τομή μονοσύνολο με στοιχείο ρίζα της συνάρτησης και αν θεωρήσουμε την ακολουθία (x_n) των κάτω (ή των άνω) άκρων αυτών των διαστημάτων η (x_n) συγκλίνει σε ρίζα της συνάρτησης. Αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε η ρίζα είναι φυσικά μοναδική. Στο σχήμα 2.17 φαίνεται η εφαρμογή της μεθόδου για μια συνάρτηση με τρεις ρίζες. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου προσεγγίζεται μια από αυτές η ρ_3 .

2.5.2 Η μέθοδος της εσφαλμένης θέσης (regula falsi) ή μέθοδος των χορδών.

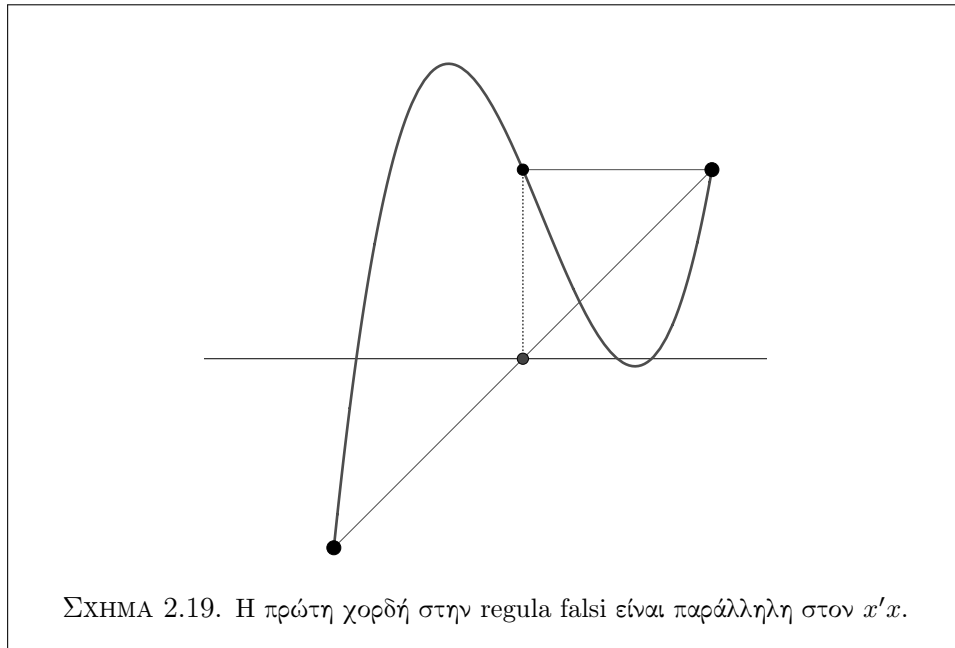
Η regula falsi είναι μια αρχαιότατη μέθοδος επίλυσης εξισώσεων συμπεριλαμβανομένων και των πρωτοβαθμίων ([42], σελ. 439). Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να προσεγγίζει («εσφαλμένη θέση») την ρίζα μιας συνάρτησης με την ρίζα μιας ομοπαράλληλης συνάρτησης $x \mapsto px + q$ της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται «κοντά» στην γραφική παράσταση που μας ενδιαφέρει και συγκεκριμένα την συνάρτηση που προκύπτει από μια χορδή της. Περιγράφουμε



μια από τις παραλλαγές της. Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση συνεχή σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$ Στη συνέχεια (Βλ. και ΣΧΗΜΑ 2.18):

- Επιλέγουμε ένα από τα δυο «άκρα» της C_f ως πούμε το $(\beta, f(\beta))$ και ονομάζουμε $x_1 = \alpha$.
- Το συνδεουμε με το άλλο άκρο δηλαδή φέρνουμε την χορδή της C_f που συνδέει τα σημεία της $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$.
- Βρίσκουμε το σημείο τομής της χορδής με τον $x'x$ ως το πούμε $(x_2, 0)$.
- Βρίσκουμε το σημείο της C_f που αντιστοιχεί στο (x_2) δηλαδή το $(x_2, f(x_2))$.
- Ενώνουμε το σημείο αυτό με το $(\beta, f(\beta))$ και έχουμε μια νέα χορδή.
- Ας πούμε ότι αυτή τέμνει τον $x'x$ στο $(x_3, 0)$.
- Συνεχίζουμε την διαδικασία σχηματίζοντας μια ακολουθία $x_1, x_2, x_3, \dots$ και αναμένουμε αυτή η ακολουθία να συγκλίνει σε μία της ρίζα της f .

Η παραπάνω διαδικασία για να λειτουργήσει χρειάζεται και άλλες υποθέσεις πέραν της συνεχειας και των ετερόσημων τιμών στα άκρα. Για παράδειγμα στην περίπτωση της συνάρτησης του ΣΧΗΜΑΤΟΣ 2.19 διαδικασία δεν μπορεί να προχωρήσει διότι ο φορέας της πρώτης χορδής δεν τέμνει τον άξονα των x . Στην επόμενη πρόταση παρατίθενται μερικές υποθέσεις υπό τις οποίες η regula falsi προσεγγίζει πάντοτε ρίζα και μάλιστα μοναδική (για μια παρόμοια πρόταση με ισχυρότερες υποθέσεις βλ. [18]).



ΣΧΗΜΑ 2.19. Η πρώτη χορδή στην regula falsi είναι παράλληλη στον $x'x$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 15. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή για την οποία ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Τότε

1. Η f έχει ακριβώς μια ρίζα ρ .
2. Η αναδρομική ακολουθία (x_n) με

$$x_1 = \alpha, \quad x_{n+1} = \frac{x_n f(\beta) - \beta f(x_n)}{f(\beta) - f(x_n)}$$

είναι καλώς ορισμένη, γνησίως μονότονη και συγκλίνει στην ρίζα ρ .

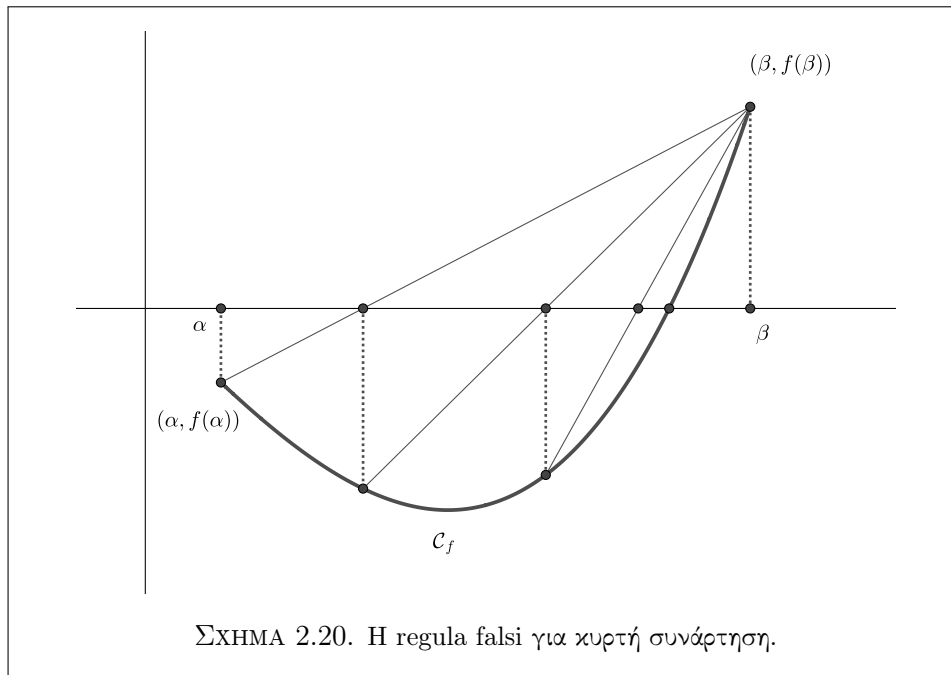
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έχει αποδειχθεί στην ΑΣΚΗΣΗ 26.
2. Ας υποθέσουμε, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα ότι $f(\alpha) < 0$ και ότι $f(\beta) > 0$ (ΣΧΗΜΑ 2.20). Η χορδή με άκρα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ είναι διαγώνιος του τραapeζίου με κορυφές τα σημεία $(\alpha, 0)$, $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, 0)$, $(\beta, f(\beta))$ επομένως θα τέμνει την άλλη διαγώνιο δηλαδή το τμήμα με άκρα $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ σε εσωτερικό σημείο της που εύκολα υπολογίζεται ότι έχει τετμημένη

$$x_2 = \frac{x_1 f(\beta) - \beta f(x_1)}{f(\beta) - f(x_1)}.$$

Η διαγώνιος που συνδέει τα $(x_n, f(x_n))$, $(\beta, f(\beta))$ τέμνει την διαγώνιο που συνδέει τα $(x_n, 0)$, $(\beta, 0)$ σε σημείο του $x'x$ με τετμημένη

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(\beta) - \beta f(x_n)}{f(\beta) - f(x_n)}.$$

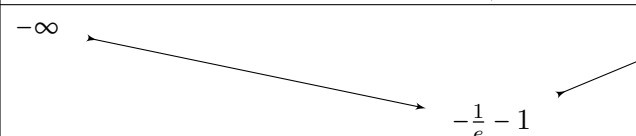


Συνεπώς το x_1 είναι σημείο του διαστήματος (α, β) και η f ορίζεται σε αυτό. Επειδή η f είναι κυρτή η C_f βρίσκεται κάτω από την χορδή με άκρα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ και το αυτό θα συμβαίνει με όλες της χορδές που σχηματίζονται (βλ. περιγραφή της regula falsi πιο πάνω). Πάντοτε θα έχουμε τραπέζια και θα εφαρμόζεται το επιχείρημα της τομής των διαγωνίων τους. Άρα όλα τα x_n ορίζονται και $x_1 < x_2 < \dots < \rho$. Επομένως η (x_n) ως γνησίως αύξουσα και φραγμένη συγκλίνει σε κάποιο αριθμό $L \leq \rho < \beta$. Αλλά με $x_n \rightarrow L$ είναι και $x_{n+1} \rightarrow L$ και η αναδρομική σχέση μας δίνει $L(f(\beta) - f(L)) = Lf(\beta) - \beta f(L)$ από την οποία έχουμε $L(f(\beta) - f(L)) = Lf(\beta) - \beta f(L)$ δηλαδή $(L - \beta)f(L) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $f(L) = 0$ και επομένως αφού η f έχει μοναδική ρίζα το ρ ότι η x_n συγκλίνει στο ρ . Ο.Ε.Δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 25. Να λυθεί κατά προσέγγιση η εξίσωση $xe^x - 1$.

ΛΥΣΗ Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = xe^x - 1$. Είναι $f'(x) = e^x(1+x)$ και $f''(x) = e^x(2+x)$ επομένως έχουμε τον πίνακα:

Βλέπουμε ότι η f δεν έχει ρίζα $x \leq -1$ και στο $(-1, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα η οποία εντοπίζεται στο διάστημα $[0, 1]$ αφού $f(0) = -1$ και $f(1) = e - 1$. Επιπλέον είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης και τη μέθοδο regula falsi για την προσέγγιση της ρίζας.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Μέθοδος διχοτόμησης. Διχοτομώντας διαδοχικά το αρχικό διάστημα έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	$f(x)$
0,0000000000	-1
1,0000000000	1,718281828
0,5000000000	-0,175639365
0,7500000000	0,587750012
0,6250000000	0,167653723
0,5625000000	-0,012781755
0,5937500000	0,075142355
0,5781250000	0,030619244
0,5703125000	0,008779997
0,5664062500	-0,002035378
0,5683593750	0,003363662

Βλέπουμε ότι στα 0,5664062500 και 0,5683593750 η f παίρνει ετρόσημες τιμές και επομένως μεταξύ τους υπάρχει ρίζα. Μια προσέγγιση της είναι 0,567.

Μέθοδος regula falsi. Εδώ με $x_1 = 0$ θα εφαρμόσουμε τον ανανδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(1) - f(x_n)}{f(1) - f(x_n)},$$

επομένως κάθε τιμή που βρίσκουμε θα την αντικαθιστούμε στην συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x f(1) - f(x)}{f(1) - f(x)} = \frac{x e^x - e x + x - 1}{x e^x - e}.$$

Βρίσκουμε:

x	$g(x)$
0,0000000000	0,36788
0,36788	0,50331
0,503310	0,54741
0,54741	0,56111
0,56111	0,56531
0,56531	0,56659
0,56659	0,56698
0,56698	0,56709

Βρίσκουμε πάλι ότι μια προσέγγιση της ρίζας είναι 0,567.

2.6 Καμπυλότητα.

Η κυρτότητα-κοιλότητα αποτελεί ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό της κάμψης μιας καμπύλης. Ωστόσο δεν κάμπτονται όλες οι καμπύλες κατά το ίδιο μέτρο. Η πορεία προς την απόδοση ενός μέτρου της κάμψης ήταν μακρά ([9], [1]) και πέρασε από επιλέπτυνση της ταξινόμησης των καμπυλών. Μια από τις πιο διαδεδομένες στην Αρχαιότητα που επαναλαμβάνεται και από άλλους συγγραφείς (λ.χ. Πρόκλος) ήταν εκείνη του Αριστοτέλη:

Πᾶσα δὲ κίνησις ὅση κατὰ τόπον, ἣν καλοῦμεν φοράν, ἢ εὐθεῖα
ἢ κύκλῳ ἢ ἐκ τούτων μικτὴ ἀπλαῖ γὰρ αὗται δύο μόναι

Αριστοτέλης «Περὶ Ουρανού», 268b

Φαίνεται ότι ο Απολλώνιος στο 5ο Βιβλίο του έργου του «Κωνικά» (Πρόταση 51 & 52) χρησιμοποιεί την διάταξη που ουσιαστικά οδηγεί στην εύρεση του κέντρου καμπυλότητας σε μια κωνική. Ο Heath αποδίδει στον Απολλώνιο μια πρώιμη διαπραγμάτευση της έννοιας της καμπυλότητας. Ωστόσο η πρώτη ρητή αναφορά και επεξεργασία στην καμπυλότητα έγινε περίπου 15 αιώνες μετά από τον Nicole Oresme. Ο Oresme στο έργο του «*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*» (Πραγματεία επί των διαμορφώσεων των ιδιοτήτων των κινήσεων) εισάγει τον όρο καμπυλότητα (*curvitas*) και διερευνά την αλλαγή της καμπυλότητας μιας καμπύλης που αλλάζει σχήμα ([9], [40]) και «προβλέπει» αρκετές ιδιότητες της καμπυλότητας¹⁰. Αργότερα με το θέμα ασχολήθηκαν πολλοί μελετητές ([1], [44] κεφ. 17 και [3]) μεταξύ των οποίων ο Νεύτων ο οποίος στο έργο του «*The Method of Fluxions and Infinite Series with its Application to the Geometry of Curve-lines*» (1671, αλλά εκδόθηκε μετά θάνατον το 1736.)¹¹ σημειώνει

¹⁰ Στο υπ' αριθ. [7] βιβλίο των παραπομπών του [40] υπάρχει ολόκληρο το έργο με πολλά και ενδιαφέροντα στοιχεία.

¹¹ Μπορεί να βρεθεί στον σύνδεσμο
<https://archive.org/details/methodoffluxions00newt/mode/1up>.



Nicole Oresme
1320 ή 1325 – 1382



Sir Isaac Newton
1643-1727



Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716



Jacob (Jacques) Bernoulli
1655-1705

Υπάρχουν λίγα προβλήματα που αναφέρονται στις καμπύλες πιο κομψά από αυτό ή που προσφέρουν μεγαλύτερη γνώση της φύσης τους.

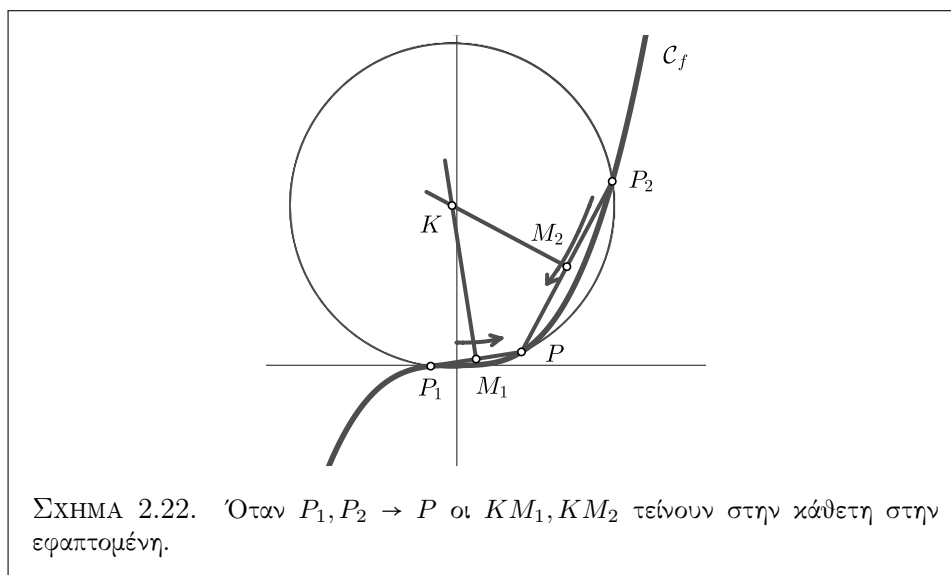
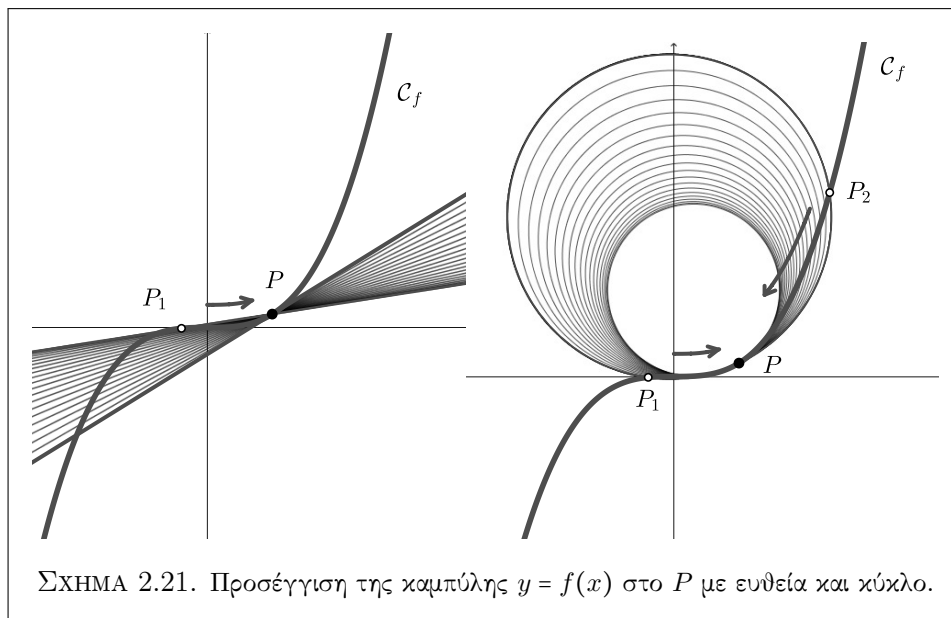
Η επεξεργασία του Νεύτωνα αλλά και άλλων μελετητών εκείνης της εποχής στηρίζεται στις εξής βασικές ιδέες:

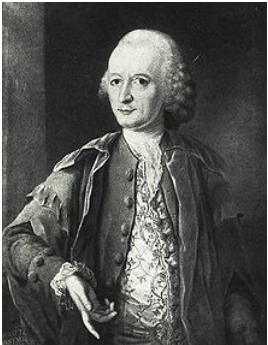
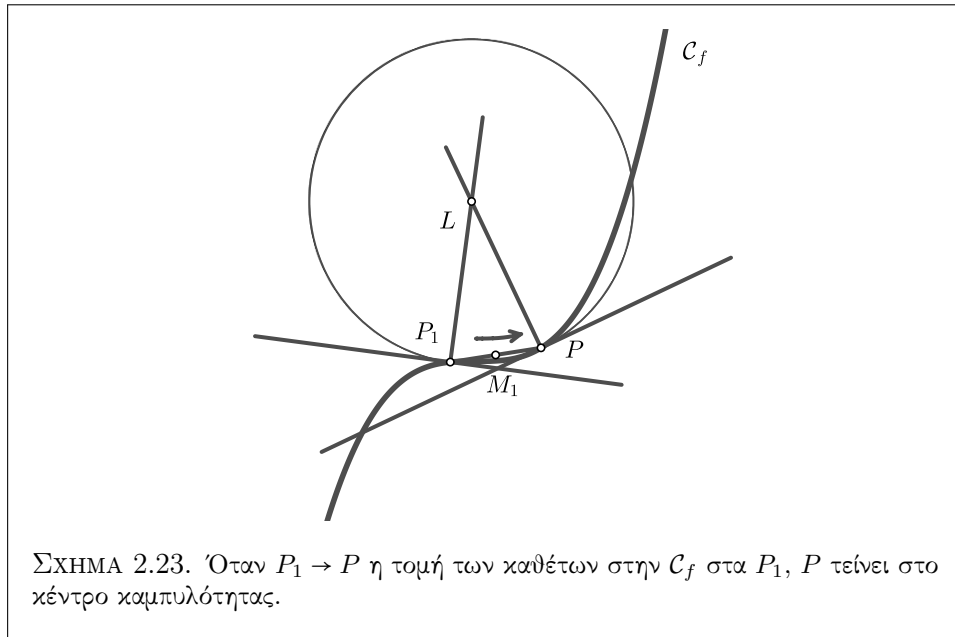
1. Η ευθεία έχει καμπυλότητα μηδέν.
2. Ένας κύκλος έχει την ίδια καμπυλότητα σε όλα τα σημεία του.
3. Όταν η ακτίνα ενός κύκλου αυξάνει η καμπυλότητα ελαττούται. Συγκεκριμένα ο λόγος των καμπυλότητων δύο κύκλων είναι αντιστρόφως ανάλογος των ακτίνων τους. Συνέπεια τούτου είναι ότι αν θεωρήσουμε ότι ο μοναδιαίος κύκλος έχει καμπυλότητα 1 τότε η καμπυλότητα ενός κύκλου ακτίνας R είναι $\frac{1}{R}$.
4. Η καμπυλότητα μίας καμπύλης σε ένα σημείο της P μπορεί να εκφραστεί από την καμπυλότητα εκείνου του κύκλου που εφάπτεται στην καμπύλη στο P «καλλίτερα» από όλους τους άλλους εφαπτόμενους κύκλους.

Έτσι αναζήτηση της καμπυλότητας τυχούσας καμπύλης σε σημείο της P γίνεται με την βοήθεια κύκλων. Η ιδέα είναι παρόμοια με την ιδέα της προσέγγισης μιας καμπύλης τοπικά από μια εφαπτομένη της. Η εφαπτομένη σε ένα σημείο είναι η ευθεία που προσεγγίζει «καλλίτερα» την καμπύλη κοντά σε αυτό το σημείο. Είναι δε η «οριακή θέση» μιας τέμνουσας. Ανάλογα μια καμπύλη μπορεί να προσεγγιστεί τοπικά με ένα «οριακό» τέμνοντα κύκλο (ΣΧΗΜΑ 2.21). Πρόκειται για τον κύκλο καμπυλότητας ή εγγύτατο κύκλο ([59] σελ. 24) της καμπύλης στο σημείο P . Ο κύκλος αυτός εφάπτεται στην καμπύλη στο P ¹². Αυτό θα αποδειχθεί πιο κάτω αλλά μπορούμε να δούμε γιατί πρέπει να συμβαίνει αν παρατηρήσουμε ότι όταν τα P_1, P_2 στο ΣΧΗΜΑ 2.21 πλησιάζουν στο P οι ευθείες P_1P, P_2P τείνουν στην εφαπτομένη της C_f στο P (ΣΧΗΜΑ 2.22) επομένως οι μεσοκάθετοι KM_1, KM_2 των χορδών P_1P, P_2P τείνουν στην κάθετη της εφαπτομένης στο P άρα και το κέντρο K του κύκλου τείνει σε κάποια θέση επί αυτής της κάθετης ο κύκλος καμπυλότητας θα είναι εφαπτόμενος της καμπύλης στο P . Το κέντρο αυτού του κύκλου ορίζεται ως κέντρο καμπυλότητας στο σημείο P , η ακτίνα ως ακτίνα καμπυλότητας και το αντίστροφο της η καμπυλότητα στο P . Οι προσέγγιση του κύκλου καμπυλότητας με μεταβλητό κύκλο έγινε από τους Leibniz και Jacob Bernoulli ενώ ο Νεύτων προσέγγισε το κέντρο καμπυλότητας ως την οριακή θέση της τομής L της κάθετης στην C_f στο P (δηλαδή της ευθείας που είναι κάθετη στο P στην εφαπτομένη της θέσης της C_f στο P) με μία μεταβλητή κάθετη στην C_f στο P_1 κάτι που απαιτεί ένα μεταβλητό σημείο και όχι δύο (ΣΧΗΜΑ 2.23).

Αργότερα η προσέγγιση με τον κύκλο αντικαταστάθηκε από μια προσέγγιση της καμπυλότητας μέσω του μήκους τόξου της καμπύλης. Σύμφωνα με το

¹²Με την έννοια της επαφής που ορίστηκε στην σελίδα 190.





Abraham Gotthelf Kästner
1719-1800

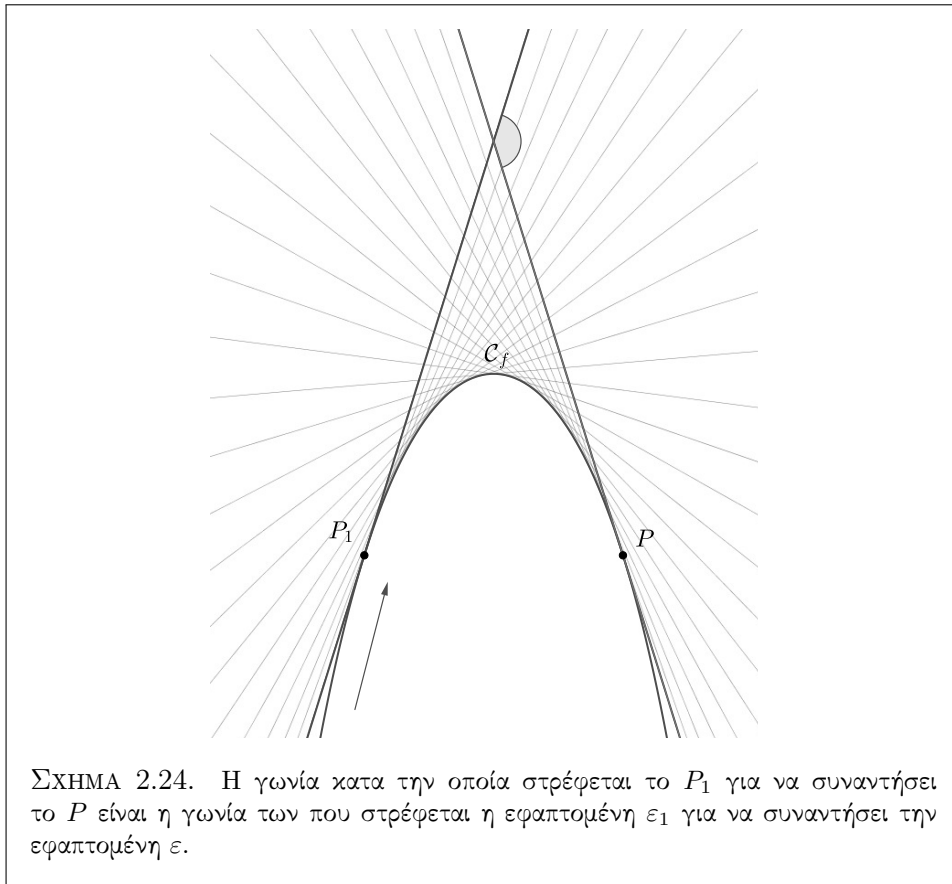
[3] καταγράφεται το 1758 στο έργο του Abraham Gotthelf Kästner (ο οποίος υπήρξε εις εκ των δασκάλων του K. F. Gauss) «*Anfangsgründe der Mathematik*». Η βασική ιδέα είναι η ακόλουθη: Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει ένα μέτρο της καμπύλωσης της C_f στο σημείο της P . Επιλέγουμε ένα σημείο P_1 «κοντά» στο P . Αν φαντασθούμε ένα κινητό στην C_f που βρίσκεται εκτός του τόξου των P_1P προς το μέρος του P_1 να κινείται προς το P (ΣΧΗΜΑ 2.24). Όταν φθάσει στο P_1 δεν συνεχίζει κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης ε_1 της C_f στο P_1 αλλά στρίβει. Όταν φθάσει στο P η διεύθυνση της κίνησης είναι εκείνη της εφαπτομένης ε της C στο P . Άρα στην διαδρομή από το P_1 στο P έχει στρίψει κατά εκείνη την γωνία που έχει στρίψει, ακολουθώντας την κίνηση η ε_1 για να συναντήσει την ε όση η γωνία των δύο εφαπτομένων η οποία μετράται από μηδέν έως π .

Ωστόσο μόνη της η γωνία δεν αρκεί για να περιγράψει την «καμπύλωση». Διότι στην ίδια γωνία με μπορεί να αντιστοιχεί διαφορετική «καμπύλωση» (ΣΧΗΜΑ 2.25). Για τον λόγο αυτό συγκρίνεται η γωνία με το μήκος του τόξου P_1P και η «καμπύλωση» από το P_1 στο P που ονομάζεται μέση καμπυλότητα μεταξύ P_1 στο P ορίζεται ως ο λόγος

$$\frac{\text{γωνία}}{\text{μήκος τόξου}}.$$

Αν τώρα υποτεθεί ότι είναι $P(x_0, f(x_0))$ και $P_1(x, f(x))$ τότε, κατ' αναλογία με τον ορισμό της παραγώγου ορίζεται η καμπυλότητα της C_f στο P ως το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{γωνία εφαπτομένων } \varepsilon_1, \varepsilon}{\text{μήκος τόξου } P_1P}.$$

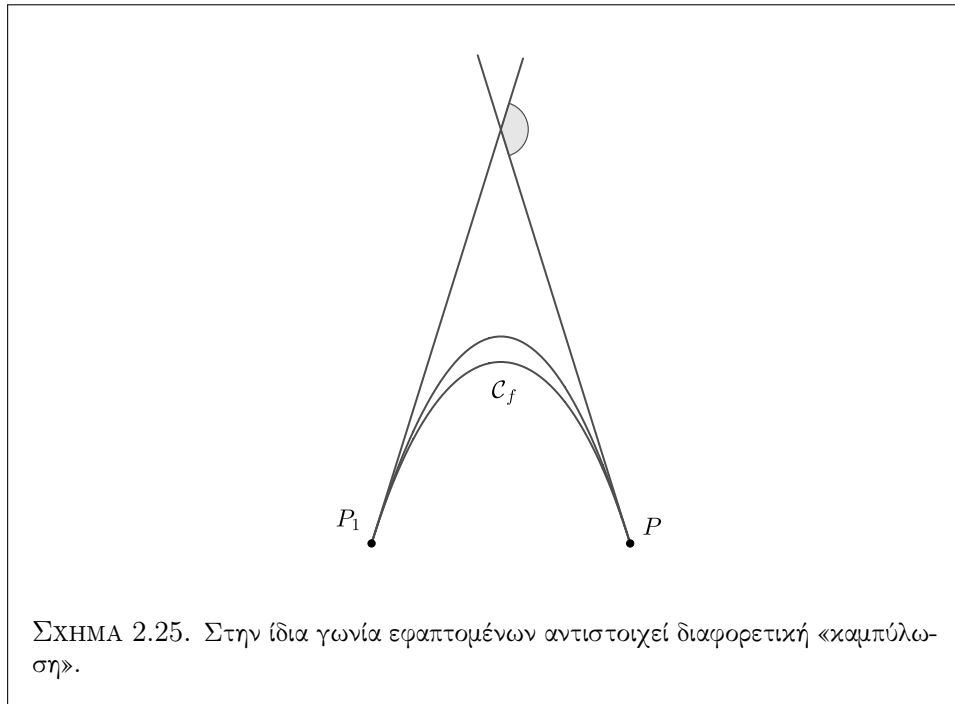


Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις του θέματος¹³ μεταξύ των οποίων και ορισμένες που χρησιμοποιούν προσανατολισμό-πρόσημο στην γωνία κάτι που οδηγεί σε προσημασμένη καμπυλότητα. Στα επόμενα θα εξετάσουμε την καμπυλότητα

1. Με τη μέθοδο του Νεύτωνα (2.6.1).
2. Με τον ορισμό του κύκλου καμπυλότητας που αδρομερώς αναφέρεται από τους Hilbert & Cohn-Vossen ([17] σελ. 75-76) 2.6.2.
3. Την προσέγγιση μέσω του μήκους τόξου (2.6.3).

Έχει καταβληθεί προσπάθεια οι τρεις προσεγγίσεις της καμπυλότητας που ακολουθούν να στηρίζονται σε σχολικές γνώσεις και όπου γίνεται επέκταση να δίνονται πλήρεις αποδείξεις. Έτσι είναι δυνατόν κάποια μέρη να είναι διδακτικά αξιοποιήσιμα τουλάχιστον για μαθητές με αυξημένο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.

¹³Ενδεικτικά: [35] σελ. 202, [18] σελ. 610, [45] σελ. 772, [26] σελ. 457, [33] σελ. 200, [15] σελ. 101, [23] σελ. 457



Στις 2.6.1, 2.6.2 και 2.6.3 υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα, δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή την δεύτερη παράγωγο. Επιπλέον υποθέτουμε ότι στο x_0 στο οποίο αναζητούμε την καμπυλότητα είναι $f''(x_0) \neq 0$ επομένως κοντά στο x_0 η f είναι κυρτή ή κοίλη. Για τα σημεία όπου $f''(x_0) = 0$ η καμπυλότητα ορίζεται να είναι μηδέν.

2.6.1 Εύρεση της καμπυλότητας με τη μέθοδο του Νεύτωνα.

Για την εύρεση της καμπυλότητας στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$ της C_f με τη μέθοδο του Νεύτωνα θα χρειασθούμε την κάθετη στην C_f και μία κάθετη στο μεταβλητό σημείο της σημείο $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Οι εφαπτομένες σε αυτά τα δύο σημεία είναι οι

$$f'(x_0)x - y = x_0 f'(x_0) - f(x_0), \quad f'(x_0 + h)x - y = (x_0 + h) f'(x_0 + h) - f(x_0 + h)$$

οπότε οι εξισώσεις των καθέτων τους σε αυτά τα σημεία είναι οι συναπαρτίζουν ένα γραμμικό σύστημα ως προς $x = x(h)$, $y = y(h)$:

$$\left. \begin{aligned} x + f'(x_0)y &= x_0 + f(x_0)f'(x_0) \\ x + f'(x_0 + h)y &= x_0 + h + f(x_0 + h)f'(x_0 + h) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Μας ενδιαφέρει να βρούμε τα όρια των $x(h)$, $y(h)$ όταν $h \rightarrow 0$. Η τυπική διαδικασία είναι να επιλυθεί το σύστημα 2.8 ως προς x , y και μετά να βρεθούν

τα όρια. Ο σύννηθισμένος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των οριζουσών. Θα την ακολουθήσουμε στην αλλαγή θα δούμε και μια ακόμη λύση.

2.6.1.1 Εύρεση των ορίων των $x(h)$, $y(h)$ επιλύοντας το σύστημα 2.8 με τη μέθοδο των οριζουσών.

Οι με στήλες συντελεστών του συστήματος 2.8, οι οποίοι είναι συναρτήσεις του h , είναι:

$$\begin{array}{ccc} A(h) & B(h) & C(h) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & f'(x_0) & x_0 + f(x_0) f'(x_0) \\ 1 & f'(x_0 + h) & x_0 + h + f(x_0 + h) f'(x_0 + h) \end{array}$$

Οι ορίζουσες του συστήματος των δύο καθετών είναι:

$$D(h) = \det(A(h), B(h)), \quad D_x(h) = \det(C(h), B(h)), \quad D_y(h) = \det(A(h), C(h))$$

και οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο καθετών είναι:

$$x(h) = \frac{D_x(h)}{D(h)}, \quad y(h) = \frac{D_y(h)}{D(h)}.$$

Μας ενδιαφέρουν τα όρια τους για $h \rightarrow 0$. Έχουμε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και θα εφαρμόσουμε τον κανόνα του De l'Hospital.

Είναι γνωστό και διαπιστώνεται εύκολα ότι γενικά ισχύει:

$$\left(\begin{vmatrix} \phi(x) & \omega \\ \tau(x) & \omega(x) \end{vmatrix} \right)' = \begin{vmatrix} \phi'(x) & \omega \\ \tau'(x) & \omega(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi(x) & \omega' \\ \tau(x) & \omega'(x) \end{vmatrix}$$

οπότε συμβολίζοντας με $A'(h), B'(h), C'(h)$ τις στήλες που προκύπτουν από τις $A(h), B(h), C(h)$ αν παραγωγίσουμε τα στοιχεία τους είναι

$$\begin{array}{ccc} A'(h) & B'(h) & C'(h) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & f''(x_0 + h) & 1 + (f'(x_0 + h))^2 + f''(x_0 + h) f(x_0 + h) \end{array},$$

και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} D'(h) &= \det(A'(h), B(h)) + \det(A(h), B'(h)), \\ D'_x(h) &= \det(C'(h), B(h)) + \det(C(h), B'(h)) \\ D'_y(h) &= \det(A'(h), C(h)) + \det(A(h), C'(h)). \end{aligned}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} D'(h) = f''(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} D'_x(h) = x_0 f''(x_0) - f'(x_0) \left(1 + (f'(x_0))^2\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} D'_y(h) = f(x_0) f''(x_0) + 1 + (f'(x_0))^2$$

επομένως τα όρια για $h \rightarrow 0$ των $x(h), y(h)$ που είναι οι συτεταγμένες του κύκλου καμπυλότητας στο P είναι

$$p = x_0 - \frac{f'(x_0) \left(1 + (f'(x_0))^2\right)}{f''(x_0)}, \quad q = f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}.$$

Η ακτίνα του κέντρου καμπυλότητας είναι $R = \sqrt{(x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2}$ και με αντικατάσταση των p, q βρίσκουμε:

$$R = \frac{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|} \quad (2.9)$$

και επομένως η καμπυλότητα στο P είναι

$$\kappa = \frac{|f''(x_0)|}{\left(1 + (f'(x_0))^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.10)$$

2.6.1.2 Εύρεση των ορίων των $x(h), y(h)$ επιλύοντας το σύστημα 2.8 με μικτή μέθοδο .

Αν και η μέθοδος των οριζουσών για την γραμμικών συστημάτων είναι αυτοματοποιημένη δεν είναι πάντοτε η καλλίτερη. Εδώ κερδίζουμε πολύ σε υπολογισμούς αξιοποιώντας την ειδική μορφή των εξισώσεων του 2.8. Αφαιρώντας από την δεύτερη εξίσωση την πρώτη και αξιοποιώντας το ότι η f' είναι κοντά στο x_0 γνησίως μονότονη βρίσκουμε ότι για $h \neq 0$ ισχύει:

$$(f'(x_0 + h) - f'(x_0))y = f(x_0 + h)f'(x_0 + h) - f(x_0)f'(x_0 + h),$$

και

$$y = y(h) = \frac{f(x_0 + h)f'(x_0 + h) - f(x_0)f'(x_0 + h)}{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}.$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)f'(x_0 + h) - f(x_0)f'(x_0 + h)}{f'(x_0 + h) - f'(x_0)} &= \left(\frac{0}{0}\right) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f'(x_0 + h))^2 + f(x_0 + h)f''(x_0 + h) + 1}{f''(x_0 + h)} &= \\ \frac{(f'(x_0))^2 + f(x_0)f''(x_0) + 1}{f''(x_0)} &= f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}. \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση του 2.8 έχουμε ότι

$$x = x(h) = -f'(x_0)y + x_0 + f(x_0)f'(x_0),$$

και παίρνοντας όρια, λαμβάνοντας υπ' όψιν το όριο του $y(h)$, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} x(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (-f'(x_0)y + x_0 + f(x_0)f'(x_0)) = \\ &= -f'(x_0) \left(f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \right) + x_0 + f(x_0)f'(x_0) = \\ &= x_0 - f'(x_0) \frac{1 + (f')^2(x_0)}{f''(x_0)}.\end{aligned}$$

Τα αποτελέσματα συμπίπτουν με εκείνα της 2.6.1.1. Η ακτίνα καμπυλότητας και η καμπυλότητα υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο.

2.6.2 Εύρεση της καμπυλότητας με την βοήθεια του κύκλου καμπυλότητας.

Ο κύκλος καμπυλότητας στο P θα αναζητηθεί ως οριακή θέση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου PP_1P_2 όταν τα μεταβλητά σημεία P_1, P_2 τείνουν στο P . Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε τα $P_1(x_0 - h, f(x_0 - h))$ και $P_2(x_0 + h, f(x_0 + h))$ και το ότι τείνουν στο P να περιγράφεται από το ότι $h \rightarrow 0$. Ο περίκυκλος του PP_1P_2 θα έχει κέντρο που εξαρτάται από το h ως το πούμε $(x(h), y(h))$. Αν $h \rightarrow 0$ αναμένεται $x(h) \rightarrow p, y(h) \rightarrow q$ και το (p, q) να είναι το κέντρο του κύκλου καμπυλότητας. Τα $x(h), y(h)$ μπορούν να βρεθούν λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των μεσοκαθέτων των PP_1, PP_2 :

$$\left. \begin{aligned}2hx + 2(f(x_0 + h) - f(x_0))y &= f^2(x_0 + h) - f^2(x_0) + 2x_0h + h^2 \\ -2hx + 2(f(x_0 - h) - f(x_0))y &= f^2(x_0 - h) - f^2(x_0) - 2x_0h + h^2\end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Εδώ η επίλυση με τη μέθοδο των οριζουσών ανάλογη με εκείνη της 2.6.1.1 είναι υπολογιστικά ασύμφορη. Εργαζόμαστε όπως στην 2.6.1.2. Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε:

$$2(f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)) = f^2(x_0 + h) + f^2(x_0 - h) - 2f^2(x_0) + 2h^2$$

Επειδή τα P, P_1, P_2 δεν είναι συνευθειακά έχουμε ότι για $h \neq 0$ το $f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)$ δεν είναι μηδέν και

$$y = y(h) = \frac{f^2(x_0 + h) + f^2(x_0 - h) - 2f^2(x_0) + 2h^2}{2(f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0))}.$$

Είναι

$$\lim_{h \rightarrow 0} y(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0 + h) + f^2(x_0 - h) - 2f^2(x_0) + 2h^2}{2(f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0))} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(x_0+h)f(x_0+h) - 2f'(x_0-h)f(x_0-h) + 4h}{2(f'(x_0+h) - f'(x_0-h))} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f'(x_0+h))^2 + f''(x_0+h)f(x_0+h) + (f'(x_0-h))^2 + f''(x_0-h)f(x_0-h) + 2}{f''(x_0+h) + f''(x_0-h)} =$$

$$f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}$$

Αφαιρώντας από την πρώτη εξίσωση την δεύτερη έχουμε:

$$4hx + 2(f(x_0+h) - f(x_0-h))y = f^2(x_0+h) - f^2(x_0-h) + 4x_0h.$$

Επομένως:

$$x = x(h) = x_0 + \frac{f^2(x_0+h) - f^2(x_0-h)}{4h} - \frac{2(f(x_0+h) - f(x_0-h))}{4h}y(h).$$

Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0+h) - f^2(x_0-h)}{4h} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(x_0+h)f(x_0+h) + 2f'(x_0-h)f(x_0-h)}{4} = f'(x_0)f(x_0)$$

και

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(f(x_0+h) - f(x_0-h))}{4h} = \left(\frac{0}{0}\right) f'(x_0).$$

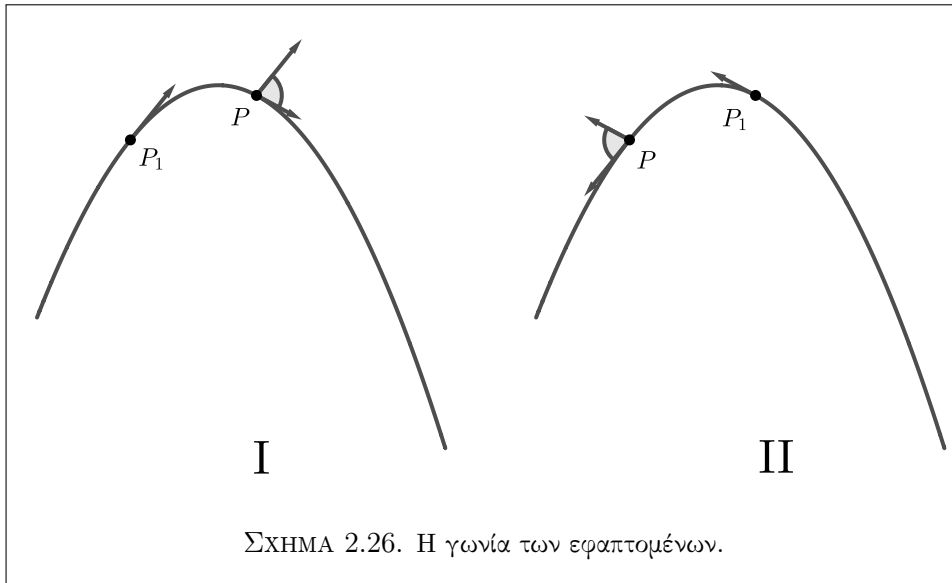
Οπότε λαμβάνοντας υπ' όψιν και το όρο του $y(h)$ που έχουμε βρει συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} x(h) = x_0 + f'(x_0)f(x_0) - f'(x_0) \left(f(x_0) + \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} \right) =$$

$$x_0 - f'(x_0) \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}.$$

2.6.3 Εύρεση της καμπυλότητας με την βοήθεια του μήκους καμπύλης.

Όπως αναφέραμε για το θέμα υπάρχουν, σε διάφορους συγγραφείς, ποι-
κίλες προσεγγίσεις. Σύμφωνα με τον ορισμό της καμπυλότητας μέσω μήκους
καμπύλης που, κατ' αρχάς θα ακολουθήσουμε, η καμπυλότητα σε ένα σημείο
 P είναι το όριο, όταν το σημείο P_1 τείνει στο P του λόγου της γωνίας που
σχηματίζουν οι εφαπτομένες στα P, P_1 δια του μήκους του τόξου PP_1 . Στην
αρχική παρουσίαση χρησιμοποιήσαμε την κίνηση προς το P ως στοιχείο της
περιγραφής. Ας δούμε πως μπορούμε, με αφετηρία αυτήν την διαισθητική πε-
ριγραφή, να έχουμε ένα αυστηρό ορισμό. Ας υποθέσουμε ότι το P_1 βρίσκεται



αριστερά του P δηλαδή έχει μικρότερη τετμημένη. Η κίνηση από το P_1 προς το P μπορεί να περιγραφεί στην C_f μέσω ενός εφαπτομένου διανύσματος της C_f με θετική τετμημένη. Η εφαπτομένη στο τυχόν σημείο $(a, f(a))$ είναι η

$$f'(a)x + (-1)y + f(a) - af'(a) = 0$$

και ένα παράλληλο διάνυσμα προς αυτήν με θετική τετμημένη είναι το $\vec{u}_a = (1, f'(a))$. Επομένως μας ενδιαφέρει η γωνία των δύο διανυσμάτων $\vec{u}_a$ όταν τη μία φορά το a είναι ίσο με την τετμημένη του P_1 και την άλλη με την τετμημένη του P (ΣΧΗΜΑ 2.26 I). Αν έχουμε κίνηση όπου η τετμημένη μειώνεται μπορούμε να θεωρήσουμε το $\vec{u}_a = (-1, -f'(a))$ (ΣΧΗΜΑ 2.26 II) που δίνει όμως την ίδια γωνία.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η γωνία μπορεί να εκφραστεί ως γωνία δύο διανυσμάτων. Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι είναι $P(x_0, f(x_0))$, $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$ τότε η γωνία που μας ενδιαφέρει είναι η γωνία $\phi(h)$ των διανυσμάτων $\vec{u}_{x_0} = (1, f'(x_0))$, $\vec{u}_{x_0+h} = (1, f'(x_0 + h))$. Είναι

$$\cos \phi(h) = \frac{1 + f'(x_0)f'(x_0 + h)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \sqrt{1 + (f'(x_0 + h))^2}}, \quad 0 \leq \phi(h) \leq \pi \quad (2.12)$$

2.6.3.1 Αντικατάσταση της γωνίας με την εφαπτομένη της.

Δυστυχώς ο τύπος 2.12 παρέχει την γωνία $\phi(h)$ μέσω του συνημιτόνου της. Μολονότι η συνάρτηση συνημίτονο περιορισμένη στο $[0, \pi]$ είναι αντιστρέψιμη και η $\phi(h)$ μπορεί να ανακτηθεί μέσω της αντίστροφης συνάρτησης είναι προτιμότερο να βρούμε ένα πιο εύχρηστο τρόπο για την εισαγωγή της στο

όριο της καμπυλότητας. Αν λάβουμε υπ' όψιν ότι για $h \rightarrow 0$ είναι $\varphi(h) \rightarrow 0$ μπορούμε να αξιοποιήσουμε την ιδιότητα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\varepsilon \varphi x} = 1$$

για να θέσουμε $\theta(x) = \frac{x}{\varepsilon \varphi x}$ οπότε $x = \theta(x) \varepsilon \varphi x$ με $\theta(x) \rightarrow 1$ όταν $x \rightarrow 0$.

Επομένως και

$$\varphi(h) = \theta(\varphi(h)) \varepsilon \varphi \varphi(h) \quad \text{με} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \theta(\varphi(h)) = 1 \quad (2.13)$$

Από την σχέση

$$\varepsilon \varphi^2 x = \frac{1}{\sigma \nu^2 x} - 1$$

βρίσκουμε:

$$\varepsilon \varphi^2 \varphi(h) = \frac{(f'(x_0) - f'(x_0 + h))^2}{(1 + f'(x_0) f'(x_0 + h))^2}.$$

Επομένως

$$\varepsilon \varphi \varphi(h) = \frac{|f'(x_0) - f'(x_0 + h)|}{|1 + f'(x_0) f'(x_0 + h)|}$$

Αλλά για $h \rightarrow 0$ είναι $1 + f'(x_0) f'(x_0 + h) \rightarrow 1 + (f'(x_0))^2 > 0$ επομένως για h κοντά στο 0 είναι

$$\varepsilon \varphi \varphi(h) = \frac{|f'(x_0) - f'(x_0 + h)|}{1 + f'(x_0) f'(x_0 + h)}$$

και

$$\varphi(h) = \theta(\varphi(h)) \varepsilon \varphi \varphi(h) \quad \text{με} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \theta(\varphi(h)) = 1$$

Αν συμβολίσουμε με $s(h)$ το μήκος του τόξου της $\mathcal{C}_f$ που έχει άκρα τα σημεία $P(x_0, f(x_0))$, $P_1(x_0 + h, f(x_0 + h))$ τότε η καμπυλότητα της $\mathcal{C}_f$ στο P θα είναι

$$\kappa = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(\varphi(h)) \frac{|f'(x_0) - f'(x_0 + h)|}{1 + f'(x_0) f'(x_0 + h)}}{s(h)}.$$

Δεδομένου ότι είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(\varphi(h)) = 1$ έχουμε ότι

$$\kappa = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f'(x_0 + h) - f'(x_0)|}{s(h) (1 + f'(x_0) f'(x_0 + h))}.$$

Στο επόμενο θα υπολογίσουμε το $s(h)$.

2.6.3.2 Υπολογισμός του μήκους τόξου.

Το μήκος ενός τόξου της γραφικής παράστασης μιας συνεχούς συνάρτησης μπορεί να βρεθεί ακολουθώντας τις ιδέες του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού και του μήκους κύκλου. Είναι παρεμφερείς με εκείνες που ακολουθούμε στην σχολική ύλη για να υπολογίσουμε εμβαδά. Η διαδικασία εκτίθεται σχεδόν σε κάθε βιβλίο Απειροστικού Λογισμού και παρακάτω παρουσιάζεται με ένα τρόπο που στηρίζεται απολύτως στο σχολικό βιβλίο.

Θα βρούμε το μήκος L της καμπύλης από το $A = (\alpha, f(\alpha))$ στο $B = (\beta, f(\beta))$.

Για τον σκοπό αυτό χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν υποδιαστήματα πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Έχουμε έτσι τους αριθμούς

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\nu}, \quad \dots, \quad x_\nu = \beta$$

και με τη βοήθεια τους τα σημεία

$$X_0 = A = (x_0, f(x_0)), \quad X_1 = (x_1, f(x_1)), \quad \dots, \quad X_\nu = B = (x_\nu, f(x_\nu))$$

Όταν το ν αυξάνει απεριόριστα δηλαδή όταν $\nu \rightarrow +\infty$ το μήκος $(X_0 X_1 \dots X_{\nu-1} X_\nu)$ της τεθλασμένης $X_0 X_1 \dots X_{\nu-1} X_\nu$ τείνει στο L δηλαδή

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} (X_0 X_1 \dots X_{\nu-1} X_\nu) = L$$

Αλλά

$$(X_0 X_1 \dots X_{\nu-1} X_\nu) = (X_0 X_1) + (X_1 X_2) + \dots + (X_{\nu-1} X_\nu) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (f(x_0) - f(x_1))^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - f(x_2))^2} + \dots + \sqrt{(x_{\nu-1} - x_\nu)^2 + (f(x_{\nu-1}) - f(x_\nu))^2}$$

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

βρίσκουμε ότι

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_0 - x_1)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi_2)(x_1 - x_2)$$

...

$$f(x_{\nu-1}) - f(x_\nu) = f'(\xi_\nu)(x_{\nu-1} - x_\nu)$$

Άρα

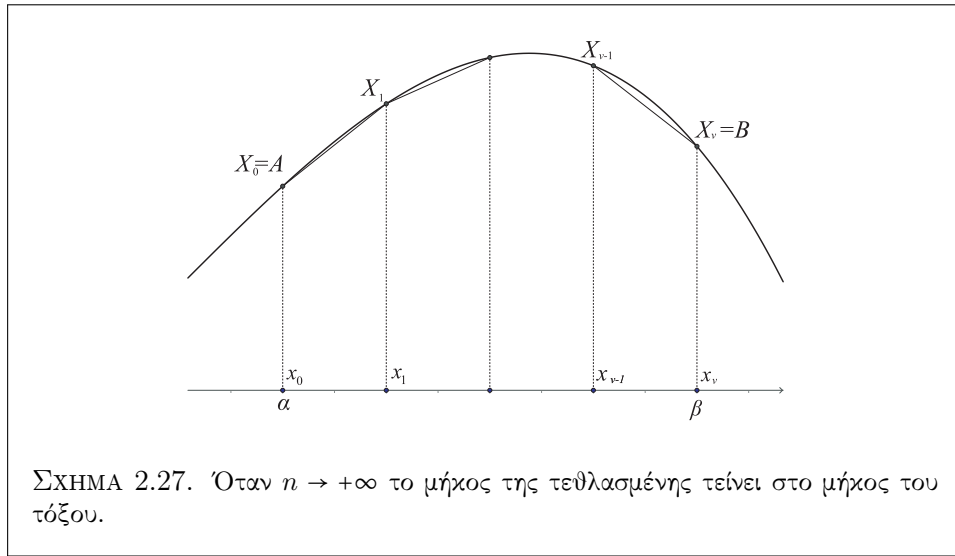
$$\begin{aligned} X_0 X_1 \dots X_{\nu-1} X_\nu &= |x_0 - x_1| \sqrt{1 + (f'(\xi_1))^2} + \dots + |x_{\nu-1} - x_\nu| \sqrt{1 + (f'(\xi_\nu))^2} = \\ &= \frac{\beta - \alpha}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \end{aligned}$$

Επομένως

$$L = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\beta - \alpha}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Άρα

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (2.14)$$



2.6.3.3 Υπολογισμός της καμπυλότητας.

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα έχουμε:

$$s(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

και

$$\kappa = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{\int_{x_0}^{x_0+h} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \right| \cdot \frac{1}{1 + f'(x_0)f'(x_0+h)}.$$

Αλλά

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{\int_{x_0}^{x_0+h} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0+h)}{\sqrt{1 + (f'(x_0+h))^2}} = \frac{f''(x_0)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}},$$

και

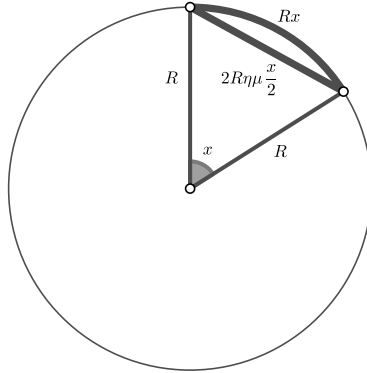
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + f'(x_0)f'(x_0+h)} = \frac{1}{1 + (f'(x_0))^2}.$$

Επομένως

$$\kappa = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + (f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2.6.3.4 Αντικατάσταση του μήκους τόξου με την χορδή.

Το μήκος τόξου ενός κύκλου ακτίνας R που αντιστοιχεί σε γωνία x (σε rad) είναι Rx ενώ της αντίστοιχης χορδής είναι $2R\sin\frac{x}{2}$. Λόγος τους είναι



ΣΧΗΜΑ 2.28. Ο λόγος τόξου-χορδής όταν τα μήκη τους τείνουν στο 0 είναι 1.

$\frac{Rx}{2R\eta\mu\frac{x}{2}} = \frac{x}{\eta\mu x} \text{ συν } \frac{x}{2}$ και έχει όριο όταν $x \rightarrow 0$ το 1. Αυτό εκφράζει το διαισθητικό αποτέλεσμα ότι όταν η χορδή είναι «μικρή» τότε είναι «περίπου» όσο το αντίστοιχο τόξο. Αυτό ισχύει κι γενικότερα:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\sqrt{h^2 + (f(x_0+h) - f(x_0))^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + (f'(x_0+h))^2}}{\sqrt{1 + (f'(x_0+h))^2}} = 1,$$

πράγμα που μας επιτρέπει να ορίσουμε την καμπυλότητα ως όριο γωνίας δια χορδής (όπως π.χ. γίνεται στο [17]). Αν δε αντικαταστήσουμε την γωνία με την εφαπτομένη της μπορούμε να έχουμε ένα ορισμό της καμπυλότητας προσαρμοσμένο στα σχολικά δεδομένα:

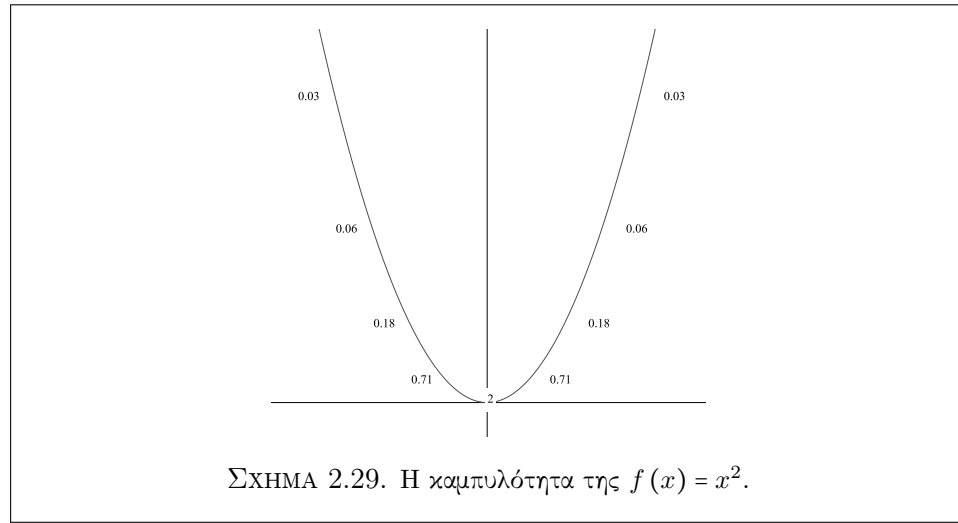
$$\kappa = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{f'(x_0) - f'(x_0+h)}{1 + f'(x_0)f'(x_0+h)} \right|}{\sqrt{h^2 + (f(x_0+h) - f(x_0))^2}} \quad (2.15)$$

2.6.4 Παραδείγματα στον υπολογισμό της καμπυλότητας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26. Ας θεωρήσουμε την $f(x) = x^2$. Η καμπυλότητα της στο τυχόν x_0 είναι

$$\frac{2}{\sqrt{1 + 4x_0^2}}.$$

Η καμπυλότητα για $x \rightarrow \pm\infty$ τείνει στο μηδέν, ενώ η μέγιστη τιμή της που είναι 2 επιτυγχάνεται για $x = 0$ (ΣΧΗΜΑ 2.29).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 27. Αν $f(x) = e^x$ τότε η καμυλότητα της στο τυχόν x είναι

$$\frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}^3}$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η μέγιστη τιμή της επιτυγχάνεται όταν $x = -\frac{1}{2} \ln 2$ είναι $\frac{2}{9}\sqrt{3} = 0,385$ (ΣΧΗΜΑ 2.30).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 28. Έστω $f(x) = \eta\mu x$. Στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$ της $\mathcal{C}_f$ αντιστοιχεί κέντρο καμυλότητας με συντεταγμένες

$$\frac{x_0 \eta\mu x_0 + \sigma\upsilon\nu x_0 + \sigma\upsilon\nu^3 x_0}{\eta\mu x_0}, \quad -2 \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x_0}{\eta\mu x_0}$$

η δε καμυλότητα είναι $\frac{|\eta\mu x_0|}{\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x_0}}^3$ (ΣΧΗΜΑ 2.31).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 29. Ο τύπος υπολογισμού της καμυλότητας μπορεί να εφαρμοσθεί και στις κωνικές τομές αρκεί να τις εκφράσουμε μέσω κατάλληλων συναρτήσεων. Για παράδειγμα η καμπύλη της έλλειψης

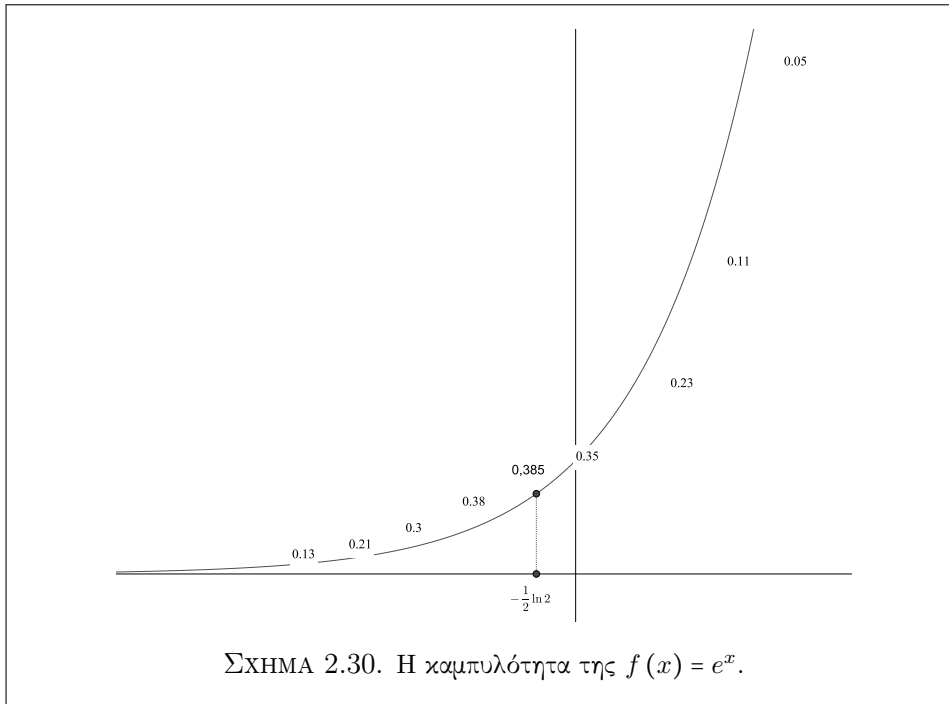
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

μπορεί να εκφρασθεί ως ένωση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}, \quad g(x) = -\frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}, \quad x \in [-\alpha, \alpha].$$

και ο υπολογισμός της καμυλότητας να γίνει σε αυτές. Είναι

$$f'(x) = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}, \quad f''(x) = -\beta\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}^3} \quad x \in (-\alpha, \alpha),$$

ΣΧΗΜΑ 2.30. Η καμπυλότητα της $f(x) = e^x$.

τα δε σημεία $\pm\alpha$ έχουν εξαιρεθεί διότι σε αυτά η f δεν παραγωγίζεται. Αν εφαρμόσουμε τον τύπο 2.10 στην f βρίσκουμε ότι η καμπυλότητα στο $x \in (-\alpha, \alpha)$ είναι

$$\kappa = \frac{\beta\alpha^4}{\sqrt{(\alpha^2 - x^2)\alpha^2 + \beta^2 x^2}^3}.$$

Για $x = 0$ έχουμε ότι η καμπυλότητα στο σημείο $(0, \alpha)$ είναι $\frac{\beta}{\alpha^2}$. Ένας τρόπος «ανάγκης»¹⁴ για να αποδώσουμε καμπυλότητα και για $x = \pm\alpha$ είναι να πάρουμε όρια για $x \rightarrow \pm\alpha$ και θα βρούμε $\frac{\alpha}{\beta^2}$. Αν υποτεθεί ότι $\alpha > \beta$ τότε η καμπυλότητα της έλλειψης μεταβάλλεται μεταξύ της ελάχιστης τιμής της $\frac{\beta}{\alpha^2}$ και της μέγιστης τιμής της $\frac{\alpha}{\beta^2}$ (ΣΧΗΜΑ 2.32).

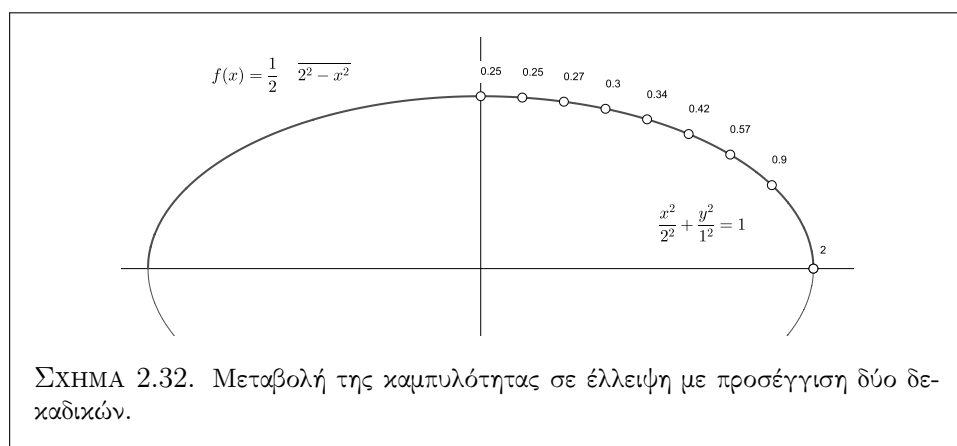
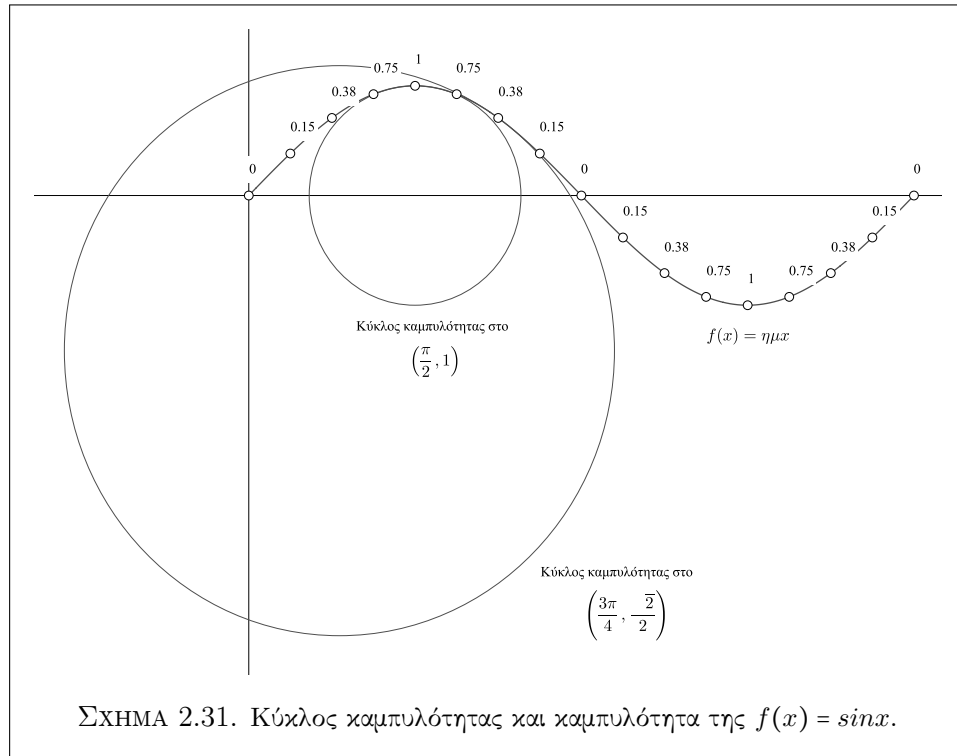
¹⁴Προκειμένου για καμπύλες ένας τρόπος για να αποδοθεί καμπυλότητα είναι η χρήση παραμετρικών εξισώσεων. Έτσι αν μια καμπύλη έχει παραμετρικές εξισώσεις $x(t)$, $y(t)$ όπου το t μεταβάλλεται σε κατάλληλο διάστημα τότε ([35] σελ.207) μπορούμε να βρούμε ότι η καμπυλότητα είναι

$$\kappa = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Για την περίπτωση μας της έλλειψης μπορούμε να πάρουμε

$$x(t) = \alpha \cos t, \quad y(t) = \beta \sin t \quad t \in [0, 2\pi)$$

και για $t = 0$ θα βρούμε $\frac{\alpha}{\beta^2}$.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μία μικρή συλλογή ασκήσεων

Οι ασκήσεις προέρχονται από διάφορες πηγές οι οποίες όπου είναι δυνατόν αναφέρονται. Όλες επιλύονται με βάση όσα περιέχονται στο πρώτο κεφάλαιο και για να επιτευχθεί αυτό χρειάστηκε σε ορισμένες να γίνουν κάποιες μετατροπές. Επίσης παρουσιάζονται κάποιες, σκόπιμες, επικαλύψεις με το υλικό αυτού του κεφαλαίου.

ΑΣΚΗΣΗ 1. ¹ Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό με την δεύτερη παράγωγο παντού θετική. Έστω ένα σημείο $M(p, q)$, $\alpha < p < \beta$ τέτοιο ώστε να βρίσκεται:

- Πάνω από τις εφαπτομένες της C_f στα σημεία της $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.
- Κάτω από την C_f .

Τότε από το M άγονται ακριβώς δύο εφαπτομένες προς την C_f .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η τυχούσα εφαπτομένη της C_f έχει εξίσωση

$$y = f'(t)(x - t) + f(t) \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Η υπόθεση για την θέση του M μας δίνει ότι

$$q > f'(\alpha)(p - \alpha) + f(\alpha)$$

$$q > f'(\beta)(p - \beta) + f(\beta)$$

$$q < f(p)$$

Το πλήθος των εφαπτομένων που διέρχονται από το M καθορίζεται, κατ' αρχήν από το πλήθος των λύσεων (ως προς t) της εξίσωσης

$$q = f'(t)(p - t) + f(t)$$

¹Γενικότερα το θέμα εξετάζεται στην ενότητα 1.10.

δηλαδή των ριζών της συνεχούς

$$r(t) = f'(t)(p-t) + f(t) - q$$

Είναι $r(\alpha) < 0$, $r(\beta) < 0$, $r(p) < 0$. Από το θεώρημα του Bolzano έχουμε ότι η r έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε κάθε ένα από τα (α, p) , (p, β) . Η παράγωγος της

$$r'(t) = f''(t)(p-t) - f'(t) + f'(t) = f''(t)(p-t)$$

έχει μοναδική ρίζα το p επομένως από το θεώρημα του Rolle δεν έχει άλλη ρίζα στα (α, p) , (p, β) . Συνεπώς η r έχει ακριβώς δύο ρίζες $t_1 < t_2$. Λόγω της μονοτονίας της παραγώγου θα είναι $f'(t_1) < f'(t_2)$ άρα οι αντίστοιχες εφαπτομένες θα είναι διαφορετικές. Άρα υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτομένες. ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Μία κυρτή συνάρτηση έχει δύο βασικά χαρακτηριστικά:

- Η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες.
- Η γραφική παράσταση σε ένα διάστημα βρίσκεται κάτω από την αντίστοιχη χορδή.

Ας θεωρήσουμε μία κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $a < b < c$ από το Δ . Στο $[a, b]$ η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο $(b, f(b))$. Άρα για $x \in [a, b]$ έχουμε

$$f(x) \geq f'(b)(x-b) + f(b)$$

και ολοκληρώνοντας στο $[a, b]$ βρίσκουμε

$$\int_a^b f(x) dx > (b-a)f(b) - f'(b) \frac{(b-a)^2}{2} \quad (1)$$

Στο $[b, c]$ η C_f βρίσκεται κάτω από την χορδή που συνδέει τα $(b, f(b))$, $(c, f(c))$ δηλαδή για $x \in [b, c]$ έχουμε

$$f(x) \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b}(x-b) + f(b)$$

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε ότι

$$\int_b^c f(x) dx < \frac{f(b) + f(c)}{2}(c-b) \quad (2)$$

κάτι αναμενόμενο αφού το β' μέλος για f θετική παριστάνει εμβαδόν τραπεζίου. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να συνδέσουμε με ανισότητες τα ολοκληρώματα που υπεισέρχονται στις (1), (2) αποφασίζοντας τι θέλουμε να κρατήσουμε και βάζοντας ειδικές υποθέσεις. Αν για παράδειγμα θέλουμε να απαλλαγούμε από την $f'(b)$ συτό μπορεί να γίνει παρατηρώντας ότι

$$\frac{f(c) - f(b)}{c-b} = f'(\xi) \quad \xi \in (c,b) > f'(b)$$

και επομένως από την (1) έχουμε την:

$$\int_a^b f(x) dx > (b-a)f(b) - \frac{f(c)-f(b)(b-a)^2}{c-b} \quad (1').$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $b-a=c-b=1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_b^c f(x) dx - \frac{f(c)}{2} &< \frac{f(b)}{2} \\ 3 \int_a^b f(x) dx + \frac{3f(c)}{2} &> \frac{f(b)}{2} \end{aligned}$$

που μας δίνουν την

$$3 \int_a^b f(x) dx + \frac{3f(c)}{2} \geq \int_b^c f(x) dx - \frac{f(c)}{2}$$

δηλαδή την

$$\int_b^c f(x) dx < 3 \int_a^b f(x) dx + 2f(c)$$

που δίνει την αποδεικτέα για $a=0, b=1, c=2$.

ΑΣΚΗΣΗ 2. ² Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 με $f'(x_0) = 0$. ³

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν η παράγωγος δεν μηδενίζονταν, ως συνεχής, θα διατηρούσε πρόσημο. Επομένως η f θα ήταν γνησίως μονότονη. Κάποιο από τα όρια της στα $\pm\infty$ θα ήταν μικρότερο ή ίσο από το $f(0)$. Άρα δεν μπορούν να είναι και τα δύο $+\infty$.

²<https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=3473&p=18608&hilit>

³Το συμπέρασμα μπορεί να αποδειχθεί με λιγότερες υποθέσεις αλλά κάπως πιο δύσκολα.

Πρόκειται για μία επέκταση του θεωρήματος του Rolle:

Αν τα όρια στα $+\infty, -\infty$ είναι ίσα με $+\infty$ και η f είναι παραγωγίσιμη τότε η παράγωγος της έχει ρίζα.

Μία απόδειξη θα μπορούσε να ήταν η εξής:

- Αν η f παίρνει και αρνητικές τιμές θα έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και ο μηδενισμός της παραγώγου προκύπτει από το θεώρημα του Rolle.
- Αν δεν παίρνει αρνητικές τιμές αλλά γίνεται μηδέν τότε το μηδέν είναι η ελάχιστη τιμή της και ο μηδενισμός της παραγώγου προκύπτει από το θεώρημα του Fermat.
- Αν τέλος η f δεν μηδενίζεται τότε θεωρούμε την συνάρτηση w ορισμένη στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με $w(-\frac{\pi}{2}) = w(\frac{\pi}{2}) = 0$ και $w(x) = \frac{1}{f(\varepsilon\varphi x)}$ για $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Διαπιστώνεται εύκολα ότι η w ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και επομένως η παράγωγος της $-\frac{f'(\varepsilon\varphi x)(1+\varepsilon\varphi^2 x)}{(f(\varepsilon\varphi x))^2}$ έχει ρίζα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και επομένως και η f' έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Θα λέμε ότι η f ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz στο Δ αν υπάρχει αριθμός c τέτοιος ώστε:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

για όλα τα $x, y \in \Delta$.

1. Να αποδείξετε ότι κάθε παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz στο Δ .
2. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο του 1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ (ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 1$). Άρα

$$|f'(t)| \leq \max(|f'(\alpha)|, |f'(\beta)|) = c$$

για όλα τα t . Αν τώρα x, y από το Δ με $x < y$ εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, y]$ και έχουμε ότι για κάποιο $\xi \in (x, y)$ είναι

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| \leq c|x - y|.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει και όταν $x = y$ και έτσι το 1. έχει αποδειχθεί.

Για το 2. παρατηρούμε ότι η $\eta\mu$ στο $[0, 2\pi]$ ικανοποιεί την

$$|\eta\mu x - \eta\mu y| \leq 1 \cdot |x - y|,$$

χωρίς να είναι κυρτή. Κάθε μη κυρτή με συνεχή παράγωγο θα μπορούσε να είναι αντιπαράδειγμα.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Έστω συναρτήσεις f και g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο Δ .

1. Να αποδειχθεί ότι αν η παράγωγος της f είναι γνησίως αυξουσα και της g φθίνουσα τότε οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.
2. Να αποδειχθεί ότι αν η f να είναι κυρτή και η g κοίλη τότε οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία. Ειδικότερα να αποδειχθεί ότι μία ευθεία μπορεί να τέμνει την γραφική παράσταση μίας κυρτής συνάρτησης το πολύ σε δύο σημεία.
3. Να αποδειχθεί ότι αν η f να είναι κυρτή, η g κοίλη, ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για όλα τα x και το ίσον ισχύει μόνο για ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τότε το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο επαφής των γραφικών παραστάσεων των f και g (δηλαδή οι εφαπτομένες τους σε αυτό συμπίπτουν).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $h = f - g$ είναι $h' = f' - g'$. Για $x_1 < x_2$ από το Δ έχουμε

$$f'(x_1) < f'(x_2) \quad (1)$$

και $g'(x_1) \geq g'(x_2)$ από την οποία προκύπτει ότι

$$-g'(x_1) \leq -g'(x_2) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) έχουμε ότι

$$f'(x_1) - g'(x_1) < f'(x_2) - g'(x_2)$$

επομένως η h' είναι γνησίως αύξουσα. Αν τώρα υποθεθεί ότι οι $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ είχαν τρία ή περισσότερα κοινά σημεία θα υπήρχαν τρία τουλάχιστον σημεία (p, p') , (q, q') , (r, r') με τετμημένες $p < q < r$ που θα ανήκαν στις γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων. Θα ισχύει δηλαδή

$$f(p) = g(p) = p', \quad f(q) = g(q) = q', \quad f(r) = g(r) = r'.$$

Από τις σχέσεις αυτές συνάγουμε ότι:

$$h(p) = h(q) = h(r).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[p, q]$ και $[q, r]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν s, t με

$$p < s < q < t < r,$$

ώστε

$$h'(s) = 0 = h'(t),$$

πράγμα που αντίκειται στο ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα (άτοπο). Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν μπορούν να έχουν περισσότερα από δύο κοινά σημεία.

2. Οι f και g θα παραγωγίζονται στα εσωτερικά σημεία του Δ και στο εσωτερικό του Δ η f' θα είναι γνησίως αύξουσα ενώ η g' θα είναι γνησίως φθίνουσα. Εργαζόμενοι όπως στο 1. συμπεραίνουμε ότι:

- Η h είναι συνεχής στο Δ , παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του και η h' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του διαστήματος Δ .
- Αν υπάρχουν τρία ή περισσότερα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f , g θα υπάρχουν στο εσωτερικό του Δ δύο ρίζες της h' κάτι που αντίκειται στη μονοτονία της.

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε μία κυρτή συνάρτηση f και μία ευθεία $y = ax + b$ ονομάζουμε $g(x) = ax + b$, παρατηρούμε ότι η g' ως σταθερή είναι φθίνουσα και εργαζόμαστε όπως πριν. Αν η ευθεία είναι της μορφής $x = a$ τότε προφανώς δεν μπορεί να τέμνει την γραφική παράσταση της f σε περισσότερα από ένα σημεία.

3. Ορίζουμε πάλι $h = f - g$. Θα είναι $h(x) \geq 0$ και στο x_0 θα ισχύει το ίσον. Η h θα παρουσιάζει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο του Δ και επομένως από το θεώρημα του Fermat θα μηδενίζεται σε αυτό η παράγωγος της. Θα είναι λοιπόν $h'(x_0) = 0$ και επομένως $f'(x_0) = g'(x_0)$. Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο κοινό τους σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχουν αυτό το σημείο κοινό και ίσους συντελεστές διευσθύνσεως τις $f'(x_0) = g'(x_0)$ άρα συμπίπτουν.

ΑΣΚΗΣΗ 5. ⁴ Αν οι $x_1, \dots, x_n$ είναι θετικοί αριθμοί, όχι όλοι ίσοι με άθροισμα 1 τότε

$$x_1^{x_1} \cdots x_n^{x_n} > \frac{1}{n}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η αποδεικτέα είναι ισοδύναμη με την

$$\ln(x_1^{x_1} \cdots x_n^{x_n}) > \ln \frac{1}{n}$$

ή την

$$x_1 \ln x_1 + \cdots + x_n \ln x_n > (x_1 + \cdots + x_n) \ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

που γράφεται και:

$$\frac{x_1 \ln x_1 + \cdots + x_n \ln x_n}{n} > \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) \ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι προκύπτει αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Jensen στην κυρτή συνάρτηση $x \ln x$.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Να αποδειχθεί ότι αν ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ είναι δι-
άφορος της μονάδας τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + \beta^x + \gamma^x$ είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $f''(x) = \alpha^x \ln^2 \alpha + \beta^x \ln^2 \beta + \gamma^x \ln^2 \gamma > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 7. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα και κυρτή συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδειχθεί ότι για όλα τα x ισχύει

$$f(x) f^{-1}(x) \leq x^2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή κάθε σημείο της C_f θα βρίσκεται κάτω από την χορδή που συνδέει τα $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ που έχει εξίσωση $y = x$ θα ισχύει $f(x) \leq x$ για όλα τα x . Το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$, $x = 1$. Επίσης από την συνέχεια της f , συνάγουμε ότι το σύνολο τιμών της f , που είναι και πεδίο ορισμού της f^{-1} , είναι το $[0, 1]$.

Θέτοντας $y = f^{-1}(x)$ έχουμε $x = f(y)$, $y \in [0, 1]$ και η αποδεικτέα ισοδυναμεί με την:

$$f(f(y)) y \leq f^2(y).$$

⁴<https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=3473&p=18608&hilit>

Η τελευταία προφανώς ισχύει σχέση ισχύει για $y = 0$ και $y = 1$. Για $y \neq 0, 1$ είναι και $f(y) \neq 0, 1$ και η σχέση ισοδυναμεί με την

$$\frac{f(f(y)) - f(0)}{f(y) - 0} \leq \frac{f(y) - f(0)}{y - 0},$$

η οποία, αφού $f(y) < y$, ισχύει λόγω της ΠΡΟΤΑΣΗΣ $\diamond 12$.

ΑΣΚΗΣΗ 8. Έστω κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και a, b, c θετικοί αριθμοί με $abc = 1$. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{f(a)}{1+a+ab} + \frac{f(b)}{1+b+bc} + \frac{f(c)}{1+c+ca} \geq f(1).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αφού $c = \frac{1}{ab}$, οι θετικοί αριθμοί

$$\lambda_1 = \frac{1}{1+a+ab}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{1+b+bc}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{1+c+ca},$$

έχουν άθροισμα 1 αφού

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} &= \\ \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+\frac{1}{a}} + \frac{1}{1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b}} &= \\ \frac{1}{1+a+ab} + \frac{a}{1+a+ab} + \frac{ab}{1+a+ab} &= 1. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Jensen έχουμε:

$$\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b) + \lambda_3 f(c) \geq f(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c).$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c &= \\ \frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} &= \\ \frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+\frac{1}{a}} + \frac{\frac{1}{ab}}{1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b}} &= \\ \frac{a}{1+a+ab} + \frac{ab}{1+a+ab} + \frac{1}{1+a+ab} &= 1, \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει το αποδεικτέο.

ΑΣΚΗΣΗ 9. Έστω η κυρτή συνάρτηση $f: [-m, m] \rightarrow \mathbb{R}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $g: [0, m] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) + f(-x).$$

ΛΥΣΗ. Στο $(-m, m)$ είναι

$$g'(x) = f'(x) - f'(-x).$$

Αφού $f' \uparrow$ είναι και $g' \uparrow$. Επίσης $g'(0) = 0$ άρα η g' είναι αρνητική στο $(-m, 0)$ και θετική στο $(0, m)$. Επομένως $g \downarrow$ στο $[-m, 0]$ και $g \uparrow$ στο $[0, m]$. Άρα η g έχει ελάχιστη τιμή στο 0 το $2f(0)$. Στα $m, -m$ παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της $g(-m) = g(m) = f(m) + f(-m)$.

ΑΣΚΗΣΗ 10. Έστω f μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και a, b θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$g(x) = f(x+a) - g(x-b),$$

είναι γνησίως αύξουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $g'(x) = f'(x+a) - f'(x-b) > 0$ αφού $f' \uparrow$ και $x+a > x-b$.

ΑΣΚΗΣΗ 11.⁵ Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0.$$

ΛΥΣΗ. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η f' δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός. Διότι αν $f'(x_0) \geq 0$ τότε για $x_1 > x_0$ θα είναι $f'(x_1) > 0$ και αφού για όλα τα x ισχύει

$$f(x) \geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1),$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)) = +\infty,$$

θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (άτοπο).

Αφού η f' είναι παντού αρνητική είναι $f \downarrow$ και από την υπόθεση ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ συνάγουμε και ότι η f είναι παντού θετική. Ήδη τα στοιχεία αυτά μας επιτρέπουν να μαντέψουμε τα ζητούμενα όρια όπως υποδεικνύει το σχήμα 3.1. Φαίνεται ότι για $x \rightarrow +\infty$ είναι $f'(x) \rightarrow 0$ και $xf'(x) \rightarrow 0$. Αποδεικνύονται δε ως εξής:

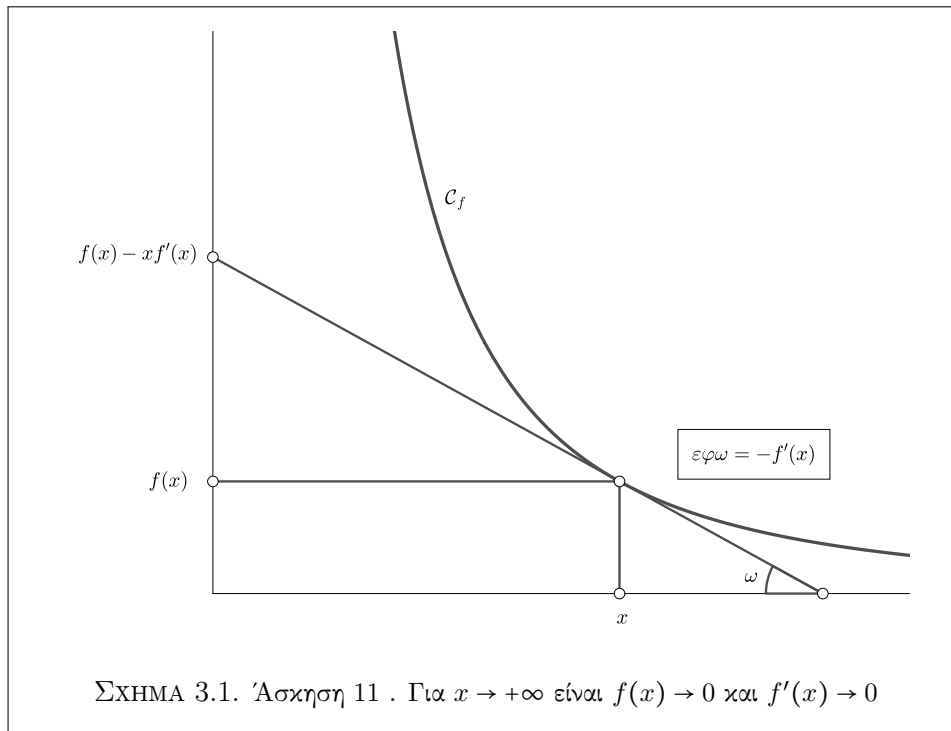
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0} \quad \text{Για κάθε } x, y \text{ είναι}$$

$$f(y) \geq f'(x)(y - x) + f(x),$$

και επομένως

$$f(x) \leq f'(x)(x - y) + f(y) \quad (*).$$

⁵<https://artofproblemsolving.com/community/c7h1904188p13026619>



Η γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση f' έχει στο $+\infty$ όριο κάποιο $\ell \leq 0$. Αν υποθεθεί ότι $\ell < 0$ κρατώντας το y σταθερό και παίρνοντας όρια στην (*) για $x \rightarrow +\infty$ έχουμε το άτοπο συμπέρασμα ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Άρα $\ell = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 0$ Διαπιστώνεται εύκολα ότι η συνεχής συνάρτηση $f(x) - x f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και παίρνει μόνο θετικές τιμές επομένως έχει στο $+\infty$ πραγματικό όριο άρα και η $-x f'(x)$ πραγματικό όριο. Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = L$. Από την (*) έχουμε ότι:

$$f(x) + y f'(x) - f(y) \leq f'(x) x \leq 0$$

Παίρνοντας στην παραπάνω σχέση όρια για $x \rightarrow \infty$ βρίσκουμε

$$0 + y \cdot 0 - f(y) \leq L \leq 0.$$

Παίρνοντας τώρα όρια για $y \rightarrow +\infty$ βρίσκουμε ότι $L = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 12. Έστω $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha > -1$.

1. Να αποδειχθεί ότι για $\nu > 1$ η συνάρτηση $f(x) = (1+x)^\nu$, $x > -1$ είναι κυρτή.

2. Να αποδειχθεί ότι για όλα τα $x > -1$ ισχύει $(1+x)^\nu \geq 1 + \nu x$ (Ανισότητα του Bernoulli).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

- Είναι $f'(x) = \nu(1+x)^{\nu-1}$ και $f''(x) = \nu(\nu-1)(1+x)^{\nu-2} > 0$.
- Για $\nu = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Για $\nu > 1$ παρατηρούμε ότι η $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της επομένως και από εκείνη στο σημείο $(0, 1)$ που είναι η $y = \nu x + 1$ και επομένως ισχύει $f(x) \geq 1 + \nu x$. Άρα για όλα τα θετικά ν το αποδεικτέο ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 13. ⁶ Μια πολυωνυμική συνάρτηση f έχει περιττό βαθμό μεγαλύτερο του 1. Να αποδειχθεί ότι δεν είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η f' θα είναι πολυωνυμική άρτιου βαθμού τουλάχιστον 2.

- Αν ο συντελεστής μεγιστοβαθμίου όρου της είναι θετικός τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$. Έστω αριθμός x_2 . Τότε θα υπάρχει $x_1 < x_2$ ώστε $f'(x_1) > f'(x_2)$. Η τελευταία ανισότητα αποκλείει η f' να είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν πάλι ο συντελεστής μεγιστοβαθμίου όρου της f' είναι αρνητικός τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$. Επιλέγοντας τυχόντα x_1 συνάγουμε ότι υπάρχει $x_2 > x_1$ ώστε $f(x_2) < f(x_1)$ από την οποία πάλι αποκλείεται η f' να είναι γνησίως αύξουσα.

Σε κάθε περίπτωση αποκλείεται η f να είναι κυρτή.

ΑΣΚΗΣΗ 14. ⁷ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $f(x) < M$ για όλα τα x .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω της μονοτονίας της η f' θα γίνεται μηδέν το πολύ σε μία τιμή. Επομένως θα παίρνει και μη μηδενικές τιμές. Έστω $f'(x_0) \neq 0$.

Αν υποθεθεί ότι $f'(x_0) > 0$ τότε λόγω της σχέσης

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ η οποία δεν συμβιβάζεται με την $f(x) < M$ για όλα τα x .

Στην περίπτωση όπου $f'(x_0) < 0$ τότε η σχέση που χρησιμοποιήσαμε μας δίνει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ που πάλι αντίκειται στην καθολική ισχύ της $f(x) < M$.

ΑΣΚΗΣΗ 15. Για τους διάφορους του 1 θετικούς αριθμούς $p_1, p_2, \dots, p_n$ ισχύει $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = 1$ τότε η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{p_1^x}{\ln p_1} + \frac{p_2^x}{\ln p_2} + \dots + \frac{p_n^x}{\ln p_n}$$

είναι κυρτή.

⁶[36] σελ. 13

⁷[36] σελ. 8

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βρίσκουμε διαδοχικά ότι

$$g'(x) = p_1^x + p_2^x + \dots + p_n^x$$

$$g''(x) = p_1^x \ln p_1 + p_2^x \ln p_2 + \dots + p_n^x \ln p_n$$

$$g'''(x) = p_1^x (\ln p_1)^2 + p_2^x (\ln p_2)^2 + \dots + p_n^x (\ln p_n)^2 > 0$$

Επομένως $g'' \uparrow$. Αλλά

$$g''(0) = \ln p_1 + \ln p_2 + \dots + \ln p_n = \ln(p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n) = 0$$

επομένως $g''(x) > 0$ για $x > 0$. Άρα η συνεχής στο $[0, +\infty)$ συνάρτηση g' έχει στο $(0, +\infty)$ θετική παράγωγο. Άρα $g' \uparrow$ και η g είναι κυρτή.

ΑΣΚΗΣΗ 16. Έστω f μία κυρτή συνάρτηση ορισμένη στο $\Delta = [\alpha, \beta]$. Έστω σημείο $K(p, q)$ με $p \in [\alpha, \beta]$ και $q < f(p)$. Να αποδειχθεί ότι:

1. Για κάθε σημείο $M(r, s)$ με $r \in [\alpha, \beta]$ και $s > f(r)$ το ευθύγραμμο τμήμα KM τέμνει την C_f ακριβώς σε ένα σημείο.
2. Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο N της C_f τέτοι ώστε η απόσταση του από το K να είναι ελάχιστη δηλαδή για κάθε άλλο σημείο N' της C_f να ισχύει $KN \leq KN'$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

1. Η περίπτωση όπου $p = r$ είναι εύκολη. Το KM είναι κάθετο στον $x'x$ και τέμνει την C_f στο σημείο $(p, f(p))$.

Στην περίπτωση που $p \neq r$ η ευθεία που συνδέει το K με το M έχει εξίσωση KM

$$y = \frac{s-q}{r-p}(x-p) + q$$

και τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος αντιστοιχούν στα σημεία της παραπάνω ευθείας που έχουν τετμημένη στο κλειστό διάστημα με άκρα τα p, r , ως το ονομάσουμε Δ . Θέλουμε η εξίσωση

$$\frac{s-q}{r-p}(x-p) + q = f(x),$$

ή ισοδύναμα η συνάρτηση

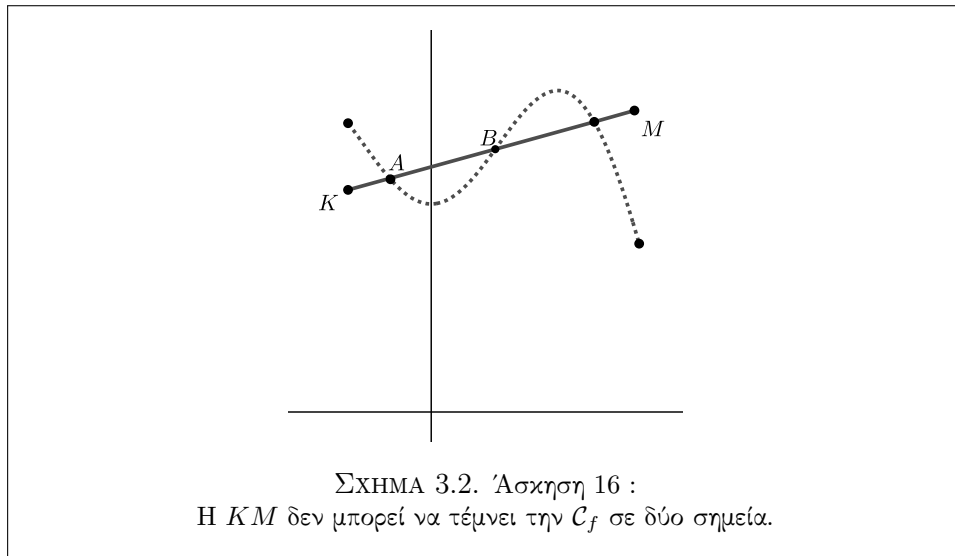
$$h(x) = \frac{s-q}{r-p}(x-p) + q - f(x)$$

να έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ . Είναι:

$$h(p) = q - f(p) < 0, \quad h(r) = s - f(r) > 0$$

και η συνεχής h έχει ρίζα στο Δ από το θεώρημα του Bolzano. Άρα το τμήμα KM έχει κοινό σημείο με την C_f με τετμημένη μεταξύ των p, r .

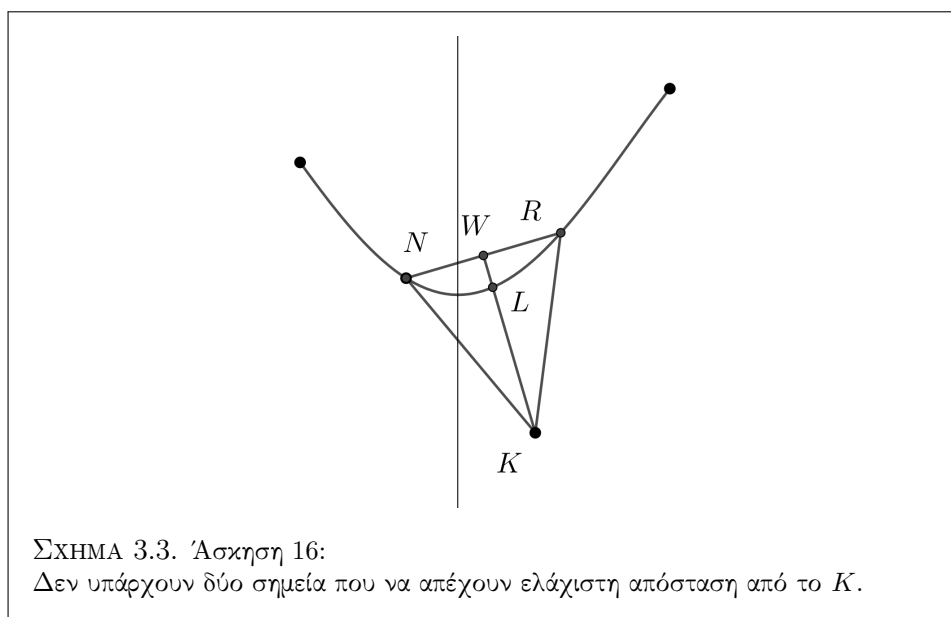
Αν υποτεθεί ότι το KM έχει δύο κοινά σημεία A, B με την C_f (ΣΧΗΜΑ 3.2) ας πούμε με τετμημένες $x_1 < x_2$ μεταξύ των p, r τότε τα σημεία της C_f με τετμημένη μικρότερη του x_1 ή μεγαλύτερη του x_2 πρέπει να βρίσκονται πάνω από τα αντίστοιχα σημεία της ευθείας AB πράγμα που δεν ισχύει για το K (άτοπο).



2. Το τυχόν σημείο της C_f είναι της μορφής $(x, f(x))$ και η απόσταση του από το K είναι

$$d(x) = \sqrt{(x-p)^2 + (f(x)-q)^2}, \quad x \in \Delta.$$

Η d είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα Δ επομένως έχει ελάχιστη τιμή που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο N της C_f του οποίου η απόσταση από το K δεν υπερβαίνει τις αποστάσεις των άλλων σημείων της από το K . Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένα δεύτερο σημείο R της C_f του οποίου η απόσταση από το K είναι ελάχιστη και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι αν θεωρήσουμε και το μέσον W του NR από το ισοσκελές τρίγωνο KNR έχουμε ότι $KW < KN$ (βλ. ΣΧΗΜΑ 3.3). Επίσης λόγω της κυρτότητας της f το W βρίσκεται πάνω από το σημείο της C_f με την ίδια τετμημένη. Αλλά από το προηγούμενο ερώτημα το τμήμα KW θα έχει με την C_f ακριβώς ένα κοινό σημείο ας το πούμε L . Τότε $KL < KW < KN$ πράγμα αδύνατον αφού πρέπει $KN \geq KL$.



ΑΣΚΗΣΗ 17. ⁸ Να αποδειχθεί ότι τα σημεία καμπής της συνάρτησης

$$w(x) = x\eta\mu x,$$

ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση

$$y^2(4+x^2) = 4x^2$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι

$$w'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x$$

$$w''(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x.$$

Παρατηρούμε ότι αν το x μηδενίζει την w'' δηλαδή

$$2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x = 0 \quad (*)$$

τότε το x δεν μπορεί να είναι μηδέν. Επίσης αφού το $\sigma\upsilon\nu x$ δεν μηδενίζεται στο μηδέν η $(*)$ δεν επαληθεύεται για x των οποίων το συνημίτονο μηδενίζεται ούτε για εκείνα όπου μηδενίζεται το ημίτονο. Άρα η $(*)$ ισοδυναμεί με οποιαδήποτε από τις

$$\frac{2}{x} = \varepsilon\varphi x \quad x = \frac{2}{\varepsilon\varphi x} \quad (**)$$

Αν αντικαταστήσουμε ένα x που ικανοποιεί την $(**)$ στην τρίτη παράγωγο της w βρίσκουμε

$$-3\eta\mu x - \frac{2}{\varepsilon\varphi x}\sigma\upsilon\nu x = -3\eta\mu x - \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x} = \frac{-\sigma\upsilon\nu^2 x + 3}{\eta\mu x} \neq 0$$

⁸[27] σελ. 170

Άρα κοντά σε αυτό το x η w''' θα διατηρεί πρόσημο, άρα η w' θα είναι γνησίως μονότονη και εκατέρωθεν αυτού του x θα αλλάζει πρόσημο επομένως για την w θα έχουμε καμπή. Δείξαμε ότι τα σημεία καμπής της w είναι ακριβώς τα σημεία της C_w που η τετμημένες τους ικανοποιούν την εξίσωση (*).

Αν τώρα (x, y) είναι ένα σημείο καμπής της w θα είναι

$$y = x\eta\mu x \quad \text{και} \quad x = \frac{2}{\epsilon\phi x}$$

και επομένως

$$\eta\mu x = \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad x^2 = \frac{4(1 - \eta\mu^2 x)}{\eta\mu^2 x}$$

οπότε συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε ότι τα σημεία καμπής ανήκουν στην καμπύλη

$$x^2 y^2 = 4(x^2 - y^2)$$

δηλαδή την δοθείσα.

ΑΣΚΗΣΗ 18.⁹ Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι α, β, γ ώστε η

$$f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon, \quad \alpha \neq 0$$

να έχει σημεία καμπής.

ΛΥΣΗ. Είναι

$$f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta$$

$$f''(x) = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma.$$

Για να έχουμε σημεία καμπής πρέπει η f'' :

- Κατ' αρχάς να έχει ρίζα για την οποία
- εκατέρωθεν της να αλλάζει πρόσημο.

Χρειάζεται λοιπόν να έχει διακρίνουσα μη αρνητική. Αλλά στην περίπτωση που αυτή είναι μηδέν εκατέρωθεν της διπλής ρίζας η f'' διατηρεί πρόσημο: εκείνο του α . Άρα πρέπει η διακρίνουσα να είναι θετική ώστε η f'' να έχει δύο ρίζες και μεταξύ τους να παίρνει πρόσημο αντίθετο του α ενώ εκτός των ριζών το ίδιο με του α . Είναι

$$\Delta = (6\beta)^2 - 4(12\alpha)(2\gamma) = 36\beta^2 - 96\alpha\gamma = 12(3\beta^2 - 8\alpha\gamma),$$

και επομένως η ζητούμενη συνθήκη είναι

$$3\beta^2 - 8\alpha\gamma > 0.$$

⁹Βλ. [27] σελ. 168

ΑΣΚΗΣΗ 19. ¹⁰ Να αποδειχθεί ότι τα σημεία καμπής της συνάρτησης

$$f(x) = e^{-x} \eta \mu x,$$

ανήκουν στην γραφική παράσταση κάποιας από τις συναρτήσεις

$$g(x) = e^x, \quad h(x) = -e^{-x}$$

και ότι σε κάθε σημείο καμπής η C_f και, κατά περίπτωση, η C_g , C_h έχουν κοινή εφαπτομένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε

$$f'(x) = e^{-x} (\sigma \nu x - \eta \mu x), \quad f''(x) = -2e^{-x} \sigma \nu x$$

Το πρόσημο και οι ρίζες της f'' εξαρτώνται από τον παράγοντα της $\sigma \nu x$ ο οποίος εκατέρωθεν κάθε ρίζας του αλλάζει πρόσημο. Επομένως οι ρίζες της $\sigma \nu x = 0$ δηλαδή οι αριθμοί $\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι οι τετμημένες των σημείων καμπής. Στα $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ είναι

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \eta \mu\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)},$$

και τα σημεία καμπής της μορφής $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right)$ εκτός από την C_f ανήκουν και στην C_g . Επίσης

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) &= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \left(\sigma \nu\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - \eta \mu\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) = \\ &= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} (0 - 1) = g'\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \end{aligned}$$

άρα οι συντελεστές διευθύνσεως των εφαπτομένων των C_f , C_g σε ένα τέτοιο σημείο συμπίπτουν άρα και οι εφαπτομένες ταυτίζονται.

ΑΣΚΗΣΗ 20. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x^x & x > 0 \end{cases}.$$

Να αποδειχθεί ότι:

1. Η f είναι κυρτή.
2. Για όλα τα x ισχύει $x^x \geq 2e^e x - 2e^{e+1} + e^e$.
3. $\int_{e^{-\frac{1}{2}}}^e x^x dx > \frac{1}{4}e^e$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

¹⁰[4], σελ. 104

1. Κατ' αρχάς για να είναι η f κυρτή, σύμφωνα με τον ορισμό του σχολικού βιβλίου, πρέπει να είναι συνεχής. Η συνέχεια της $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ στα $x > 0$ είναι προφανής και επομένως μένει να διαπιστώσουμε την συνέχεια στο 0. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1 = f(1),$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Στο $(0, +\infty)$ είναι

$$f''(x) = x^x \left(\ln^2 x + 2 \ln x + 1 + \frac{1}{x} \right) = x^x \left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right) > 0.$$

Επομένως η f είναι κυρτή.

2. Εύκολα βρίσκουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}_f$ στο $(e, f(e))$ είναι

$$y = 2e^e x - 2e^{e+1} + e^e.$$

Λόγω της κυρτοτητας προκύπτει η προς απόδειξη ανισότητα η οποία είναι γνήσια εκτός από την τιμή $x = e$ όπου ισχύει σαν ισότητα.

3. Είναι $x^x \geq 2e^e x - 2e^{e+1} + e^e$ και η ισότητα ισχύει μόνο για ένα σημείο επομένως:

$$\int_{e-\frac{1}{2}}^e f(x) dx > \int_{e-\frac{1}{2}}^e (2e^e x - 2e^{e+1} + e^e) dx.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος είναι $\frac{1}{4}e^e$ και το αποδεικτέο έπεται.

ΑΣΚΗΣΗ 21. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n),$$

όπου $n > 2$ και $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Να αποδειχθεί ότι έχει ακριβώς $n - 2$ σημεία καμπής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το πολυώνυμο p έχει βαθμό n και συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου

1. Η παράγωγος του είναι επίσης πολυώνυμο με βαθμό $n - 1$ και συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου n . Τέλος η δεύτερη παράγωγος του p θα είναι πολυώνυμο βαθμού $n - 2$ και ο μεγιστοβάθμιος όρος του θα έχει συντελεστή $n(n - 1)$. Στα άκρα καθενός από τα $n - 1$ διαστήματα $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ η p παίρνει ίσες τιμές (μηδέν) και επομένως σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Επομένως σε κάθε ένα από τα $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ η παράγωγος p' θα έχει μία τουλάχιστον

ρίζα. Οι ρίζες αυτές είναι προφανώς διαφορετικές. Ας τις πούμε $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1}$. Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα στην παράγωγο p'' της p' συμπεραίνουμε ότι σε κάθε διάστημα $(b_1, b_2), (b_2, b_3), \dots, (b_{n-2}, b_{n-1})$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Ας πούμε αυτές τις ρίζες $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-2}$. Τα $x - c_1, x - c_2, \dots, x - c_{n-2}$ είναι παράγοντες του p'' . Άρα:

$$p''(x) = h(x)(x - c_1)(x - c_2) \cdot \dots \cdot (x - c_{n-2})$$

για κάποιο πολυώνυμο $h(x)$. Κάνοντας μια σύγκριση των βαθμών στα πολυώνυμα που απαρτίζουν τα μέλη της παραπάνω ισότητας βρίσκουμε ότι το $h(x)$ θα έχει μηδενικό βαθμό δηλαδή θα είναι μία σταθερά αναγκαστικά ίση με τον συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου του $p''(x)$. Άρα

$$p''(x) = n(n-1)(x - c_1)(x - c_2) \cdot \dots \cdot (x - c_{n-2}).$$

Ιδιαίτερος παρατηρούμε ότι οι $c_1, c_2, \dots, c_{n-2}$ είναι όλες οι ρίζες του $p''(x)$. Τώρα στο $(-\infty, c_1)$ όλοι οι παράγοντες $x - c_1, x - c_2, \dots, x - c_{n-2}$ είναι αρνητικοί ενώ στο (c_1, c_2) είναι όλοι αρνητικοί εκτός του $x - c_1$ που είναι θετικός. Άρα η $p''(x)$ εκατέρωθεν του c_1 αλλάζει πρόσημο άρα στο c_1 παρουσιάζει καμπή. Σε ανάλογα συμπεράσματα καταλήγουμε για τα $c_2, \dots, c_{n-2}$ και καταλήγουμε στο ότι η p έχει $n - 2$ σημεία καμπής.

ΑΣΚΗΣΗ 22. Να αποδειχθεί ότι αν μια κυρτή συνάρτηση είναι ορισμένη στους πραγματικούς και δεν έχει ρίζες είναι παντού θετική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή που δεν μηδενίζεται. Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Έστω πως μπορεί και $f(x_0) < 0$. Έστω τυχόν x_1 .

- Αν $f'(x_1) \leq 0$ έστω τυχόν $x_2 < x_1$. Θα είναι $f'(x_2) < 0$ και

$$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$$

για όλα τα x . Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)) = +\infty$$

και επομένως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Άρα υπάρχει x_3 ώστε $f(x_3) > 0$ και από το θεώρημα του Bolzano η f έχει ρίζα μεταξύ x_3 και x_0 (άτοπο).

- Αν $f'(x_1) \geq 0$ τότε καταλήγουμε σε άτοπο εργαζόμενοι παρόμοια παίρνοντας $x_2 > x_1$, την ανισότητα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$ και όρια στο $+\infty$.

Τελικά η f είναι παντού θετική.

ΑΣΚΗΣΗ 23.¹¹ Να αποδειχθεί ότι αν μια κυρτή συνάρτηση είναι ορισμένη στους πραγματικούς και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ τότε είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δείξουμε πρώτα ότι $f'(x) > 0$ για όλα τα x . Πράγματι αν υποθεθεί ότι για κάποιο x_0 είναι $f'(x_0) \leq 0$ τότε για $x_1 < x_0$ είναι $f'(x_1) < f'(x_0)$ οπότε $f'(x_1) < 0$. Αν τώρα στην ανισότητα

$$f(x) \geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1),$$

πάρουμε το όριο του β' μέλους για $x \rightarrow -\infty$ θα καταλήξουμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Αφού η παράγωγος της f είναι παντού θετική επιλέγουμε x_2 και από την ανισότητα

$$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2),$$

συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ δηλαδή το αποδεικτέο.

ΑΣΚΗΣΗ 24.¹² Να αποδειχθεί ότι A, B, C είναι γωνίες τριγώνου τότε ισχύει:

$$\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η αποδεικτέα ισοδυναμεί με την

$$\ln \eta\mu A + \ln \eta\mu B + \ln \eta\mu C \leq \ln \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \ln \eta\mu x, \quad x \in (0, \pi),$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(A) + f(B) + f(C) \leq \ln \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (*).$$

Είναι

$$f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

και επομένως η f είναι κοίλη. Από την ανισότητα του Jensen έχουμε:

$$f(A) + f(B) + f(C) = 3 \frac{f(A) + f(B) + f(C)}{3} \leq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \ln \frac{\sqrt{3}}{2},$$

και επομένως την (*).

¹¹Από το Mathematics Stack Exchange: <https://math.stackexchange.com/questions/2081072/exercise-on-convex-functions>

¹²Από το [10].

ΑΣΚΗΣΗ 25.¹³ Έστω Δ ένα διάστημα θετικών αριθμών και f μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη στο Δ . Έστω

$$F(x, y) = yf\left(\frac{x}{y}\right), \quad x, y \in \Delta.$$

Να αποδειχθεί αν $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \Delta$ τότε

$$F(x_1, y_1) + \dots + F(x_n, y_n) \geq F(x_1 + \dots + x_n, y_1 + \dots + y_n).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η αποδεικτέα γράφεται

$$y_1 f\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \dots + y_n f\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \geq (y_1 + \dots + y_n) f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{y_1 + \dots + y_n}\right)$$

και ισοδυναμεί με την

$$\frac{y_1}{y_1 + \dots + y_n} f\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \dots + \frac{y_n}{y_1 + \dots + y_n} f\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \geq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{y_1 + \dots + y_n}\right) \quad (*)$$

Το πρώτο μέλος της $(*)$ λόγω της ανισότητας του Jensen είναι μεγαλύτερο ή ίσο από

$$f\left(\frac{y_1}{y_1 + \dots + y_n} \cdot \frac{x_1}{y_1} + \dots + \frac{y_n}{y_1 + \dots + y_n} \cdot \frac{x_n}{y_n}\right)$$

δηλαδή από το δεύτερο μέλος.

ΑΣΚΗΣΗ 26. Έστω $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, κυρτή και τέτοια ώστε $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Να αποδειχθεί ότι έχει ακριβώς μία ρίζα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$. Η περίπτωση $f(\beta) < 0 < f(\alpha)$ αντιμετωπίζεται όμοια. Η f στο $[\alpha, \beta]$ παίρνει ελάχιστη τιμή η οποία λόγω του ότι $f(\alpha) < 0$ είναι αρνητική. Για το $f'(\alpha)$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

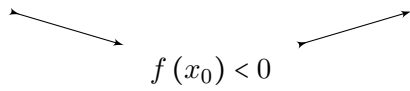
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. $f'(\alpha) \geq 0$. Τότε αφού $f' \uparrow$ αυτή θα είναι θετική στο $(\alpha, \beta]$ και επομένως η $f \uparrow$. Από το θεώρημα του Bolzano έχει ρίζα στο (α, β) που είναι μοναδική.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. $f'(\alpha) < 0$. Τότε αφού

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < 0,$$

κοντά στο α θα είναι $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < 0$ και για αυτά τα x αφού $x - \alpha > 0$ θα είναι $f(x) - f(\alpha) < 0$ δηλαδή $f(x) < f(\alpha) < 0$. Η f θα έχει ελάχιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$ η οποία θα είναι αρνητική και θα παρουσιάζεται σε κάποιο εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$ ας το πούμε x_0 . Από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$ και για $x < x_0$ θα είναι $f'(x) < 0$ και για $x > x_0$ θα είναι $f'(x) > 0$. Τα παραπάνω στοιχεία απεικονίζονται στο παρακάτω διάγραμμα:

¹³ Από υλικό των ομιλών Μαθηματικών του Berkeley (<https://mathcircle.berkeley.edu/circle-archives>)

x	α	x_0	β
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

Είναι προφανές ότι η f έχει μία μόνο ρίζα και αυτή στο διάστημα (x_0, β) .

ΑΣΚΗΣΗ 27. Να αποδειχθεί ότι αν οι $a_1, \dots, a_n$ είναι θετικοί αριθμοί με

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1,$$

τότε

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n\sqrt{n}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

ορισμένη στο $(0, +\infty)$. Είναι

$$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x^5}} > 0$$

και επομένως η f είναι κυρτή. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} &= f(a_1^2) + \dots + f(a_n^2) = \\ n \frac{f(a_1^2) + \dots + f(a_n^2)}{n} &\geq n f\left(\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}\right) = n f\left(\frac{1}{n}\right) = n\sqrt{n}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 28. Αν οι θετικοί αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ έχουν άθροισμα 1 τότε ισχύει

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

Πράγματι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}, \quad x \in (0, 1)$$

είναι

$$f''(x) = \frac{4-x}{4(x-1)^2\sqrt{1-x}} > 0$$

και επομένως η f είναι κυρτή. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Jensen έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} &= f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) = \\ n \left(\frac{1}{n} f(a_1) + \frac{1}{n} f(a_2) + \dots + \frac{1}{n} f(a_n) \right) &\geq n f \left(\frac{1}{n} a_1 + \frac{1}{n} a_2 + \dots + \frac{1}{n} a_n \right) = \\ n f \left(\frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 29. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ τότε η συνάρτηση $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δεν μπορεί να είναι $f'(x_1) \geq 0$ για κάποιο x_1 . Διότι για $x_0 > x_1$ θα είναι $f'(x_0) > 0$ και αφού για όλα τα x ισχύει

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

θα έχουμε το άτοπο συμπέρασμα ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Άρα για όλα τα x είναι $f'(x) < 0$ και $f \searrow$.

Επίσης δεν μπορεί να είναι $f(x_1) \leq 0$ διότι τότε για $x_0 > x_1$, λόγω της μονοτονίας της f , θα είναι $f(x_0) < 0$ και επομένως για $x > x_0$ θα είναι $f(x) < f(x_0) < 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq f(x_0) < 0$ συμπέρασμα που επίσης είναι άτοπο. Άρα $f(x) > 0$ για όλα τα x .

Τώρα

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{\overbrace{f'(x)x}^- - \overbrace{f(x)}^+}{x^2} < 0$$

και το αποδεικτέο έπεται.

ΑΣΚΗΣΗ 30. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(\lambda) = f((1-\lambda)a + \lambda b),$$

είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η g προφανώς είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Είναι:

$$g'(\lambda) = ((1-\lambda)a + \lambda b)' f'((1-\lambda)a + \lambda b) = (b-a) f'(a + \lambda(b-a)).$$

Με $\lambda_1 < \lambda_2$ είναι και

$$a + \lambda_1(b-a) < a + \lambda_2(b-a).$$

Απο τη μονοτονία της f' έχουμε

$$f(a + \lambda_1(b-a)) < f(a + \lambda_2(b-a)),$$

από την οποία προκύπτει ότι $g'(\lambda_1) < g'(\lambda_2)$ και η g είναι κυρτή.

ΑΣΚΗΣΗ 31.¹⁴ Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = e^{x-\sqrt{x}},$$

είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η f είναι ορισμένη στο $[0, +\infty)$ και συνεχής. Για $x > 0$ είναι

$$f''(x) = e^{x-\sqrt{x}} \frac{1 + 4\sqrt{x}^3 - 4x + \sqrt{x}}{4\sqrt{x}^3}.$$

Θέτουμε $\sqrt{x} = t$ και τότε

$$1 + 4\sqrt{x}^3 - 4x + \sqrt{x} = 1 + 4t^3 - 4t^2 + t.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(t) = 1 + 4t^3 - 4t^2 + t, \quad t > 0,$$

και μελετούμε την g ως προς το πρόσημο. Είναι

$$g'(t) = (6t - 1)(2t - 1),$$

και έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής της g :

t	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	1	$\frac{29}{27}$	1	$+\infty$	

Άρα η g είναι θετική και το αυτό ισχύει για την f'' . Επομένως η f είναι κυρτή.

ΣΧΟΛΙΟ 43. Μια άλλη προσέγγιση: Είναι $(x - \sqrt{x})'' = \frac{1}{4\sqrt{x}^3}$ και επομένως η $h(x) = x - \sqrt{x}$ είναι κυρτή. Η f σύνθεση της γνησίως αύξουσας και κυρτής e^x και της κυρτής h επομένως είναι κυρτή (ΠΡΟΤΑΣΗ 23).

ΑΣΚΗΣΗ 32. Να αποδειχθεί ότι αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε

$$x \ln x + y \ln y \geq (x + y) \ln \left(\frac{x + y}{2} \right).$$

¹⁴<https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=69273>

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι:

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) = -\ln\frac{2}{x+y} = -\ln\left(\frac{x}{x+y} \cdot \frac{1}{x} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{y}\right).$$

Αλλά η $\ln$ είναι κοίλη και από την ανισότητα του Jensen ισχύει:

$$\ln\left(\frac{x}{x+y} \cdot \frac{1}{x} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{y}\right) \geq \frac{x}{x+y} \ln \frac{1}{x} + \frac{y}{x+y} \ln \frac{1}{y} = -\frac{1}{x+y} (x \ln x + y \ln y).$$

Επομένως:

$$-\ln\left(\frac{x}{x+y} \cdot \frac{1}{x} + \frac{y}{x+y} \cdot \frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{x+y} (x \ln x + y \ln y).$$

Άρα:

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{x+y} (x \ln x + y \ln y),$$

από την οποία έχουμε την αποδεικτέα.

ΑΣΚΗΣΗ 33. Να αποδειχθεί ότι αν οι $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί με άθροισμα 1 τότε

$$\sum_{i=1}^n a_i (1 - a_i)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η αποδεικτέα προφανώς αληθεύει για $n = 1$ και εύκολα αποδεικνύεται ότι αληθεύει για $n = 2$ αφού η σχέση $a_1 + a_2 = 1$ συνεπάγεται την

$$a_1 (1 - a_1)^2 + a_2 (1 - a_2)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2,$$

αφού η τελευταία ισοδυναμεί με την $a_1 a_2 \leq \frac{1}{4}$ η οποία ισχύει.

Για $n \geq 3$ έχουμε

$$a_i (1 - a_i)^2 = (1 - a_i) a_i (1 - a_i) = (1 - a_i) f(a_i),$$

όπου f η κοίλη συνάρτηση

$$f(x) = x(1 - x).$$

Είναι

$$\sum_{i=1}^n (1 - a_i) = n - \sum_{i=1}^n a_i = n - 1$$

επομένως

$$\sum_{i=1}^n a_i (1 - a_i)^2 = \sum_{i=1}^n (1 - a_i) f(a_i) = (n - 1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - a_i}{n - 1} f(a_i) = (n - 1) \sum_{i=1}^n b_i f(a_i),$$

όπου $b_i = \frac{1-a_i}{n-1}$ μη αρνητικά με άθροισμα 1. Από την ανισότητα του Jensen έχουμε ότι

$$(n-1) \sum_{i=1}^n b_i f(a_i) \leq (n-1) f\left(\sum_{i=1}^n b_i a_i\right) = (n-1) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1-a_i}{n-1} a_i\right) =$$

$$(n-1) f\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - a_i^2)\right) = (n-1) f\left(\frac{1}{n-1} (1-S)\right),$$

όπου $S = \sum_{i=1}^n a_i^2$. Αλλά

$$(n-1) f\left(\frac{1}{n-1} (1-S)\right) = (n-1) \frac{1}{n-1} (1-S) \left(1 - \frac{1}{n-1} (1-S)\right) = \frac{(1-S)(n-2+S)}{n-1}.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{(1-S)(n-2+S)}{n-1} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2,$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\frac{(n^2 + Sn - 3n + 1)(Sn - 1)}{(n-1)n^2} \geq 0.$$

Η τελευταία ανισότητα αληθεύει διότι:

- $n^2 + Sn - 3n + 1 \geq 0$ αφού $n \geq 3$.
- Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\underbrace{(1^2 + \dots + 1^2)}_n (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_n)^2,$$

οπότε $nS \geq 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 34. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ , παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία η οποία παίρνει στο Δ μόνο θετικές τιμές. Να αποδειχθεί ότι αν η f είναι υπερ-κυρτή τότε για κάθε ζεύγος στοιχείων $a > b$ του Δ ισχύει:

$$\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{\frac{1}{a-b}} > e^{\frac{f'(b)}{f(b)}}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η $g = \ln f$ θα είναι κυρτή επομένως για κάθε x_0 και $x \neq x_0$ θα ισχύει:

$$g(x) > g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0).$$

Παίρνοντας $x = a$, $x_0 = b$ και αντικαθιστώντας την g έχουμε:

$$\ln f(a) > \frac{f'(b)}{f(b)}(a - b) + \ln f(b),$$

από την οποία προκύπτει η

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{f(a)}{f(b)} > \frac{f'(b)}{f(b)}$$

και τελικά η αποδεικτέα.

ΑΣΚΗΣΗ 35. ¹⁵ Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία. Να αποδειχθεί ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι κυρτή ή κοίλη στο Δ .
2. Για κάθε κλειστό υποδιάστημα $[p, q]$ του Δ το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[p, q]$ είναι μοναδικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για το ευθύ παρατηρούμε ότι αν η f είναι κυρτή ή κοίλη η f' είναι γνησίως μονότονη και επομένως παίρνει κάθε τιμή της μία μόνο φορά. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα μόνο $\xi \in (p, q)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$. Για το αντίστροφο αρκεί να δείξουμε ότι τρία διάφορα σημεία της $\mathcal{C}_f$ δεν είναι συνευθειακά και το αποδεικτέο έπεται από την ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond$ 18. Πράγματι αν υποθεθεί ότι τα $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ και $(x_3, f(x_1))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ είναι συνευθειακά από το θεώρημα μέσης τιμής στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$ θα υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$ ώστε

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2),$$

η οποία λόγω της συνευθειακότητας των τριών σημείων μας οδηγεί στο άτοπο συμπέρασμα ότι

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(\xi_1) = f'(\xi_2).$$

ΑΣΚΗΣΗ 36. ¹⁶ Να βρεθεί συνάρτηση

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

η οποία να έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(-3, 10)$ και καμπή στο $-\frac{5}{3}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα έχουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} p(-3) &= 10 \\ p'(-3) &= 0 \\ p''(-5) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

¹⁵Βλ. και [61] σελ. 59 ασκ. 19-19.

¹⁶Απο τον διαγωνισμό Stuart Sidney Calculus Competition του Πανεπιστημίου του Connecticut, έτος 2017: <https://undergradactivities.math.uconn.edu/calculus-competition/#>

από το οποίο βρίσκουμε

$$a = 15, b = 63, c = 91.$$

Θα πρέπει

$$p(x) = x^3 + 15x^2 + 63x + 91.$$

Επειδή οι δύο συνθήκες μηδενισμού των παραγώγων είναι αναγκαίες αλλά όχι ικανές πρέπει βέβαια να επαληθεύσουμε αν όντως η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες. Αυτό μπορεί να γίνει με μελέτη της. Ωστόσο μπορούμε να έχουμε και την ακόλουθη προσέγγιση. Η πρώτη συνθήκη μας εξασφαλίζει ότι η C_p διέρχεται από το $(-3, 10)$. Η παράγωγος της, που είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, έχει ρίζα το -3 . Αυτή αποκλείεται να είναι διπλή διότι θα ήταν ρίζα της παραγώγου που είναι η -5 . Άρα έχει δύο ρίζες και σε αυτές αλλάζει πρόσημο. Άρα το -3 είναι πράγματι θέση ακροτάτου. Τέλος η δεύτερη παράγωγος είναι πρωτοβάθμιο πολυώνυμο που αλλάζει πρόσημο στην ρίζα του -5 άρα πράγματι έχουμε καμπή.

ΑΣΚΗΣΗ 37. Έστω f μια κυρτή συνάρτηση στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$, με $\alpha > 0$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - xf'(x),$$

είναι γνησίως φθίνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε $x_1 < x_2$ και θα δείξουμε ότι $g(x_2) < g(x_1)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= f(x_2) - x_2 f'(x_2) - f(x_1) + x_1 f'(x_1) = \\ &= (f(x_2) - f(x_1)) + x_1 f'(x_1) - x_2 f'(x_2) = \\ &= (f(x_2) - f(x_1)) + x_1 f'(x_1) - x_1 f'(x_2) + x_1 f'(x_2) - x_2 f'(x_2) = \\ &= (f(x_2) - f(x_1)) + x_1 (f'(x_1) - f'(x_2)) - f'(x_2) (x_2 - x_1) \stackrel{\text{ΘΜΤ}}{=} \\ &= (x_2 - x_1) f'(\xi) - f'(x_2) (x_2 - x_1) - x_1 (f'(x_2) - f'(x_1)) \stackrel{f' \uparrow}{=} \\ &= \underbrace{(x_2 - x_1)}_{+} \underbrace{(f'(\xi) - f'(x_2))}_{-} - \underbrace{x_1}_{+} \underbrace{(f'(x_2) - f'(x_1))}_{+} < 0. \end{aligned}$$

Άρα $g \downarrow$.

ΑΣΚΗΣΗ 38. ¹⁷ Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Η $xf(x)$ είναι κυρτή.
2. Η $f(\frac{1}{x})$ είναι κυρτή.

¹⁷<https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=69364&p=337253#p337253>

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θέτουμε $g(x) = xf(x)$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Είναι

$$f(x) = \frac{1}{x}g(x),$$

και

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = xg\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Για το $1. \Rightarrow 2.$ έχουμε ότι η g είναι κυρτή. Είναι:

$$\left(xg\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\left(xg\left(\frac{1}{x}\right)\right)'' = -\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right).$$

Αφού η g είναι κυρτή η δεύτερη παράγωγος της θα είναι μη αρνητική και το σύνολο που μηδενίζεται δεν θα περιέχει διάστημα (ΠΡΟΤΑΣΗ $\diamond 3$). Προφανώς το αυτό θα ισχύει για την $\frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$ άρα και για την $\left(xg\left(\frac{1}{x}\right)\right)''$. Επομένως η $f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι κυρτή.

2. Για το $2. \Rightarrow 1.$ Υποθέτουμε ότι η

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = h(x),$$

είναι κυρτή. Είναι

$$g(x) = xh\left(\frac{1}{x}\right),$$

και

$$g''(x) = \frac{1}{x^3}h''\left(\frac{1}{x}\right),$$

οπότε επαναλαμβάνοντας ανάλογους συλλογισμούς συνάγουμε την κυρτότητα της g .

ΑΣΚΗΣΗ 39. Έστω $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει διάστημα $(b, +\infty) \subseteq (a, +\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν για κάποιο $b \in (a, +\infty)$ ισχύει $f(b) \geq 0$ τότε αφού $f' \nearrow$ στο $(b, +\infty)$ θα είναι $f'(x) > 0$ και σε αυτό $f \nearrow$.

Αν $f'(b) < 0$ για όλα τα b από το $(a, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, +\infty)$ άρα αν επιλέξουμε τυχόν b θα είναι $f(x) < f(b)$ για όλα τα x από το $(b, +\infty)$. Η τελευταία μα οδηγεί στο άτοπο συμπέρασμα ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq f(b)$.

Η περίπτωση αυτή αποκλείεται και έτσι έχουμε το αποδεικτέο.

ΑΣΚΗΣΗ 40. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Έστω M η μέγιστη τιμή της f'' . Να αποδειχθεί ότι:

1. Αν $p = \frac{a+b}{2}$ τότε η συνάρτηση $\varphi : \left[0, \frac{b-a}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\varphi(x) = \frac{f(p-x) + f(p+x) - Mx^2}{2},$$

έχει φθίνουσα παράγωγο.

2. $0 < \frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M(b-a)^2}{8}.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Είναι

$$\varphi''(x) = \frac{f''(p-x) + f''(p+x) - 2M}{2} \leq 0.$$

Επομένως η φ' είναι φθίνουσα.

2. Το πρώτο σκέλος της ανισότητας είναι συνέπεια της ανισότητας του Jensen. Για το δεύτερο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αφού η φ' είναι φθίνουσα θα ισχύει $\varphi'(x) \leq \varphi'(0) = 0$ επομένως και η φ είναι φθίνουσα άρα

$$\varphi(x) \leq \varphi(0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Για $x = \frac{b-a}{2}$ έχουμε

$$\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

δηλαδή

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) - M\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2} \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

από την οποία έπεται το αποδεικτέο.

- [1] A' Campo-Neuen, Annette, Papadopoulos, Athanase: *A Path in History, from Curvature to Convexity*. Στο *Geometry in History*, σελίδες 305–354. Springer, 2019.
- [2] Apostol, Tom M.: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Τόμος 1*. Ατλαντίς-Μ. Πεχλιβανίδης και Σία, 1962.
- [3] Bardini, Gabriele, Gianella, Gian Mario : *A Historical Walk along the Idea of Curvature, from Newton to Gauss Passing from Euler*. International Mathematical Forum, 11:259–278, 2016.
- [4] Berman, G.N. : *A Problem Book in Mathematical Analysis*. MIR, 1977.
- [5] Bers, Lipman: *Calculus vol. 1*. Holt, Reinhart & Winston, 1969.
- [6] Bourbaki, Nicolas: *Functions of a Real Variable. Elementary Theory*. Springer, 2004.
- [7] Carothers, N. L.: *Real Analysis*. Cambridge, 2000.
- [8] Chow. Timothy Y.: *What is a Closed-Form Number?* The American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 5, σελίδες 440–448, 1999.
- [9] Coolidge, J. L.: *The Unsatisfactory Story of Curvature*. The American Mathematical Monthly, Vol. 59, No. 6, 1952.
- [10] Cvetkovski, Zdravko: *Inequalities. Theorems, Techniques and Selected Problems*. Springer, 2012.
- [11] Diaz J. B., Metcalf F.T.: *An Analytic Proof of Young's Inequality*. The American Mathematical Monthly, 77:603–609, 1970.
- [12] Edwards, Jr. C.H.: *The Historical Development of the Calculus*. Springer, 1979.
- [13] Fenchel, W.: *Convexity Through the Ages*. Στο *Convexity and Its Applications*, σελίδες 120–130. Springer, 1983.
- [14] Godement, Roger: *Analysis I. Convergence, Elementary Functions*. Springer, 2004.
- [15] Hairer E., Wanner G.: *Analysis by Its History*. Springer, 1996.
- [16] Hardy G. , Littlewood J.E. , Pólya G.: *Inequalities*. Cambridge.
- [17] Hilbert D., Cohn-Vossen S.: *Geometry and the Imagination*. Chelsea, 1983.
- [18] Ilyin V.A, Poznyac E.G.: *Fundamentals of Mathematical Analysis Part 1*. MIR, 1982.

-
- [19] Jensen, J.L.W.V.: *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*. Acta Mathematica, 30, 175-193, 1906.
 - [20] Kadelburg Z., Dukic D., Lukic M., Matic I.: *Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead, and some Applications*. The teaching of Mathematics, τ III(1):31-45, 2005.
 - [21] Kadelburg, Zoran: *Some classical inequalities and their application to Olympiad problems*. The teaching of Mathematics, Vol XIV, 2, σελίδες 97-106, 2011.
 - [22] Karamata, J.: *Sur une inégalité relative aux fonctions convexes*. Publ. Math. Univ. Belgrade 1,145-148, 1932.
 - [23] Kline, Morris: *Calculus. An Intuitive and Physical Approach, 2d Ed.* Wiley, 1977.
 - [24] Lang, Serge: *Undergraduate Analysis*. Springer, 1983.
 - [25] Lay, Steven R.: *Convex Sets and their Applications*. Dover, 2007 (1982).
 - [26] Loomis, Lynn: *Calculus*. Addison-Wesley, 1974.
 - [27] Maron, I.A.: *Problems in Calculus of one Variable*. MIR, 1975.
 - [28] Mercer, Peter R.: *More Calculus of a Single Variable*. Springer.
 - [29] Mitrinovic, D.S.: *Analytic Inequalities*. Springer.
 - [30] Montel, Paul: *Sur les fonctions convexes et les fonctions sousesharmoniques*. Journal de mathématiques pures et appliquées, 9e série, tome 7:29-60, 1928.
 - [31] Needham, Tristan: *A Visual Explanation of Jensen's Inequality*. The American Mathematical Monthly, 100:768-771.
 - [32] Niculescu Constantin P., Persson Lars-Erik: *Convex Functions and their Applications*. Springer, 2006.
 - [33] Nikolsky, S.M.: *A Course of Mathematical Analysis Vol. 1*. MIR, 1987.
 - [34] Papadopoulos, Athanase: *Convexity in Greek Antiquity*. Στο Dani, S.G., Papadopoulos Athanase (επιμελητής): *Geometry in History*, σελίδες 139-151. Springer, 2019.
 - [35] Piskunov, N.: *Differential and Integral Calculus Vol. I*. MIR Publishers, 1981.
 - [36] Roberts Wayne A., , Varberg Dale. E: *Convex Functions*. Academic Press, 1973.
 - [37] Rockafellar, Tyrrel R.: *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
 - [38] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1976.
 - [39] Sawyer, W.W.: *Τι είναι ο Απειροστικός Λογισμός*. ΤΡΟΧΑΛΙΑ, 1993.
 - [40] Serrano Isabel M., Suceavă, Bogdan D.: *A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas*. Notices of the AMS, vol 62, No 9, 1915.
 - [41] Simmons, George F.: *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw Hill, 1963.

-
- [42] Smith, D.E: *History of Mathematics Volume II*. Dover, 1958.
- [43] Spivak, Michael: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, 4η Εκδ. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1991.
- [44] Stillwell, John : *Mathematics and Its History*. Springer, 2010.
- [45] Thomas JR George B., Finney Ross L.: *Calculus and Analytic Geometry*, 6th ed. Addison Wesley-Narosa Publishing House, 1995.
- [46] Thomson Brian S., Bruckner Judith B., Bruckner Andrew M.: *Elementary Real Analysis*. www.classicalreanalysis.com, 2008.
- [47] Tolsted, Elmer: *An Elementary Derivation of the Cauchy, Hölder, and Minkowski Inequalities from Young's Inequality*. Mathematics Magazine, 37:1–12.
- [48] Vilenkin, N. Ya: *Method of successive approximations*. MIR, 1979.
- [49] Witkowski, Alfred: *On Young's Inequality*. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7:1–3, 2006.
- [50] Young, W. H.: *On classes of summable functions and their Fourier series*. Proceedings of the Royal Society of London A 87, σελίδες 225–229.
- [51] Αποστολάτος, Ν. Θ.: *Αριθμητική Ανάλυσις τ.1*. 1973.
- [52] Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Γιαννίκος Χ., Μπέτσης Α., Νοταράς Δ., Σολδάτος Κ., Φωτόπουλος, Σ.: *Μαθηματικά Ι Γ' Λυκείου Ανάλυση*. ΟΕΔΒ, 1984.
- [53] Κάππος, Δημήτριος Α.: *Μαθήματα Αναλύσεως. Απειροστικός Λογισμός*. 1962.
- [54] Λυγάτσικας Ζήνων: *Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις*. <https://blogs.sch.gr/zenonlig/files/2013/02/convfuc.pdf>, 2013.
- [55] Μάκρας Στράτος Ελ.: *Κυρτές Συναρτήσεις*. Ευκλείδης Β, τόμος 13, τεύχος Β, 1994.
- [56] Μαυρογιάννης, Ν.Σ.: *Τα αξιώματα συνεχείας*. Μαθηματική Επιθεώρηση, σελίδες 94–126, 1981.
- [57] Μαυρογιάννης, Ν.Σ.: *Παρατηρήσεις στα Θέματα Θετικής-Τεχνολογικής Κατεύθυνσης του έτους 2007*. 2007. <https://www.academia.edu/41674004>.
- [58] Μαυρογιάννης, Ν.Σ.: *Η συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy*. Εκθέτης, 1, 2009. <http://ekthetis.gr/Ekthetis001.pdf>.
- [59] Μπρίκας, Μαυρίκιος: *Μαθήματα Θεωρίας των Καμπυλών*. 1965.
- [60] Μπόρης, Ροδόλφος: *Γεωμετρικές συνθήκες κυρτότητας*. Εκθέτης, 2010. <http://ekthetis.gr/Ekthetis003.pdf>.
- [61] Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας Ε.: *Απειροστικός Λογισμός*, τόμος Πα. Συμμετρία, 2000.
- [62] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμάκη Β: *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*. Συμμετρία, 1988.
- [63] Ντρίζος Δημήτρης: *Οι κυρτές συναρτήσεις. Μια πορεία μεταξύ γεωμετρικής και συναρτησιακής θεώρησης*. Ευκλείδης Γ', 2006.

- [64] Πολύζος Γεώργιος: *Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις, σημεία καμπής συνάρτησης*. Ευκλείδης Β, τεύχος 4, σελίδες 240-247, 1986.
- [65] Σβέρκος, Α., Ανδρεαδάκης, Σ Κατσαργύρης, Β. Παπασταυρίδης, Σ. Πολύζος, Γ.: *Άλγεβρα Β' Ενιαίου Λυκείου*. ΟΕΔΒ, 2001.
- [66] Στάϊκος, Βασίλειος: *Μαθηματικά Γ' Λυκείου*. ΟΕΔΒ, 1981.
- [67] Στεργίου, Μπάμπης, Πολλάτος, Μάκης: *Ανισότητες στο ολοκλήρωμα*. Εκθέτης. <http://ekthesis.gr/Ekthesis020.pdf>.
- [68] Φερεντίνου-Νικολακοπούλου Άννα, Σαββαΐδης Βάσος Χ.: *Στοιχεία Μαθηματικής Αναλύσεως τ. 2*. 1976.

Ανισότητα

Hermite-Hadamard, 110
Cauchy-Schwarz , 89
Cauchy-Schwarz για ολοκλη-
ρώματα , 101
Cauchy για ολοκληρώματα , 102
Hölder, 89
Jensen, 28
Jensen Γενικευμένη, 83
Jensen για ολοκληρώματα , 109
Minkowski, 90
Popoviciu, 91
Young, 88
Cauchy, 87
Cauchy με βάρη, 88
Karamata, 103

Επιγράφημα, 130

Ευθεία

Κάθετη σε καμπύλη, 170
Υποστήριξης, 135

Καμπυλότητα

μέση μεταξύ σημείων , 172
σε σημείο, 172

Μέθοδος

regula falsi, 164
Διχοτόμησης, 163

Μέση τιμή συνάρτησης, 41

Πολύγωνο

κυρτό, 128

Σημείο

Επαφής, 50
Επαφής γραφικών παραστάσεων,
190
Εσωτερικό πολυγώνου, 132
καμπής, 66

Στάθμη , (norm), 155

Συνάρτηση

αυστηρώς κυρτή υπό ευρεία έν-
νοια, 123
κοίλη, 6
κυρτή, 5
κυρτή κατά τα μέσα, 136
κυρτή υπό ευρεία έννοια, 123
λογαριθμικά κοίλη, 114
αυστηρώς κυρτή κατά τα μέσα,
136
λογαριθμικά κυρτή ή υπερ-κυρτή,
78

Σύνολο

αραιό, 157
πουνενά πυκνό, 157
κυρτό, 128
του Cantor, 150